บทที่ 5
แนวคิดที่เกี่ยวกับผิว
(Concept of a surface)

5.1 **เวกเตอร์ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว** (Vector Functions of Several Variables)

ความคิดพื้นฐานทั้งหมดของเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรตัวเดียวได้ศึกษาแล้วในบทที่ 2 ซึ่งจะนำไปสู่เวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

ในระบบพิกัดฉาก

เวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวจะสมนัยกับสเกลาร์ พังก์ชัน 3 พังก์ชัน ซึ่งมีตัวแปรเหมือนกัน ดังนั้น นิยาม และ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ใน แคลคูลัสที่เกี่ยวกับลิมิต, อนุพันธ์ และ อินทิกรัล จึงสามารถนำมาใช้กับเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวได้ เช่น เรียกเวกเตอร์ $\vec{a}$ ว่า เป็นลิมิตของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{R}(u,v)$ ที่ (u_o, v_o) ถ้า $|\vec{R}(u,v)-\vec{a}|$ เข้าใกล้ศูนย์ ในขณะที่ $(u,v) \to (u_o, v_o)$

$\vec{R}(u, v)$ กล่าวว่ามีความต่อเนื่องที่ (u_o, v_o) ก็ต่อเมื่อ

$$\vec{R}(u_o, v_o) = \lim_{(u,v)\to(u_o,v_o)} \vec{R}(u,v)$$

$\vec{R}(u, v, \ldots)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์พังก์ชันของตัวแปรหลายตัว ถ้าให้ตัวแปรอื่น ๆ คงตัว ยกเว้น u แล้ว $\vec{R}(u, v, \ldots)$ จะมีลักษณะเหมือนกับเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว อนุพันธ์ของพังก์ชันนี้ เรียกว่า อนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของ $\vec{R}$ เทียบกับตัวแปร u เพียงตัวเดียว แทนด้วยสัญลักษณ์

หรือ $\frac{\partial}{\partial u}\vec{R}(u,v, \ldots)$ หรือ $\frac{\partial \vec{R}(u,v, \ldots)}{\partial u}$ หรือ $\vec{R}_u(u,v,\ldots)$

หรือ $\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}$ หรือ $\vec{R}_u$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไป แทนด้วย

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u \partial v}, \ldots$$

หรือ $\vec{R}_{uu} = \dfrac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2}$,

$$\vec{R}_{vu} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u \partial v}, \ldots$$

เรากล่าวว่าฟังก์ชันอยู่ใน ชั้น C^n ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ถึงอันดับ n และอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้มีความต่อเนื่อง

อนุพันธ์ย่อยที่จุด ๆ หนึ่ง ของเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อส่วนประกอบทุกอันของฟังก์ชันมีอนุพันธ์ย่อยที่จุดนั้น ส่วนประกอบของอนุพันธ์ย่อยเท่ากับอนุพันธ์ย่อยของส่วนประกอบที่สัมนัยกัน เช่น

ถ้า $\vec{R}(u, v)$ มีส่วนประกอบ คือ $x(u, v)$, $y(u, v)$ และ $z(u, v)$

แล้ว $\vec{R}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$

$$\vec{R}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

$$\vec{R}_{uu} = x_{uu}\vec{i} + y_{uu}\vec{j} + z_{uu}\vec{k}$$

$$\vec{R}_{uv} = x_{uv}\vec{i} + y_{uv}\vec{j} + z_{uv}\vec{k}$$

$$\vec{R}_{vv} = x_{vv}\vec{i} + y_{vv}\vec{j} + z_{vv}\vec{k}$$

$$\vec{R}_{uuu} = x_{uuu}\vec{i} + y_{uuu}\vec{j} + z_{uuu}\vec{k}$$

เช่นเดียวกับสเกลาร์ฟังก์ชัน ถ้าอนุพันธ์ย่อยแต่ละอันดับมีความต่อเนื่อง แล้วอนุพันธ์ย่อยผสม จะไม่ขึ้นกับอันดับของการหาอนุพันธ์ นั่นคือ

$$\vec{R}_{uv} = \vec{R}_{vu} ,$$

$$\vec{R}_{uvu} = \vec{R}_{vuu} = \vec{R}_{uuv} , \ldots$$

ถ้า u, v เป็นฟังก์ชันของ t และ s นั่นคือ

$$u = u(t, s)$$

$$v = v(t,s)$$

ถ้า $\vec{R}(u, v)$ **หาอนุพันธ์ได้** และถ้า $u(t, s)$ และ $v(t, s)$ **หาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งได้แล้ว** $\vec{R}(u(t, s), v(t,s))$ **จะมีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ** t **และ** s **และ**

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

หมายเหตุ สูตรของเทเลอร์ใช้ได้สำหรับเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปร u, v และ $\emptyset$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันของ ตัวแปร u, v แล้ว

1. $\frac{\partial}{\partial u}(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A}_u + \vec{B}_u$

2. $\frac{\partial}{\partial u}(\emptyset\vec{A}) = \emptyset\vec{A}_u + \emptyset_u\vec{A}$

3. $\frac{\partial}{\partial u}(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}.\vec{B}_u + \vec{A}_u.\vec{B}$

4. $\frac{\partial}{\partial u}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B}_u + \vec{A}_u \times \vec{B}$

ตัวอย่างที่ 5.1.1 ถ้า $\vec{f}(u,v) = e^{uv}\vec{i} + (u-v)\vec{j} + u\sin v\vec{k}$

แล้ว **จงหา**

ก. $\vec{f}_u$

ข. $\vec{f}_v$

ค. $\vec{f}_{uu}$

ง. $\vec{f}_u \times \vec{f}_v$

วิธีทำ ก. $\vec{f}_u = \frac{\partial}{\partial u}(e^{uv})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial u}(u-v)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial u}(u\sin v)\vec{k}$

$$= ve^{uv}\vec{i} + \vec{j} + \sin v\vec{k}$$

ข. $\vec{f}_v = \frac{\partial}{\partial v}(e^{uv})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial v}(u-v)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial v}(u\sin v)\vec{k}$

$= ue^{uv}\vec{i} - \vec{j} + u\cos v\vec{k}$

ค. $\vec{f}_{uu} = \frac{\partial \vec{f}_u}{\partial u}$

$= \frac{\partial}{\partial u}(ve^{uv})\vec{i} + \frac{\partial}{\partial u}(1)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial u}(\sin v)\vec{k}$

$= v^2e^{uv}\vec{i}$

ง.

$$\vec{f}_u \times \vec{f}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ve^{uv} & 1 & \sin v \\ ue^{uv} & -1 & u\cos v \end{vmatrix}$$

$= \vec{i}(u\cos v + \sin v) - \vec{j}(uve^{uv}\cos v - ue^{uv}\sin v)$
$+\vec{k}(-ve^{uv} - ue^{uv})$

$= (u\cos v + \sin v)\vec{i} +$
$ue^{uv}(\sin v - v\cos v)\vec{j} - e^{uv}(u+v)\vec{k}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 5.1

1. ให้ $\vec{A} = (2u^2v-u^4)\vec{i} + (e^{uv}-v\sin u)\vec{j} + (u^2\cos v)\vec{k}$

จงหา

ก. $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial u}$

ข. $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial v}$

ค. $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial u^2}$

ง. $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial v^2}$

จ. $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial u\,\partial v}$

ฉ. $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial v\partial u}$

2. ถ้า $\phi(x,y,z) = xy^2z$ และ $\vec{A} = xz\vec{i} - xy^2\vec{j} + yz^2\vec{k}$

จงหา $\dfrac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z}$ ที่จุด (2,-1, 1)

3. ให้ $\vec{A} = u^2vw\vec{i} - 2uw^3\vec{j} + uw^2\vec{k}$ และ

$\vec{A} = 2w\vec{i} + v\vec{j} - u^2\vec{k}$

จงหา $\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}(\vec{A}\times\vec{B})$ ที่จุด (1,0,-2)

4. ให้ $\vec{f} = uvw\vec{i} + uw^2\vec{j} - v^3\vec{k}$ และ

$\vec{g} = u^3\vec{i} - uvw\vec{j} + u^2w\vec{k}$

จงหา

ก. $\dfrac{\partial^2\vec{f}}{\partial u\partial v}$ ที่จุดกำเนิด

ข. $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial u^2}$ ที่จุด (1,1,0)

ให้ $\emptyset = 3x^2 - yz$ และ $\vec{f} = 3xyz^2\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\,\vec{k}$

จงหา $\frac{\partial^2(\emptyset\vec{f})}{\partial x \partial y}$ ที่จุด (1,0,1)

5.2 ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ (Regular Parametric Representation)

ผิวคือเซตของจุดใน 3 มิติ ซึ่งเป็นภาพ (image) ของการส่งปรกติ (regular mapping) ของเซตของจุดในระนาบไปยัง E^3 หรือ คือ เซตของจุดใน 3 มิติ ซึ่งมีพิกัดเป็นฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว ดังนั้น โดยทั่วไปแล้วผิวสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$x = x(u,v)\ ,\quad y = y(u,v)\ ,\quad z = z(u,v) \quad \ldots\ldots \quad (5.2.1)$$

เมื่อ u, v เป็นตัวแปรเสริม หรือ พิกัดเชิงเส้นโค้ง (Curvilinear Coordinates) หรือ Gaussian Coordinates ของจุดบนผิว หรือ พิกัดผิว (surface coordinates)

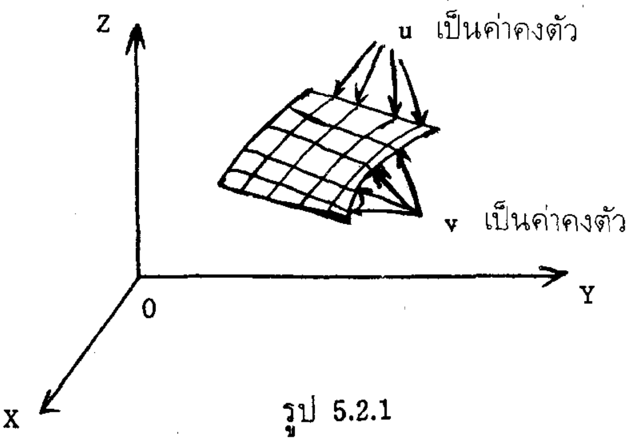
ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันของ $t = \phi(u,v)$ แล้ว สมการ (5.2.1) จะแทนเส้นโค้ง

ถ้า v คงตัว นั่นคือ v = c, c เป็นค่าคงตัว และ u แปรค่า แล้ว สมการ (5.2.1) จะมีตัวแปรเพียงตัวเดียว ซึ่งแทนเส้นโค้ง ดังนั้น สำหรับค่า v 1 ค่า ก็จะได้เส้นโค้ง 1 เส้น เส้นโค้งนี้เรียกว่า line of the coordinate u หรือ u–line หรือ u–curve และ u–lines ทำให้เกิด one–parameter family

ในทำนองเดียวกัน v แปรค่า ในขณะที่ u เป็นค่าคงตัว จะได้ v–lines ซึ่งทำให้เกิด one–parameter family

วงศ์ ทั้ง 2 ทำให้เกิดตะข่าย (net) ของเส้นพิกัด (coordinate lines) และเส้นโค้งพิกัด (coordinate curves) บนผิว ดังรูป 5.2.1

u-lines และ v-lines เรียกว่าเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม (parametric curves)



รูป 5.2.1

ถ้าจุดปลายของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{R}$ ทำให้เกิดผิว S แล้วสมการ (5.2.1)

เขียนได้ใหม่คือ

$$\vec{R}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{i} + z(u,v)\vec{k}$$

นิยาม 5.2.1 ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m $(m \geq 1)$ **ของเซต** S ใน E^3 คือ การส่ง $\vec{R} = \vec{f}(u,v)$ **ของเซต** U **ซึ่งเป็นเซตเปิดใน ระนาบไปบนเซต** S ซึ่ง

1. $\vec{f}$ อยู่ใน ชั้น C^m ใน U

2. ถ้า $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นฐานใน E^3 และ

$$\vec{f}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad \ldots\ldots\ (5.2.2)$$

แล้วสำหรับทุก ๆ (u, v) ที่อยู่ใน U จะได้ว่า

$$\text{ค่าลำดับชั้น (rank)} \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$$

จากสิ่งที่ได้เรียนมาแล้ว จะได้ว่า

1. $\vec{f}$ จะอยู่ใน ชั้น C^m ใน U ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ $\vec{f}$ ซึ่งมีอันดับน้อยกว่าหรือเท่ากับ m มีความต่อเนื่องใน U

2. Jacobains คือ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$$

และ

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

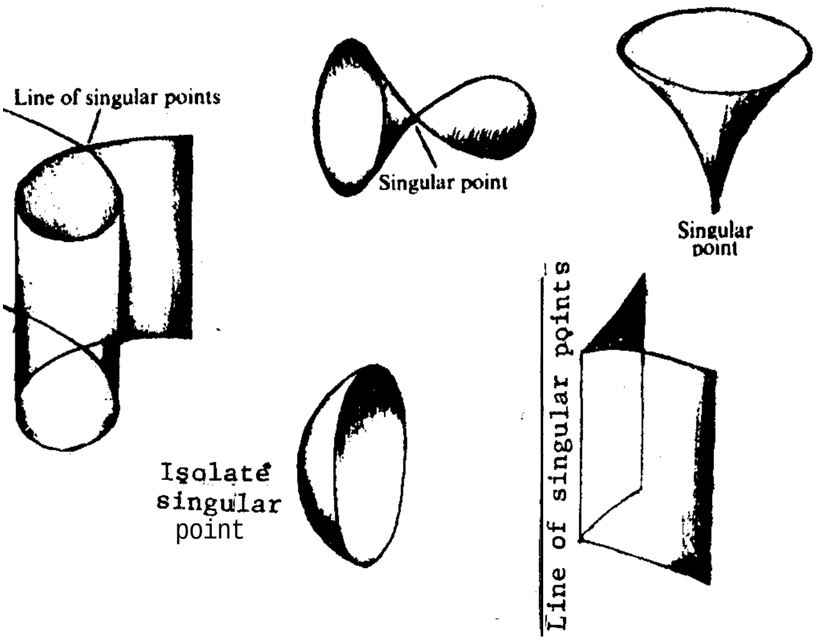
3. ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ คือ อันดับ (Order) ที่ใหญ่ที่สุดของไมเนอร์ (minor) ของเมทริกซ์ ดังนั้น ค่าลำดับชั้น ของ $\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$ ก็ต่อเมื่อจะต้องมี

Jacobains อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ที่ไม่เท่ากับศูนย์

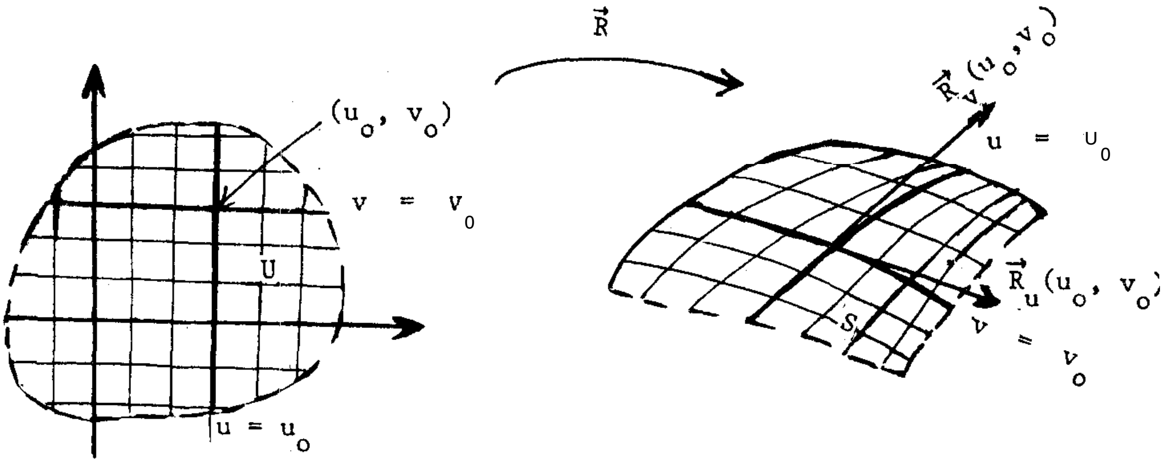
ถ้ามี Jacobains อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ไม่เท่ากับศูนย์แล้วจุดเหล่านี้ เรียกว่า จุดปรกติ (regular points)

แต่ถ้า Jacobains เท่ากับศูนย์หมดทุกตัวแล้ว จุดเหล่านี้ เรียกว่า จุดเอกฐาน

ตัวอย่างที่ 5.2.1 ผิวที่มี จุดเอกฐาน



ให้ $\vec{R} = \vec{R}\ (u, v)$ เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ ของ S ซึ่งกำหนดบน U ดังรูป 5.2.2 จะเห็นว่า ภาพ ของเส้นพิกัด $v = v_o$ ใน U คือเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(u, v_o)$ บน S โดยมี u เป็นตัวแปรเสริม ในทำนองเดียวกัน ภาพของเส้นพิกัด $u = u_o$ คือเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(u_o, v)$ บน S



รูป 5.2.2

$\vec{R}_u = \vec{R}(u_o, v_o)$ คือ อนุพันธ์ของ $\vec{R}$ ที่จุด (u_o, v_o) ในทิศทางของ แกน u ดังนั้น $\vec{R}_u(u_o, v_o)$ คือเวกเตอร์ซึ่งสัมผัสกับ u – parameter curve ที่ $\vec{R}(u_o, v_o)$ ในทิศทางซึ่ง u มีค่าเพิ่มขึ้น ในทำนองเดียวกัน $\vec{R}_v(u_o, v_o)$ คือเวกเตอร์ซึ่งสัมผัสกับ v – parameter curve ที่ $\vec{R}(u_o, v_o)$ ในทิศทางซึ่ง v มีค่าเพิ่มขึ้น

พิจารณา $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ จะได้ว่า

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\vec{k}$$

จะเห็นว่าส่วนประกอบ ของ $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ ต่างกับ Jacobains เพียงเครื่องหมาย

เท่านั้น ดังนั้น ค่าลำดับชั้น ของ Jacobain metrix of $\vec{R}$ เท่ากับ 2 ก็ต่อเมื่อ $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ ดังนั้น $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$ ซึ่งเป็นการส่งของ U ซึ่งเป็นเซตเปิดไป บน S และ $\vec{R}$ จะเป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น $C^m (m \geq 1)$ บน U.
2. $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ ค่า (u, v) ที่อยู่ใน U

ตัวอย่างที่ 5.2.2 $\vec{R} = (u+v)\vec{i} + (u-v)\vec{j} + (u^2+v^2)\vec{k}$

$$\therefore x = u + v \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = u - v \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(1)+(2), \quad x+y = 2u \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(1)-(2), \quad x-y = 2v \ldots\ldots (4)$$

$$(3)^2, \quad 4u^2 = x^2+2xy+y^2 \ldots\ldots\ldots (5)$$

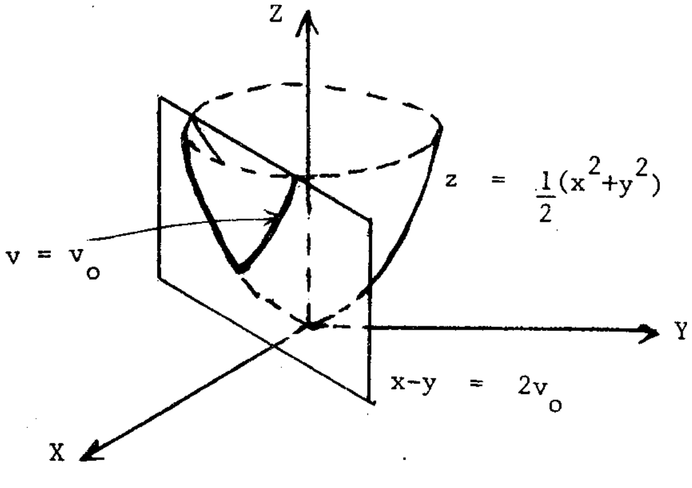
$$(4)^2, \quad 4v^2 = x^2-2xy+y^2 \ldots\ldots (6)$$

$$(5)+(6), \quad 4(u^2+v^2) = 2x^2 + 2y^2$$

$$u^2+v^2 = \frac{1}{7}(x^2+y^2)$$

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ซึ่งคือสมการของ พาราโบลอยด์ เชิงวงรี (elliptic paraboloid) ดังรูป 5.2.3



รูป 5.2.3

$\vec{R}$ มีอนุพันธ์ย่อย ที่มีความต่อเนื่อง (Continuous partial derivative)

ทุก ๆ อันดับ

$$\vec{R}_u = \vec{i} + \vec{j} + 2u\vec{k}$$

$$\vec{R}_v = \vec{i} - \vec{j} + 2v\vec{k}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ I & -1 & 2v \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2v + 2u) - \vec{j}(2v - 2u) + \quad Q - 2)$$

$$|\vec{R}_u \times \vec{R}_v| = \sqrt{4v^2 + 8uv + 4u^2 + 4v^2 - 8uv + 4u^2 + 4}$$

$$= \sqrt{8u^2 + 8v^2 + 4}$$

$$= \sqrt{8(u^2 + v^2) + 4} \neq 0$$

ดังนั้น R เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ ของ พาราโบลอยด์ เชิงวงรี ที่อยู่ในชั้น C^{∞}

พิจารณาเส้นโค้ง $v = v_0$ จะเห็นได้ว่าส่วนประกอบของ $\vec{R}$ คือ

$$x = u + v_o \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

$$y = u - v_o \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

$$(7) - (8), \quad x - y = 2v_o$$

จะเห็นได้ว่าเส้นโค้ง $v = v_0$ หรือ u – parameter curve คือ เส้นที่เกิดจากการตัดกันของ พาราโบลอยด์เชิงวงรี กับ ระนาบ $x - y = 2v_0$

ในทำนองเดียวกัน เส้นโค้ง $u = u_0$ หรือ v – parameter curve คือ เส้นที่เกิดจากการตัดกันของ พาราโบลอยด์เชิงวงรีกับระนาบ $x+y = 2u_o$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.2.3 $\vec{R} = \cos\theta \sin\phi \vec{i} + \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \cos\phi \vec{k}$

$\vec{R}$ กำหนดการส่งของจุดบนระนาบ $\theta\phi$ ไปบนผิวทรงกลมซึ่งมี

รัศมี $= 1$

และ $\vec{R}$ มีอนุพันธ์ย่อยทุก ๆ อันดับ

ข้อสังเกต A ไม่เป็นปรกติ บน เส้นพิกัด

$(\phi = \pm\pi n,\ n = 0,1, \ldots)$

เนื่องจาก

$$\vec{R}_\theta = -\sin\theta \sin\phi \vec{i} + \cos\theta \sin\phi \vec{j}$$

$$\vec{R}_\phi = \cos\theta \cos\phi \vec{i} + \sin\theta \cos\phi \vec{j} - \sin\phi \vec{k}$$

$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-\cos\theta \sin^2\phi) - \vec{j}(\sin\theta \sin^2\phi) + \vec{k}(-\sin^2\theta \sin\phi \cos\phi - \cos^2\theta \sin\phi \cos\phi)$$

$$= -\cos\theta \sin^2\phi \vec{i} - \sin 6 \sin^2\phi \vec{j} - \sin\phi \cos\phi \vec{k}$$

$$|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi| = \sqrt{\cos^2\theta \sin^4\phi + \sin^2\theta \sin^4\phi + \sin^2\phi \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{\sin^2\phi (\sin^2\phi + \cos^2\phi)}$$

$$= |\sin\phi| = 0 \text{ เมื่อ } \phi = \pm\pi n,\ n = 0,1, \ldots$$

แต่ถ้ากำหนดว่า θ อยู่ในช่วงเปิด $(-\infty, \infty)$ และ ϕ อยู่ในช่วงเปิด $(0, \pi)$ แล้ว $\vec{R}$ จะเป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ

ตอบ

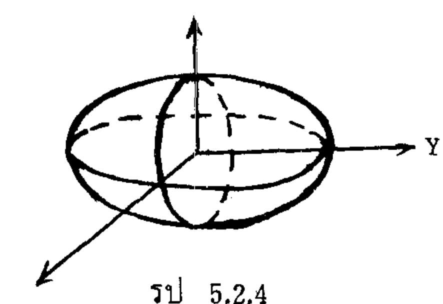
ตัวอย่างที่ 6.2.4 จงแสดงว่า $\vec{R} = a\sin\emptyset\cos\theta\vec{i} + b\sin\emptyset\sin\theta\vec{j} + c\cos\emptyset\vec{k}$ โดยที่ $a,b,c > 0$, $-\infty < \theta < \infty$, $0 < \emptyset < \pi$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^{∞} ของทรงรี (ellipsoid)

ซึ่งมีสมการคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

ดังรูป 5.2.4

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \sin^2\emptyset\cos^2\theta + \sin^2\emptyset\sin^2\theta + \cos^2\emptyset$$



รูป 5.2.4

$$= \sin^2\emptyset(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\emptyset$$

$$= \sin^2\emptyset + \cos^2\emptyset$$

$$= 1$$

และ $\vec{R}_\theta = -a\sin\emptyset\sin\theta\vec{i} + b\sin\emptyset\cos\theta\vec{j}$

$\vec{R}_\emptyset = a\cos\emptyset\cos\theta\vec{i} + b\cos\emptyset\sin\theta\vec{j} - c\sin\emptyset\vec{k}$

$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\emptyset = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\emptyset\sin\theta & b\sin\emptyset\cos\theta & 0 \\ a\cos\emptyset\cos\theta & b\cos\emptyset\sin\theta & -c\sin\emptyset \end{bmatrix}$$

$$= \vec{i}(-bc\sin^2\emptyset\cos\theta) - \vec{j}(ac\sin^2\emptyset\sin\theta) + \vec{k}(-ab\sin\emptyset\cos\emptyset\sin^2\theta - ab\sin\emptyset\cos\emptyset\cos^2\theta)$$

$$= -bc\sin^2\emptyset\cos\theta\vec{i} - ac\sin^2\emptyset\sin\theta\vec{j} - ab\sin\emptyset\cos\emptyset(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\vec{k}$$

$$= \sin\emptyset(-bc\sin\emptyset\cos\theta\vec{i} - ac\sin\emptyset\sin\theta\vec{j} - ab\cos\emptyset\vec{k})$$

$$|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi| = |\sin\phi| [b^2c^2\sin^2\phi\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\phi\sin^2\theta + a^2b^2\cos^2\phi]^{1/2}$$

$$= |\sin\phi| [c^2\sin^2\phi(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) + a^2b^2\cos^2\phi]^{1/2}$$

ให้ $0 < a \leq b \leq c$ แล้ว

$$|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi| \geq |\sin\theta| [a^2\sin^2\phi(a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) + a^4\cos^2\phi]^{1/2}$$

$$= |\sin\theta| [a^4\sin^2\phi + a^4\cos^2\phi]^{1/2}$$

$$= |\sin\phi| [a^4(\sin^2\phi + \cos^2\phi)]^{1/2}$$

$$= |\sin\phi| a^2 \neq 0$$

สำหรับ $0 < \phi < \pi$

และ $\vec{R}$ อยู่ ในชั้น C^∞

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^∞ ของทรงรี ซึ่งมีสมการ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ **ตอบ**

หมายเหตุ สมการ $x = a\cos u \cos v$

$y = b\cos u \sin v$

$z = c\sin u$

ก็เป็นทรงรี

ตัวอย่างที่ 5.2.5

1. ระนาบ ให้แกน Z ตั้งฉากกับระนาบและจุดกำเนิดอยู่บนระนาบ สามารถแทนระนาบด้วย สมการอิงตัวแปรเสริม คือ

$x = u, \quad y = v, \quad z = 0$

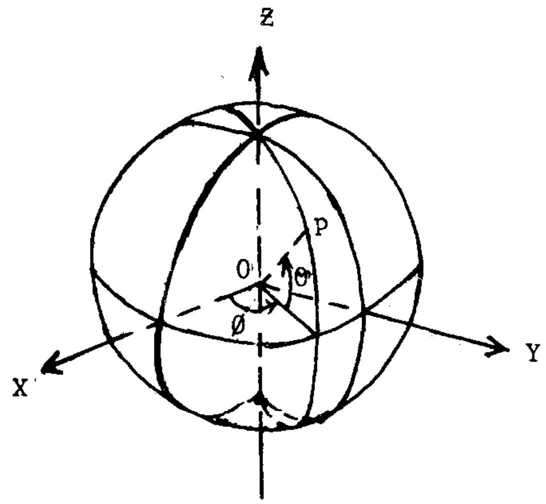
หรือ

$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = 0$

เมื่อ ρ, θ เป็น โพลาร์ พิกัดเชิงขั้ว ในระนาบ

ตัวแทน นี้ไม่เป็น ปรกติ ที่จุดกำเนิดที่ซึ่งสมนัยกับ $\rho = 0$ และ θ เป็นค่าใด ๆ

2. The spherical coordinates on the sphere ดูรูป 5.2.5



รูป 5.2.5

ตำแหน่งของจุด P บนผิวทรงกลมซึ่งมีสมการคือ

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ สามารถกำหนดโดย $\emptyset$ และ θ โดยที่ $\emptyset$ คือ ลองจิจูด (longitude) และ θ คือ ละติจูด (latitude)

จุด (0,0,1) และ (0,0,-1) เรียกว่า ขั้ว (poles) ซึ่งสมนัยกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ตามลำดับ และ $\emptyset$ เป็นค่าใด ๆ

ตัวแทนอิงตัวแปรเสริม ของ ผิวทรงกลม คือ

$$x = a\cos\theta\cos\emptyset, \quad y = a\cos\theta\sin 0, \quad z = a\sin\theta \ldots (5.2.3)$$

หรือ $\vec{R} = a\cos\theta\cos\emptyset\vec{i} + a\cos\theta\sin\emptyset\vec{j} + a\sin\theta\vec{k}$

$$\vec{R}_\theta = -a\sin\theta\cos\emptyset\vec{i} - a\sin\theta\sin\emptyset\vec{j} + a\cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{R}_0 = -a\cos\theta\sin\emptyset\vec{i} + a\cos\theta\cos\emptyset\vec{j}$$

$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi & a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\phi & a\cos\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-a^2\cos^2\theta\cos\phi) - \vec{j}(-a^2\cos^2\theta\sin\phi)$$

$$+\vec{k}(-a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi - a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi)$$

$$= -a^2\cos^2\theta\cos\phi\,\vec{i} + a^2\cos^2\theta\sin\phi\,\vec{j} - a^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{k}$$

$\left|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi\right| \neq 0$ ยกเว้น ที่ ขั้ว ซึ่งมี $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น สมการ (5.2.3) เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ

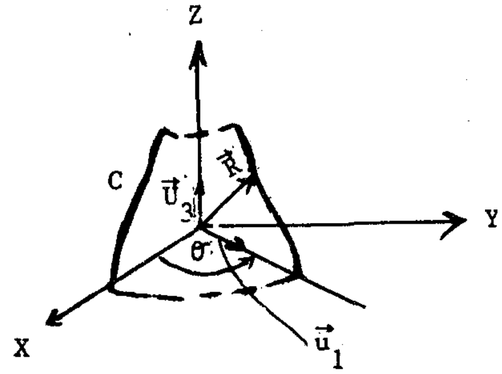
เส้น ϕ = ค่าคงตัว เรียกว่า เส้นเมริเดียน (meridians)

และเส้น θ = ค่าคงตัว เรียกว่า วงกลมของละติจูด (circles of latitude)

วงกลมซึ่ง $\theta = 0$ เรียกว่า เส้นศูนย์สูตร (equator) ซึ่งเป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุดในบรรดาวงกลมของละติจูด

3. Surfaces of revolution ดูรูป 5.2.6

surface of revolution (S) ได้จากการหมุนเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นเส้นโค้งในระนาบ รอบเส้นตรง L ซึ่งอยู่บนระนาบเดียวกันเรียก C ว่า profile curve และเรียก L ว่า แกน ของ S รอยตัดของ surface of revolution กับระนาบที่ผ่านแกน เรียกว่า เส้นเมริเดียน วงกลมซึ่งถูกก่อกำเนิด (generated) โดยแต่ละจุดบน C เรียกว่า เส้นขนานของ S (parallels of S)



รูป5.2.6

ถ้า $x = f(t),\ z = g(t),\ a < t < b$ เป็นเส้นโค้งปรกติของชั้น C^m ในระนาบ XZ และ $f > 0$ แล้ว จงแสดงว่า

$$a = f(t)\cos\theta\vec{i} + f(t)\sin\theta\vec{j} + g(t)\vec{k}, \quad -\infty < \theta < \infty$$

เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m ของผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้ง C รอบแกน Z และจงแสดงว่า t – parameter curves (เส้นเมริเดียน) และ θ – parameter curves (เส้นขนาน) ตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน

วิธีทำ ให้ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, เป็นฐานซึ่งได้จากการหมุน $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ไปเป็นมุม θ รอบแกน z ดังรูป 5.2.6

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง ของจุดบน profile curve ซึ่งมีสมการ คือ $x = f(t)$, $z = g(t)$ เมื่อมันอยู่บนระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{u}_1$ และ $\vec{u}_3$ คือ

$$\vec{R} = f(t)\vec{u}_1 + g(t)\vec{u}_3$$

แต่ $\vec{u}_1 = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$

และ $\vec{u}_3 = \vec{k}$

ดังนั้น $\vec{R} = f(t)\left[\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right] + g(t)\vec{k}$

$$= f(t)\cos\theta\vec{i} + f(t)\sin\theta\vec{j} + g(t)\vec{k} \quad \ldots\ldots(5.2.4)$$

เนื่องจาก f และ g อยู่ใน ชั้น C^m ดังนั้น $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น C^m และ

$$\vec{R}_t = f'\cos\theta\vec{i} + f'\sin\theta\vec{j} + g'\vec{k}$$

$$\vec{R}_\theta = -f\sin\theta\vec{i} + f\cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{R}_t \times \vec{R}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'\cos\theta & f'\sin b & g' \\ -f\sin\theta & f\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-g'f\cos\theta) - \vec{j}(g'f\sin\theta) + \vec{k}(f'f\cos^2\theta + f'f\sin^2\theta)$$

$$= -g'f\cos\theta\vec{i} - g'f\sin\theta\vec{j} + f'f\vec{k}$$

$$\left|\vec{R}_t \times \vec{R}_\theta\right| = \sqrt{(g')^2 f^2\cos^2\theta + (g')^2 f^2\sin^2\theta + (f'f)^2}$$

$$= f\sqrt{(g')^2 + (f')^2} \neq 0$$

เนื่องจาก $f > o$ และ $x = f(t)$, $z = g(t)$ เป็น ปรกติ ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น ปรกติ และ อยู่ใน ชั้น C^m

$$\vec{R}_t \cdot \vec{R}_\theta = -f'f \sin\theta\cos\theta + f'f \sin\theta\cos\theta$$
$$= 0$$

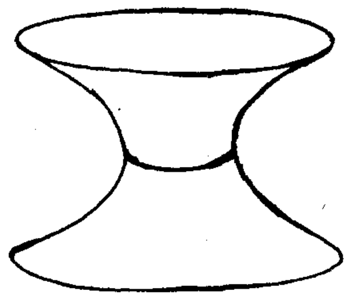
แสดงว่า $\vec{R}_t$ ตั้งฉากกับ $\vec{R}_\theta$

ดังนั้น เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม t (t – parameter curves) และ เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม θ (θ – parameter curves) ตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน

ตอบ

4. ผิวทรงกลมเป็นกรณีพิเศษของ surface of revolution

5. **The oatenoid** ดูรูป 5.2.7



รูป 5.2.7

surface of revolution ซึ่งได้จากการหมุนของ แคทีนารี รอบเส้นไดเรกตริกซ์ ของมัน (เส้นไดเรกตริกซ์ของแคทีนารี ซึ่งมีสมการ คือ

$y = a \cosh(x/a)$ คือ แกน X) เรียกว่า catenoid พิจารณาในกรณีที่ แกน z เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ จะได้ว่า

$$r = a \cosh(z/a)$$

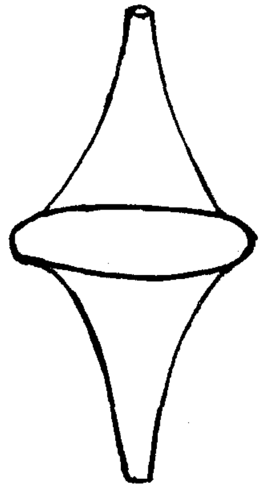
ให้ $z = u$ และจากสมการ (5.2.4) จะได้ ตัวแทนอิงตัวแปรเสริม ของ catenoid คือ

$$x = a \cosh \frac{u}{a} \cos v$$

$$y = a \cosh \frac{u}{a} \sin v$$

$$z = u$$

6. The pseudosphere ดูรูป 5.2.8



รูป 5.2.8

pseudosphere คือ surface of revolution ที่ได้จากการหมุน โค้งจอมแห รอบเส้นกำกับ สมการอิงตัวแปรเสริมของ pseudosphere คือ

$$x = a \sin u \cos v$$

$$y = a \sin u \sin v$$

$$z = a\left(\cos u + \ln \tan \frac{u}{2}\right)$$

7. **พื้นผิวบรรทัด** (Ruled surface) เป็นผิวที่ถูกก่อกำเนิดโดยวงศ์ของเส้น (family of lines) ตำแหน่งต่าง ๆ (various positions) ของ generating lines เรียกว่า rulings ของผิว

ให้ $\vec{r} = \vec{r}(u)$ เป็นเส้นโค้งปรกติ ที่อยู่ใน ~~ที่อยู่ใน~~ ชั้น C^m และ ให้ $\vec{g}(u) \neq \vec{0}$ อยู่ใน ชั้น C^m และ $\vec{g}(u)$ อยู่บน $\vec{r} = \vec{r}(u)$ จะได้ว่า

$$\vec{R} = \vec{r}(u) + v\vec{g}(u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.2.5)$$

จงแสดงว่า $\vec{R}$ เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ ของ ระนาบบรรทัดของชั้น C^m โดยกำหนดว่า $\vec{r}$ และ $\vec{g}$ อยู่ใน ชั้น C^m และ $(\vec{r}' \times v\vec{g}') \times \vec{g} \neq \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ (u,v)

$\vec{R}$ ในสมการ (5.2.5) เรียกว่า ruled form

เส้นโค้ง $\vec{r} = \vec{r}(t)$ เรียกว่า base curve ของ $\vec{R}$

วิธีทำ ดังรูป 5.2.9 จุดที่อยู่บนผิวคือ

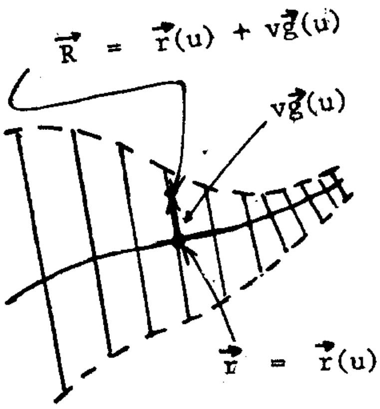
$$\vec{R} = \vec{r}(u) + v\vec{g}(u)$$

เมื่อ v เป็นตัวแปรเสริมของ rulings

เนื่องจาก $\vec{r}$ และ $\vec{g}$ อยู่ใน ชั้น C^m

ดังนั้น $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น C^m

และเนื่องจาก



รูป 5.2.9

$$\vec{R}_u = \frac{d\vec{r}}{dt} + v\,\frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$= \vec{r}' + v\vec{g}'$$

$$\vec{R}_v = \vec{g}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = (\vec{r}' + v\vec{g}') \times \vec{g}$$

จากสิ่งที่กำหนดให้จะได้ว่า

$$(\vec{r}' + v\vec{g}') \times \vec{g} \neq \vec{0}$$

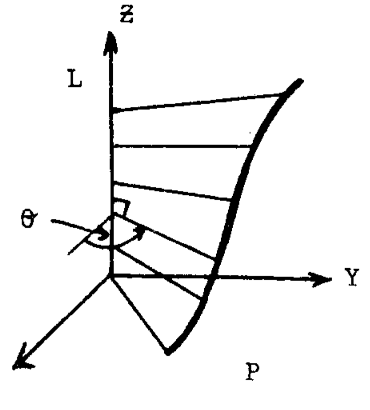
ดังนั้น $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ **ตอบ**

8. **Right conoid** คือ ระนาบบรรทัด ซึ่งมี rulings ขนานกับ ระนาบ P และผ่านเส้นตรง L โดยที่เส้นตรง L ตั้งฉากกับระนาบ P เรียกเส้นตรง L ว่า แกนของ conoid ถ้า L คือ แกน Z ดังรูป 5.2.10 จงแสดงว่า ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของ conoid คือ

$$\vec{R} = v\cos\theta(u)\vec{i} + v\sin\theta(u)\vec{j} + u\vec{k}$$

เมื่อ $\theta(u)$ เป็นมุมที่ ruling ทำกับ ระนาบ X Z จงแสดงว่า $\vec{R}$ เป็นตัวแทนปรกติ ที่อยู่ใน ชั้น C^m เมื่อกำหนดให้ $\theta(u)$ อยู่ใน ชั้น C^m



รูป 5.2.10

วิธีทำ ให้แกน z คือ base curve สำหรับผิวนี้และ มีสมการ คือ

$$\vec{r} = u\vec{k}$$

เนื่องจาก rulings ขนานกับระนาบ XY, เวกเตอร์หน่วย ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ rulings & เป็นฟังก์ชันของ u สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\vec{g} = \cos\theta(u)\vec{i} + \sin\theta(u)\vec{j}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{r} + v\vec{g}\\ &= u\vec{k} + v(\cos\theta(u)\vec{i} + \sin\theta(u)\vec{j})\\ &= v\cos\theta(u)\vec{i} + v\sin\theta(u)\vec{j} + u\vec{k}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\vec{R}$ เป็นตัวแทนของ ผิว คือ ruled form

เนื่องจาก

$$\vec{R}_u = -v\theta'\sin\theta(u)\vec{i} + v\theta'\cos\theta(u)\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{R}_v = \cos\theta(u)\vec{i} + \sin\theta(u)\vec{j}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\theta' \sin\theta(u) & v\theta' \cos\theta(u) & 1 \\ \cos\theta(u) & \sin\theta(u) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-\sin \theta(u)) - \vec{j}(-\cos \theta(u)) + \vec{k}(-v\theta' \sin^2\theta(u) - v\theta' \cos^2\theta(u))$$

$$= -\sin \theta(u)\vec{i} + \cos \theta(u)\vec{j} - v\theta'\vec{k}$$

$$|\vec{R}_u \times \vec{R}_v| = \sqrt{\sin^2\theta(u) + \cos^2\theta(u) + v^2(\theta')^2}$$

$$= \sqrt{1 + v^2(\theta')^2}$$

$$\neq 0 \quad \text{สำหรับทุก ๆ } (v,\theta)$$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น ตัวแทนปรกติของชั้น C^m เมื่อกำหนดให้ $\theta(u)$ อยู่ใน ชั้น C^m

ข้อสังเกต ถ้า $\theta' \neq 0$ แล้ว $\theta(u)$ จะมี ตัวผกผัน และ ผิวนี้จะมี ตัวแทน ที่อยู่ในรูป

$$\vec{R} = v\cos \theta\vec{i} + v\sin \theta\vec{j} + u(\theta)\vec{k}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5.2.6 จงแสดงว่า ไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ (hyperbolic paraboloid) ซึ่งมี สมการคือ $z = x^2-y^2$ เป็น doubly ruled surface นั่นคือ ผิวนี้สามารถถูกก่อกำเนิดโดย วงศ์ของเส้น ที่แตกต่างกัน 2 ชุด จงหา parametric representation of the surface in ruled form representing both rulings

วิธีทำ จาก $z = x^2-y^2$

$$z = (x+y)(x-y)$$

ดังนั้นผิวนี้ตัดกับระนาบ $x-y = u_o$ เป็นเส้นตรงซึ่งกำหนดโดย

$x-y = u_o$ และ $z = u_o(x+y)$

ดังนั้น ให้ $x-y = u$ ...... (1)

$x+y = v$ ..... (2)

(1)+(2) $2x = u+v$

$x = \frac{1}{2}(u+v)$

(2)−(1) $2y = v-u$

$y = \frac{1}{2}(v-u)$

และ $z = uv$

จะได้ตัวแทนคือ

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(u+v)\vec{i} + \frac{1}{2}(v-u)\vec{j} + uv\vec{k}$$

ซึ่ง u− parameter curves (v เป็นค่าคงตัว) และ v−parameter curves (u เป็นค่าคงตัว) คือเส้นตรง

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลอยด์ เป็น doubly ruled surface

เมื่อเขียน $\vec{R}$ เสียใหม่จะได้ว่า

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{2}u\vec{i} + \frac{1}{2}u\vec{j}\right) + v\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + u\vec{k}\right)$$

$$= \vec{r}(u) + v\vec{g}(u)$$

ซึ่งจะให้ representation in ruled form เมื่อ $\vec{r} = \frac{1}{2}u\vec{i} + \frac{1}{2}u\vec{j}$, u−parameter curve $v = o$ คือ base curve และ $\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + u\vec{k}$ มีทิศทางเดียวกับ v−parameter curve ที่ u

ในทำนองเดียวกัน

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{2}v\vec{i} - \frac{1}{2}v\vec{j}\right) + u\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + v\vec{k}\right)$$

คือ representation in ruled form ซึ่ง $y = \frac{1}{2}v\vec{i} - \frac{1}{2}v\vec{j}$, v−parameter curve $u = o$ คือ base curve และ $\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + v\vec{k}$ มีทิศทางเดียวกับ u–parameter curve ที่ v

ตอบ

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงแสดงว่า $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m ถ้า $f(u,v)$ อยู่ใน ชั้น C^m

2. จงแสดงว่า $\vec{R} = \frac{1}{2}(u+v)\vec{i} + \frac{1}{2}(u-v)\vec{j} + uv\vec{k}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^∞ ของ ไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ ซึ่งมีสมการคือ $z = x^2-y^2$

3. จงแสดงว่าผิวซึ่งมีสมการเป็น

$$x = u+v\ ,\quad y = u-v\ ,\quad z = 4u^2$$

คือพาราโบลิค ไซลินเดอร์ ซึ่งมีสมการเป็น $z = (x+y)^2$

จงพิจารณาว่า $\vec{R}$ ต่อไปนี้เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ หรือไม่

4. $\vec{R} = u^2\vec{i} + v^2\vec{j} + uv\vec{k}$

5. $\vec{R} = \cos u \cos v\vec{i} + \cos u \sin v\vec{j} + \sin u\vec{k}$

โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ และ $-\pi < v < \pi$

6. $\vec{R} = (2+\cos u)\cos v\vec{i} + (2+\cos u)\sin v\vec{j} + \sin u\vec{k}$

โดยที่ $-\pi < u < \pi$ และ $-\pi < v < \pi$

7. $\vec{R} = (r-s)\vec{i} + (r+s)\vec{j} + 2(r^2+s^2)\vec{k}$

โดยที่ $-\infty < r < \infty$ และ $-\infty < s < \infty$

8. $\vec{R} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + (u+v)\vec{k}$

โดยที่ $0 < u$, $0 < v < 2\pi$

9. $\vec{R} = \sin\phi\cos\theta\vec{i} + 2\sin\phi\sin\theta\vec{j} + 3\cos\phi\vec{k}$

โดยที่ $-\pi < \theta < \pi$, $0 < \phi < \pi$

10. $\vec{R} = \sqrt{1-u^2}\cos v\vec{i} + \sqrt{1-u^2}\sin v\vec{j} + u\vec{k}$

โดยที่ $-1 < u < 1$ และ $-\pi < v < \pi$

11. $\vec{R} = (\cos u - (u+v)\sin v)\vec{i} + (\sin u + (u+v)\cos v)\vec{j} + (u+2v)\vec{k}$

โดยที่ $-\infty < u < \infty$ และ $-\infty < v < \infty$

12. $\vec{R} = \frac{1}{2}a(u+v)\vec{i} + \frac{1}{2}b(u-v)\vec{j} + \frac{1}{2}uv\vec{k}$

โดยที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$

5.3 Coordinate patches

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m ของ S ซึ่งกำหนดบนเซต U ดังรูป 5.3.1 และให้ $\theta = \theta(u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ เป็นการส่งของชั้น C^m ของ U ไปยังระนาบ $\theta\phi$ ซึ่ง Jacobian $\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)} \neq 0$

โดยทั่ว ๆ ไป การส่ง $\theta = \theta(u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง อย่างไรก็ตาม จากทฤษฎีบทของ ฟังก์ชันผกผัน จะได้ว่า สำหรับ (u_o,v_o) ใน U จะมี W (เซตเปิด) ซึ่งประกอบด้วย (u_o,v_o) ซึ่ง $\theta = \theta((u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ ส่ง W แบบ หนึ่งต่อหนึ่ง ไปบน W^* (เซตเปิด) และ ตัวผกผัน คือ $u = u(\theta,\phi)$, $v = v(\theta,\phi)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนเซต W^*

พิจารณา $\vec{R} = \vec{R}^*(\theta,\phi)$ ซึ่งเป็นการส่งประกอบ (Composite mapping) และ

$$\vec{R} = \vec{R}^*(\theta,\phi)$$

$$= \vec{R}(u(\theta,\phi) \;,\; v(\theta,\phi))$$ ของ W^* ไปยัง S

จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า $\vec{R}^*(\theta,\phi)$ อยู่ใน ชั้น C^m และ

$$\vec{R}^*_\theta = \vec{R}_u u_\theta + \vec{R}_v v_\theta$$

$$\vec{R}^*_\phi = \vec{R}_u u_\phi + \vec{R}_v v_\phi$$

$$\vec{R}^*_\theta \times \vec{R}^*_\phi = (\vec{R}_u u_\theta + \vec{R}_v v_\theta) \times (\vec{R}_u u_\phi + \vec{R}_v v_\phi)$$

$$= (\vec{R}_u \times \vec{R}_v)(u_\theta v_\phi - v_\theta u_\phi)$$

$$= (\vec{R}_u \times \vec{R}_v)\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)} \neq \vec{0}$$

เนื่องจาก $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ และ Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)} = \left[\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}\right]^{-1} \neq 0$

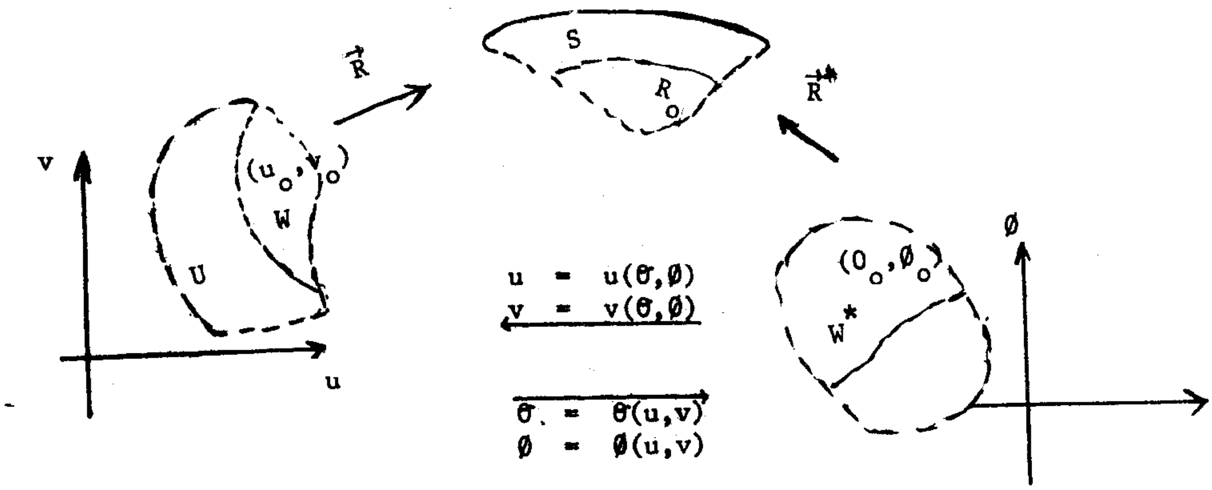
ดังนั้น $\vec{R} = \vec{R}^*(\theta,\phi)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m แต่จะเป็นจริงเพียงบางส่วน ของ S เท่านั้น ดังนั้น จึงกำหนด coordinate patch โดยที่ coordinate patch of class C^m $(m \geq 1)$ ใน S คือ การส่ง $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ ของ U (เซตเปิด) ไปยัง S ซึ่ง

1. $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น C^m บนเซต U

2. $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ (u,v) ในเซต U

3. $\vec{R}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ bicontinuous บน U

ดังนั้น coordinate patch คือ regular parametric representation of a part of S, which is 1 − 1 and bicontinuous



รูป 5.3.1

ตัวอย่างที่ 5.3.1 $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1-(u^2+v^2)}\,\vec{k}$, $u^2+v^2 < 1$

defines a mapping of the unit disk $u^2 + v^2 < 1$

onto the upper hemisphere of the unit sphere $|\vec{R}| = 1$

จะเห็นว่า $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น C^∞ และ

$$\vec{R}_u = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{k}$$

$$\vec{R}_v = \vec{j} - \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{k}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\right) - \vec{j}\left(\frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\right) + \vec{k}(1)$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{R}_u \times \vec{R}_v| = \left(\frac{u^2}{1-(u^2+v^2)} + \frac{v^2}{1-(u^2+v^2)} + 1\right)^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{u^2+v^2+1-(u^2+v^2)}{1-(u^2+v^2)}\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{1-(u^2+v^2)\right\}^{-1/2}$$

$\neq 0$ สำหรับทุก ๆ (u,v)

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของกึ่งทรงกลมของชั้น C^∞ (regular parametric representation of the hemispher of class C^∞)

เนื่องจาก $\vec{R}(u,v) = \vec{R}(u', v')$ และ $x = u$, $y = v$

จะได้ว่า $(u,v) = (u', v')$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

และเนื่องจาก $\vec{R}$ มีความต่อเนื่อง และ การส่งผกผัน ซึ่งคือ

$u = x$, $v=y$ มีความต่อเนื่อง

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น bicontinuous

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น coordinate patch of class C^∞ on the sphere

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงแสดงว่า $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$ เป็น coordinate patch of class C^m

ถ้า $f(u,v)$ อยู่ในชั้น C^m

วิธีทำ จากข้อ 1 ของแบบฝึกหัด 5.2 **จะได้ว่า**

$\vec{R}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m

สิ่งที่ต้องแสดงคือ แสดงว่า $\vec{R}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและตัวผกผัน มีความต่อเนื่อง

เนื่องจาก $x = u$, $y = v$ และ

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}(u', v')$$

จะได้ว่า $u = u'$ และ $v = v'$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

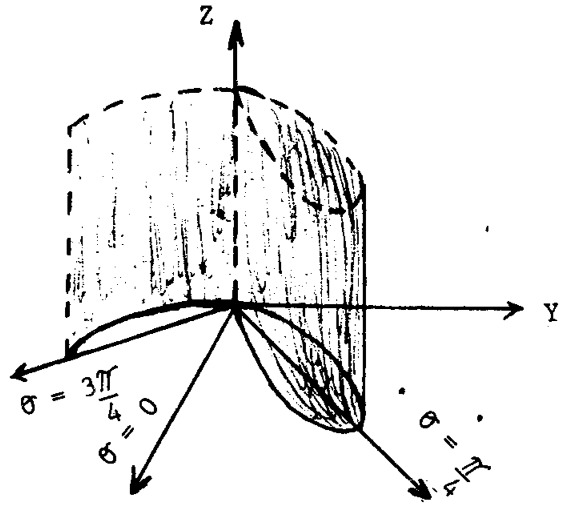
การส่งผกผัน คือ $u = x$, $v = y$ ซึ่ง มีความต่อเนื่อง

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็น coordinate patch of class C^m

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.3.3 พิจารณาทรงกระบอก ซึ่ง ถูกก่อกำเนิด โดยเส้นในแนวดิ่ง ซึ่งเคลื่อนไปตามเส้นโค้งในระนาบ XY โดยที่เส้นโค้งนี้มีสมการอยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว คือ

$r = \sin 2\theta$ สำหรับ θ ที่อยู่ในช่วง $(0, \frac{3\pi}{4})$ ดังรูป 5.3.2



รูป 5.3.2

ขอให้สังเกตว่าทรงกระบอกนี้ไม่ตัดกันเอง ยกเว้นจุดปลายที่มี $\theta = 0$

$$\vec{R} = \sin 2\theta \cos \theta \vec{i} + \sin 2\theta \sin \theta \vec{j} + u\vec{k},$$

$(0 \angle \theta \angle \frac{3\pi}{4}, -\infty \angle u \angle \infty)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของทรงกระบอก ที่อยู่ใน ชั้น C^∞

เนื่องจาก

$$\vec{R}_\theta = (-\sin 2\theta \sin \theta + 2\cos 2\theta \cos \theta)\vec{i} + (\sin 2\theta \cos \theta + 2 \cos 2\theta \sin \theta)\vec{j}$$

$$\vec{R}_u = \vec{k}$$

$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin 2\theta \sin\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta & \sin 2\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(\sin 2\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta\sin\theta) - \vec{j}(-\sin 2\theta\sin\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta) + \vec{k}(0)$$

$$= (\sin 2\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta\sin\theta)\vec{i} + (\sin 2\theta\sin\theta - 2\cos 2\theta\cos\theta)\vec{j}$$

$$|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_u| = (\sin^2 2\theta\cos^2\theta + 4\sin 2\theta\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2 2\theta\sin^2\theta + \sin^2 2\theta\sin^2\theta + 4\cos^2 2\theta\cos^2\theta - 4\sin 2\theta\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta)^{1/2}$$

$= (\sin^2 2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 4\cos^2 2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta))^{1/2}$

$= (\sin^2 2\theta + 4\cos^2 2\theta)^{1/2} \neq 0$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของทรงกระบอกที่อยู่ในชั้น C^{∞}

เนื่องจาก ถ้า $\vec{R}(\theta,u) = \vec{R}(\theta',u')$ และ $x = \theta$, $y = u$

แล้ว $\theta = \theta'$ และ $u = u'$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

$\vec{R}$ มีความต่อเนื่อง แต่ตัวผกผัน ไม่มีความต่อเนื่อง เนื่องจากย่าน (neighborhood) ใด ๆ ของจุดบนแกน z นั่นคือเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะรวมจุดของทรงกระบอกที่อยู่ใกล้ขอบ (edge), $\theta = 0$

ดังนั้น $\vec{R}$ ไม่เป็น coordinate patch บนทรงกระบอก The restriction of $\vec{R}$ to

a. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\infty \angle u \angle \infty$ and

b. $\frac{\pi}{4} \angle \theta \angle \frac{3\pi}{4}$, $-\infty \angle u \angle \infty$

defines two coordinate patches which cover the cylinder **ตอบ**

ในตัวอย่างที่ 5.3.2 ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า

$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{k}$

หรือ

$\vec{R} = u\vec{i} + f(u,v)\vec{j} + v\vec{k}$

หรือ

$\vec{R} = f(u,v)\vec{i} + u\vec{j} + v\vec{k}$

จะกำหนด coordinate patches of class C^m ถ้า $f(v,u)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในชั้น C^m patches เหล่านี้ เรียกว่า Monge patches และมีประโยชน์มากในการศึกษาเรื่องผิว

จะพิสูจน์ว่าถ้า เซต S สามารถถูกแทนด้วยตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m แล้วสำหรับทุก P_0 ที่อยู่ใน S จะมี Monge patch of class C^m ใน S ที่ประกอบด้วย P_0

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของชั้น C^m ของ S ถูกกำหนดบน U และจุด (u_0,v_0) เป็นจุดใน U ซึ่งส่งไปยัง P_0 ดังรูป 5.3.3

เนื่องจาก $\vec{R}(u,v)$ เป็นปรกติ ดังนั้นจะมี Jacobains อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่จุด (u_0, v_0)

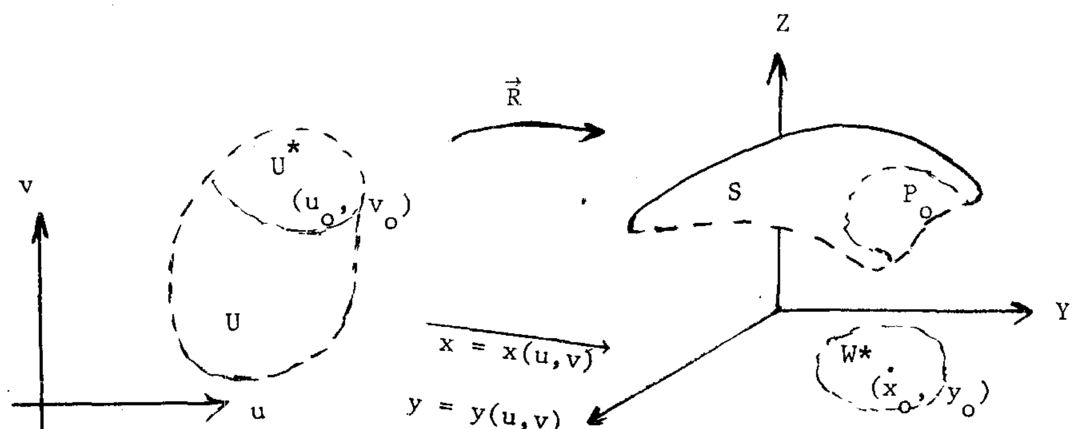
$$\text{และ} \quad \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{ที่จุด} \quad (u_o, v_o)$$

พิจารณาการส่ง $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ของ U ไปยังระนาบ XY ซึ่งกำหนดโดยส่วนประกอบ 2 ตัวแรก ของ $\vec{R}$

จะเห็นได้ชัดว่าการส่ง นี้อยู่ใน ชั้น C^m บน U เนื่องจาก $\vec{R}$ อยู่ในชั้น C^m บน U

และเนื่องจาก $\vec{R}$ มีความต่อเนื่อง และไม่เท่ากับศูนย์ที่จุด (u_0, v_0) ดังนั้น Jacobian จะไม่เท่ากับศูนย์ในบางย่านของ (u_0, v_0)

แต่จากทฤษฎีบทของ ฟังก์ชันผกผัน จะมีเซต W (เซตเปิด) ใน U ซึ่งประกอบด้วยจุด (u_o, v_o) โดยที่ การส่ง นี้เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง และมี ตัวผกผัน คือ $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ซึ่งอยู่ในชั้น C^m บนเซต W^* (เซตเปิด) ในระนาบ XY แต่ การส่งประกอบ ของ W^* ไปยัง S



รูป 5.3.3

$$\vec{R} = x(u(x,y),\ v(x,y))\vec{i} + y(u(x,y),\ v(x,y))\vec{j} + z(u(x,y),\ v(x,y))\vec{k}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z(u(x,y),\ v(x,y))\vec{k}$$

is a Monge patch of class C^m in S defined on W^* whose image contains P_0

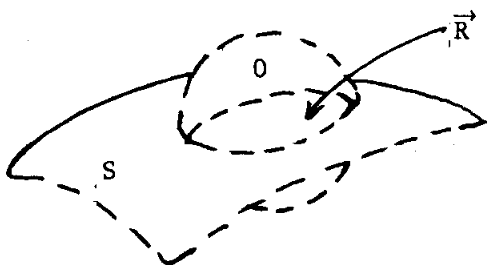
ทฤษฎีบทที่ 5.3.1 ถ้าเซต S อยู่ใน E^3 มี ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ อยู่ใน ชั้น C^m แล้วทุก ๆ จุด P ใน S จะมี Monge patch of class C^m ที่อยู่ใน S ซึ่งประกอบด้วย P.

5.4 พื้นผิวเชิงเดียว (Simple surface)

นิยาม 5.4.1 ให้ S เป็นเซตของจุดใน E^3 จะมี B ซึ่งเป็นการรวบรวม (collection) ของ coordinate patches of class C^m ($m \geq 1$) บน S ซึ่งคล้องตาม

1. B ปกคลุม (covers) S นั่นคือ สำหรับ P ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ใน S จะมี coordinate patch $\vec{R} = \vec{R}(u,\ v)$ ใน B ซึ่งประกอบด้วย P
2. ทุก ๆ coordinate patch $\vec{R} = \vec{R}$ (u, v) ใน B เป็น การตัดกันของ O ซึ่งเป็นเซตเปิด ใน E^3 กับ S ดังรูป 5.4.1

แล้ว S พร้อมด้วย coordinate patches of class C^m ใน S คือพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^m (simple surface of class C^m) ใน E^3



รูป 5.4.1

เซตของ patches B บน S ซึ่งคล้องตามข้อ 1 และข้อ 2 ของนิยาม 5.4.1 เรียกว่า มูลฐาน หรือ coordinate patch representation ของ S

ดังนั้น ถ้า สามารถหา มูลฐานของชั้น C^m สำหรับเซตของ จุดใน S ใน E^3 แล้ว S พร้อมด้วย เซตของ patches ทั้งหมดในชั้น C^m บน S คือพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^m

เนื่องจาก พังก์ชันที่อยู่ใน ชั้น C^m จะอยู่ใน ชั้น C^j ด้วยสำหรับ $j \leq m$, มูลฐานที่อยู่ในชั้น C^m จะเป็นมูลฐานที่อยู่ในชั้น C^j ด้วย, $j \leq m$ ดังนั้น พื้นผิวเชิงเดียว ที่อยู่ใน ชั้น C^m สามารถขยายออกไปเป็น พื้นผิวเชิงเดียว ที่อยู่ใน ชั้น C^j, $j \leq m$

ตัวอย่างที่ 5.4.1 กึ่งทรงกลมบน (upper hemisphere) (ไม่รวมเส้นศูนย์สูตร) ของทรงกลม ซึ่งมีสมการคือ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

เป็นพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^∞ เนื่องจาก สามารถให้มูลฐานเป็น Monge patch of class C^∞ ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,\vec{k}, \quad x^2 + y^2 < 1$$

ซึ่งปกคลุมกึ่งทรงกลม และคือการตัดกันของ กึ่งทรงกลม และ E^3

ตอบ

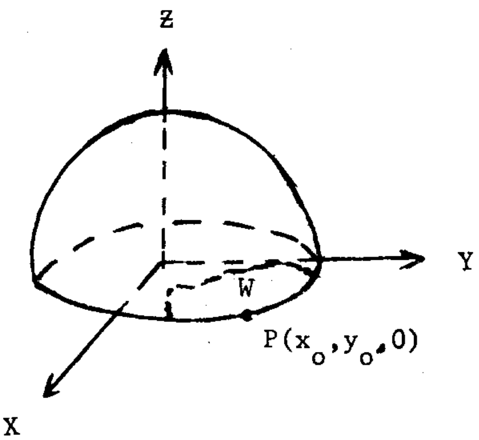
ตัวอย่างที่ 5.4.2 พื้นผิวเชิงเดียว ไม่มี ขอบ (boundary) เช่น กึ่งทรงกลม ของ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ที่ประกอบด้วยเส้นศูนย์สูตร ไม่เป็นพื้นผิวเชิงเดียว เพราะว่า ถ้า สมมติว่ากึ่งทรงกลมบน ของ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ที่ประกอบด้วยเส้น ศูนย์สูตร เป็น พื้นผิวเชิงเดียว และให้ $P(x_o, y_o, 0)$ เป็นจุดบนเส้นศูนย์สูตรและให้ $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$ เป็น patch บนกึ่งทรงกลมที่ประกอบด้วยจุด P เนื่องจาก $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$ เป็นตัวแทนปรกติที่ประกอบด้วยจุด P จากทฤษฎีบทที่ 5.3.1 จะได้ว่ามี Monge patch ที่ประกอบด้วยจุด P และสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1-x^2-y^2}\,\vec{k}\,,$$ ซึ่งถูกกำหนด บน W (เซตเปิด)

ในระนาบ XY เมื่อ $x^2 + y^2 \leq 1$ สำหรับ (x, y) ใน W ดังรูป 5.4.2

แต่ทุก ๆ ย่าน ของจุด $(x_o, y_o, 0)$ ใน W ประกอบด้วยจุดที่ไม่อยู่ใน W ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก W เป็น เซตเปิด

ดังนั้นจึงเกิดความขัดแย้งกัน จึงสรุปได้ว่า กึ่งทรงกลมบนของ $x^2+y^2+z^2 = 1$ ที่ประกอบด้วยเส้น ศูนย์สูตร ไม่เป็น พื้นผิวเชิงเดียว



รูป 5.4.2

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.4.3 ผิวทรงกลม เป็นพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^{∞}

มูลฐาน คือ Monge patches ซึ่งมีอยู่ 6 แบบ คือ

$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} \pm \sqrt{1-x^2-y^2}\,\vec{k}$ .... (5.4.1) ,

$\vec{R} = x\vec{i} \pm \sqrt{1-x^2-z^2}\,\vec{j} + z\vec{k}$ .... (5.4.2),

$\vec{R} = \pm\sqrt{1-y^2-z^2}\,\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ...... (5.4.3)

สมการ (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) ต่างก็ เป็นกึ่งทรงกลม ซึ่งปกคลุมผิวทรงกลม และ กึ่งทรงกลม แต่ละอันเกิดจากการตัดกันของผิวทรงกลมกับครึ่งปริภูมิเปิดที่เหมาะสมใน E^3 (appropriate open half space of E^3) เช่น patch ที่สมการเป็น

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1-x^2-y^2}\,\vec{k}$$

คือการตัดกันของผิวทรงกลมกับครึ่งปริภูมิ $z > 0$

ตอบ

หมายเหตุ พื้นผิวเชิงเดียว จะไม่ตัดกับตัวมันเอง

ให้ P เป็นจุดบน S ซึ่งเป็นพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^m และให้ $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ เป็น coordinate patch ใด ๆ ที่อยู่ในชั้น C^m บน S ซึ่งกำหนดบน เซต U (เซตเปิด) และประกอบด้วยจุด P ดังรูป 5.4.3

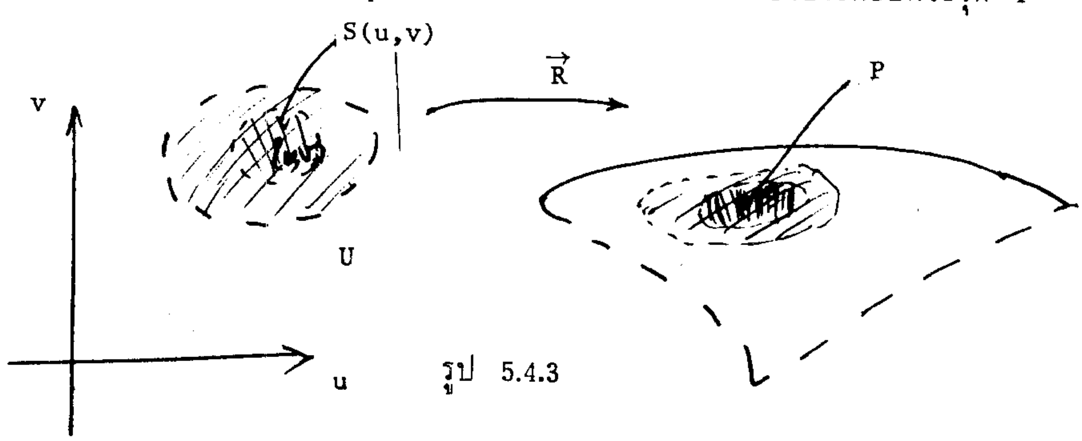
patch นี้จะไม่เป็นเซตไม่ขาดตอน (conneted set) ใน E^3 ถ้า U ไม่เป็นเซตไม่ขาดตอน

ให้ (u, v) เป็นจุดใน U ซึ่งส่ง ไปยังจุด P และให้ S(u, v) เป็น spherical neighborhood ของ (u, v) ที่อยู่ใน U

S(u, v) หาค่าได้เนื่องจาก U เป็นเซตเปิด

จะได้ว่า ข้อจำกัดของ $\vec{R}$ เทียบกับ S (u, v) (restriction of $\vec{R}$ to S(u,v)) คือ patch บน S of class C^m ซึ่ง connect และ ประกอบด้วยจุด P

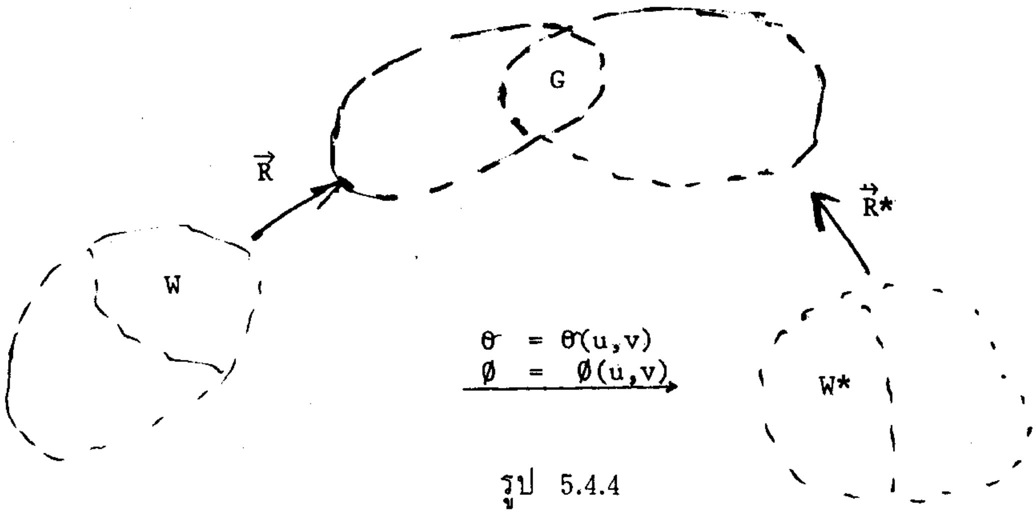
ทฤษฎีบทที่ 5.4.1 ทุก ๆ จุด P บน S ซึ่งเป็น พื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^m จะมี connected patch of class C^m บน S ซึ่งประกอบด้วยจุด P



รูป 5.4.3

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ และ $\vec{R} = \vec{R}^*(\theta,\phi)$ เป็น patch 2 อันบน S ซึ่งเป็น simple surface of class C^m with a nonempty intersection G

ให้ W เป็นเซตในระนาบ u v ซึ่ง $\vec{R}$ ส่งไปบน G และ W^* เป็นเซตในระนาบ $\theta\phi$ ซึ่ง $\vec{R}$ ส่งไปบน G ดังรูป 5.4.4



รูป 5.4.4

เนื่องจาก $\vec{R}$ และ $\vec{R}^*$ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
ดังนั้น จะมีการแปลงเชิงตัวแปรเสริมหนึ่งต่อหนึ่ง (1 – 1 parameter transformation) $\theta = \theta(u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ ของ W ไปบน W^* ซึ่งสำหรับทุก ๆ (u, v) ใน W^* จะได้ว่า

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}^*(\theta(u,v),\ \phi(u,v))$$

การส่ง $\theta = \theta(u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ ของชั้น C^m $(m \geq 1)$ ของ W (เซตเปิด) ในระนาบ u v ไปยังระนาบ $\theta\phi$ ซึ่งเป็น 1 – 1 และสำหรับทุก ๆ (u, v) ใน W Jacobain $\dfrac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)} \neq 0$ เรียกว่า allowable parameter transformation

จากทฤษฎีบทของ การส่งผกผัน จะได้ว่า ถ้า $\theta = \theta(u,v)$, $\phi = \phi(u,v)$ เป็น allowable parameter transformation of class C^m with image W^* แล้ว W^* เป็นเซตเปิด, การส่งผกผัน $u = u(\theta,\phi)$, $v = v(\theta,\phi)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนเซต W^* และสำหรับทุก ๆ (θ,ϕ) ใน W^*

Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)} = \left[\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}\right]^{-1} \neq 0$

ให้ชื่อว่า inverse of an allowable coordinate transformation is an allowable coordinate transformation ดังทฤษฎีที่ 5.4.2

ทฤษฎีที่ 5.4.2 On the intersection of two coordinate patches on a simple surface of class C^m, the parameters are related by allowable coordinate transformations of class C^m

ตัวอย่างที่ 5.4.4 สมการ

$$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1-(u^2+v^2)}\,\vec{k}, \quad u^2 + v^2 < 1 \quad \ldots\ldots\ldots (5.4.4)$$

และ

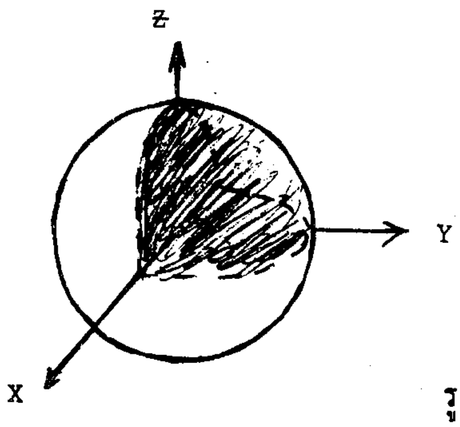
$$\vec{R} = \cos\theta \sin\phi\vec{i} + \sin\theta \sin\phi\vec{j} + \cos\phi\vec{k},$$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < \pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.4.5)$$

เป็น coordinate patches of class C^∞ บนผิวทรงกลม ซึ่งมีสมการคือ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

สมการ (5.4.4) และ สมการ (5.4.5) ตัดกันเป็นครึ่งหนึ่งของกึ่งทรงกลมบน (half the upper hemisphere) ดังรูป 5.4.5



รูป 5.4.5

บน ครึ่งหนึ่งของกึ่งทรงกลมบน จะมี การแปลงอิงตัวแปรเสริม

$$u = \cos \theta \sin \phi$$

และ $$v = \sin \theta \sin \phi$$

เมื่อ $0 < \theta < \pi$ และ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

การส่ง นี้ เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของชั้น C^∞ และ

เนื่องจาก $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} & \frac{\partial v}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix}$$

$$= -\sin^2\theta \sin \phi \cos \phi - \cos^2\theta \sin \phi \cos \phi$$

$$= -\sin \phi \cos \phi \, (\sin^2\theta + \cos^2 \theta)$$

$$= -\sin \phi \cos \phi \neq 0$$

การแปลงผกผัน (inverse transformation) คือ

$$\phi = \cos^{-1} \sqrt{1-u^2- v^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u}{u^2+ v^2}\right)$$

เมื่อ $u^2+ v^2 < 1$ และ $v > 0$

ตัวอย่างที่ 5.4.5 บ่อยครั้งที่ผิวแทนโดยปริยาย (implicit) นั่นคือ เซตของจุด S ใน E^3 ซึ่งคล้องตามสมการที่อยู่ในรูป

$$f(x,y,z) = C \quad , \quad C \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

จากทฤษฎีบทของฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function) ซึ่งหาอ่านได้จากหนังสือแคลคูลัสชั้นสูง (advanced calculus)

S พร้อมด้วย coordinate patches ทั้งหมดซึ่งอยู่ใน ชั้น C^m ใน S คือ พื้นผิวเชิงเดียว โดยให้ f เป็นฟังก์ชัน ใน ชั้น C^m และมีอนุพันธ์ย่อย (f_x, f_y, f_z) อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่จุดใด ๆ ใน S

โดยใช้ความรู้ข้างต้น พิจารณาค่า c ซึ่งทำให้

$x^2-2x+yz = c$ เป็น พื้นผิวเชิงเดียว

วิธีทำ $f_x = 2x - 2$

$f_y = z$

$f_z = y$

$f_x = f_y = f_z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$

แต่จุด $(1,0,0)$ คล้องตามสมการ

$x^2-2x+yz = c$ ก็ต่อเมื่อ $c = -1$

ดังนั้น $x^2-2x + yz = c$ เป็นพื้นผิวเชิงเดียว สำหรับทุก ๆ ค่า c ยกเว้น $c = -1$

ตอบ

หมายเหตุ พื้นผิวกำลังสอง (quadric surface) มีอยู่ 6 แบบ คือ

1. ทรงรี :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. ไฮเพอร์โบลอยด์เชื่อมโยงกัน (Hyperboloid of one sheet) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. ไฮเพอร์โบลอยด์ รูปคู่ (Hyperboloid of two sheets) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. พาราโบลอยด์ เชิงวงรี :

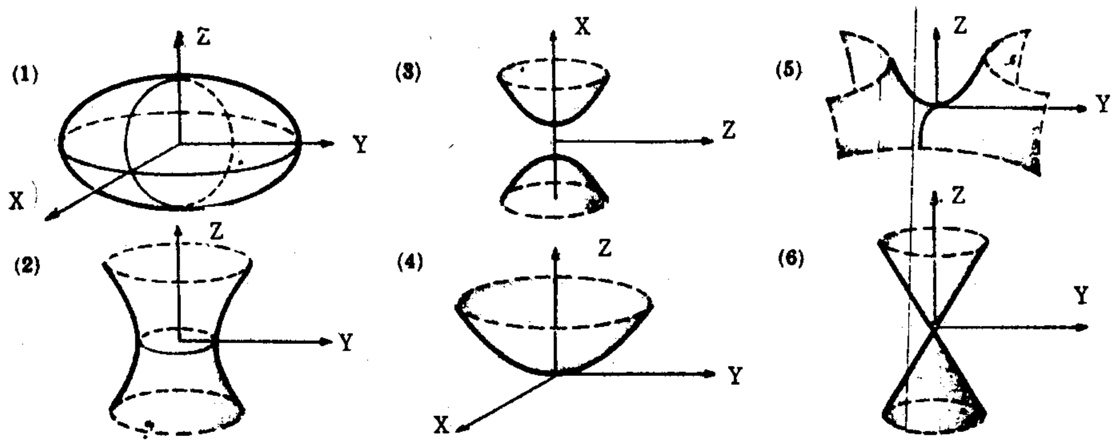
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

5. ไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

6. กรวยกำลังสอง (Quadric cone) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$



รูป 5.4.6

ตัวอย่างที่ 5.4.6 ในขณะที่วงกลมวงหนึ่งหมุนรอบเส้นตรงคงตัวเส้นหนึ่ง โดยที่เส้นตรงคงตัวนี้อยู่บนระนาบเดียวกับวงกลม จะทำให้เกิดผิวซึ่งมีชื่อว่า ทรงห่วงยาง (torus) ให้วงกลมเริ่มต้นที่ระนาบ XZ และมีรัศมี = a จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x โดยระยะทางห่างจากจุดกำเนิด = b (a < b)

พิจารณาเมื่อวงกลมหมุนผ่านแกน X ไปเป็นมุม θ ดังรูป 5.4.7 ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลม $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์รัศมีของวงกลม จะได้ว่า

$$\vec{u} = b\cos\theta\vec{i} + b\sin\theta\vec{j}$$

และ
$$\vec{r} = a\sin\phi\cos\theta\vec{i} + a\sin\phi\sin\theta\vec{j} + a\cos\phi\vec{k}$$

เมื่อ ϕ เป็นมุมที่ $\vec{r}$ ทำกับแกน Z

$$\therefore\ \vec{R} = \vec{u} + \vec{r}$$
$$= (b + a\sin\phi)\cos\theta\vec{i} + (b + a\sin\phi)\sin\theta\vec{j} + a\cos\phi\vec{k}$$

เมื่อ $-\infty < \theta < \infty$ และ $-\infty < \phi < \infty$

เห็นได้ชัดว่า $\vec{R}$ อยู่ใน ชั้น C^{∞} และ

$$\vec{R}_\theta = -(b + a\sin\phi)\sin\theta\vec{i} + (b + a\sin\phi)\cos\theta\vec{j}$$
$$\vec{R}_\phi = a\cos\phi\cos\theta\vec{i} + a\cos\phi\sin\theta\vec{j} - a\sin\phi\vec{k}$$

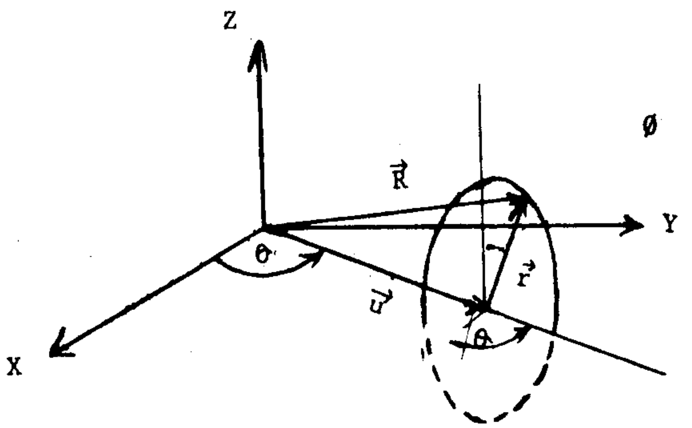
$$\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -(b+a\sin\phi)\sin\theta & (b+a\sin\phi)\cos\theta & 0 \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & a\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(a(b + a\sin\phi)\cos\theta\sin\phi) - \vec{j}(-a(b + a\sin\phi)\sin\theta\sin\phi) + (-a(b + a\sin\phi)\cos\phi\sin^2\theta - a(b + a\sin\phi)\cos^2\theta\cos\phi)\vec{k}$$

$$|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi| = \left[a^2(b + a\sin\phi)^2\cos^2\theta\sin^2\phi + a^2(b + a\sin\phi)^2\sin^2\theta\sin^2\phi + a^2(b + a\sin\phi)^2\cos^2\phi\right]^{1/2}$$

$$= \quad a(b + a \sin\phi)(\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\phi)^{1/2}$$
$$= \quad a(b + a \sin\phi)(\sin^2\phi + \cos^2\phi)^{1/2}$$
$$= \quad a(b + a \sin\phi)$$
$$\neq \quad 0 \text{ สำหรับทุก } (\theta, \phi)$$

ดังนั้น $\vec{R}$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติของทรงห่วงยางของชั้น C^{∞}



รูป 5.4.7

จาก $\quad \vec{R}_\theta \cdot \vec{R}_\phi \quad = \quad 0$

ดังนั้น เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม บนผิวตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน

สิ่งที่สำคัญคือ ภาพ บน ทรงห่วงยาง (torus) ของเส้นตรง ซึ่งมีสมการคือ $\theta = t$, $\phi = kt$, k เป็นจำนวนนับ เส้นโค้งนี้คือ ฮีลิกซ์ บน ทรงห่วงยาง ซึ่งห่อหุ้ม ทรงห่วงยาง ดังรูป 5.4.8 และ ฮีลิกซ์ นี้มีสมการว่า

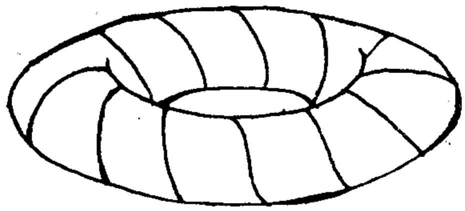
$$\vec{R} = (b + a \sin kt)\cos t\vec{i} + (b + a \sin kt)\sin t\vec{j} + \cos kt\,\vec{k}$$

เวกเตอร์แนวฉากบนทรงห่วงยาง คือ

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi}{|\vec{R}_\theta \times \vec{R}_\phi|}.$$

$$= -\sin \phi \cos \theta\vec{i} - \sin \phi \sin \theta\vec{j} - \cos \phi\vec{k}$$

ตอบ



รูป 5.4.8

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงแสดงว่า $\vec{R} = u^2\vec{i} + uv\vec{j} + v^2\vec{k}$ เป็น coordinate patch of class C^{∞} ในจตุตถภาค (quadrant) ที่ 1, $u > 0$, $v > 0$

2. จงแสดงว่า ไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ ซึ่งมีสมการคือ $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ เป็น พื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^{∞}

3. จงแสดงว่า พื้นผิวกำลังสองเป็นพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^{∞}

5.5 **ระนาบสัมผัส** และเส้นแนวฉาก (Tangent plane and normal line)

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ เป็น patch บนพื้นผิวเชิงเดียวของชั้น C^m และให้ $u = u(t)$, $v = v(t)$ เป็นเส้นโค้งปรกติ C ของชั้น C^m ในระนาบอิงตัวแปรเสริม (parameter plane)

พิจารณาภาพ $\vec{R} = \vec{r}(t) = \vec{R}(u(t), v(t))$ ของ C บนผิว

เห็นได้ชัดว่า $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ใน ชั้น C^m เนื่องจาก $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันประกอบของชั้น C^m

และสำหรับทุก ๆ ค่า t จะได้ว่า $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ ($\frac{d\vec{r}}{dt}$ คือเวกเตอร์สัมผัส) เนื่องจากถ้าสมมุติให้ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$ แล้ว จาก $\vec{R}_u \times \vec{R}_v \neq \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ (u, v) จะได้ว่า $\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น

$$\text{ถ้า} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{R}_u \frac{du}{dt} + \vec{R}_v \frac{dv}{dt}$$

$$= \vec{0} \quad \text{ที่บางค่า } t \text{ แล้วจะได้ว่า}$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ และ } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ ที่ } t$$

แต่เป็นไปไม่ได้เพราะว่า C เป็นเส้นโค้งปรกติ เพราะฉะนั้น $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$

ดังนั้น เส้นโค้งปรกติทุก ๆ เส้น $u = u(t)$, $v = v(t)$ ของชั้น C^m ในระนาบอิงตัวแปรเสริม ส่งไปบน เส้นโค้งปรกติ $\vec{R} = \vec{r}(t) = \vec{R}(u(t), v(t))$ ของชั้น C^m บนผิว

จากเส้นโค้งปรกติ $\vec{R} = \vec{r}(t)$ ของชั้น C^m บนผิวเราอาจจะไม่สามารถหา coordinate patch เพียงอันเดียวที่ประกอบด้วยเส้นโค้งที่สมบูรณ์นี้ (complete curve)

อย่างไรก็ตาม พิจารณาเส้นโค้งที่ต่อเนื่องกันซึ่งอยู่บน coordinate patch

$\vec{R} = \vec{R}(u,v)$

เนื่องจาก $\vec{R}(u,v)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจะมีเส้นโค้ง C เพียงเส้นเดียว $(u = u(t),\ v = v(t))$ ในระนาบอิงตัวแปรเสริม ซึ่ง $\vec{r}(t) = \vec{R}(u(t),\ v(t))$ สามารถ แสดงให้เห็นว่า C เป็นเส้นโค้งปรกติ และอยู่ใน ชั้น C^m

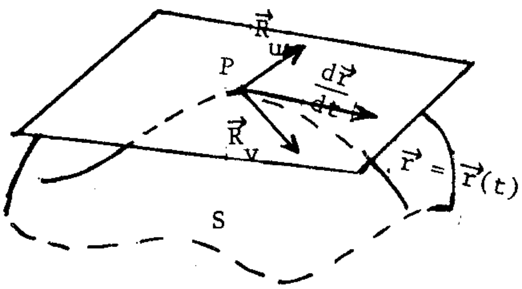
ดังนั้น เส้นโค้งปรกติทุก ๆ เส้น $\vec{R} = \vec{r}(t)$ ของชั้น C^m บนผิวคือ ภาพของเส้นโค้งปรกติเป็นได้อย่างเดียว (unique regular curve) u = u (t), v = v (t) ของชั้น C^m ในระนาบอิงตัวแปรเสริมของ patch $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$

เวกเตอร์ $\vec{t}$ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์สัมผัสกับผิว S ที่จุด P ถ้ามีเส้นโค้งปรกติ $\vec{R} = \vec{r}(t)$ บน S ผ่านจุด P ซึ่ง $\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ เป็น patch ที่ประกอบด้วย P และ

$\vec{R} = \vec{r}(t) = \vec{R}(u(t),\ v(t))$ แล้ว $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{R}_u \dfrac{du}{dt} + \vec{R}_v \dfrac{dv}{dt}$

ดังนั้นเวกเตอร์สัมผัสทั้งหลายที่สัมผัสกับ S ที่จุด P เป็น ไม่อิสระเชิงเส้นขึ้นอยู่กับ $\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ ที่จุด P ($\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ เป็นอิสระเชิงเส้น) ดังรูป 5.5.1



รูป 5.5.1

จากหัวข้อ 5.2 จะได้ว่า $\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับ u – parameter curve และ v – parameter curve ตามลำดับ ดังนั้นทุก ๆ เวกเตอร์ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งเป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ขึ้นอยู่กับ $\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ คือเวกเตอร์สัมผัส $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ กับเส้นโค้งบางเส้นที่ผ่านจุด P

ระบบที่ผ่านจุด P และขนานกับ $\vec{R}_u$, $\vec{R}_v$ ที่จุด P เรียกว่าระนาบสัมผัสกับ S ที่จุด P

เวกเตอร์ $\vec{t}$ จะสัมผัสกับ S ที่จุด P ก็ต่อเมื่อ $\vec{t}$ ขนานกับระนาบสัมผัสที่จุด P

ดังนั้น ระนาบสัมผัสที่จุด R บน patch $\vec{R} = \vec{R}(u,v)$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R} + \mu\vec{R}_u + \nu\vec{R}_v, \quad -\infty < \mu, \ \nu < \infty$$

หรือ $(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v) = 0$

ถ้า $\vec{R}_u$ และ $\vec{R}_v$ มีความต่อเนื่องแล้วระนาบสัมผัสจะหาได้เฉพาะที่จุดไม่เอกฐาน (nonsingular) หรือจุดปรกติ (regular points)

ให้ $\vec{n} = \dfrac{\vec{R}_u \times \vec{R}_v}{|\vec{R}_u \times \vec{R}_v|}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับผิวที่จุด P เรียก $\vec{n}$ ว่า เวกเตอร์หน่วยแนวฉาก

เส้นตรงที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่จุด P เรียกว่า เส้นแนวฉากกับผิวที่จุด P และมีสมการว่า

$$\vec{r} = \vec{R} + \nu\vec{n} \quad , \quad -\infty < \nu < \infty$$

ตัวอย่างที่ 5.5.1 จงหาเวกเตอร์ $\vec{n}$ และสมการระนาบสัมผัส กับ

$$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k} \quad ที่ \quad u = 1 , \quad v = -1$$

วิธีทำ $\vec{R}_u = \vec{i} + 2u\vec{k}$

$\vec{R}_v = \vec{j} + 2v\vec{k}$

ที่ $u = 1$, $\vec{R}_u = \vec{i} + 2\vec{k}$

$v = -1$, $\vec{R}_v = \vec{i} - 2\vec{k}$

ที่ $u = 1$, $v = -1$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(1)$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left| \vec{R}_u \times \vec{R}_v \right| = \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$= 3$$

$$\therefore \vec{n} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

ที่จุด $u = 1$, $v = 1$, $\therefore u^2 + v^2 = 2$

$\vec{R}$ ที่จุด $(1, -1, 2)$ คือ $\vec{R}_o$

$\vec{R}_o = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

ดังนั้นระนาบสัมผัสกับ $\vec{R}$ ที่จุด $(1, -1, 2)$ คือ

$$(\vec{r} - \vec{R}_o) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v) = 0$$

$$\left\{(x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right\} \cdot \left\{-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right\} = 0$$

$$-2(x-1) + 2(y+1) + (z-2) = 0$$

$$-2x + 2 + 2y + 2 + z - 2 = 0$$
$$2x - 2y - z - 2 = 0$$

ตัวอย่างที่ 5.5.2 ให้ $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2-2v^2)\vec{k}$ จงหา $\vec{n}$

วิธีทำ

$$\vec{R}_u = \vec{i} + 2u\vec{k}$$
$$\vec{R}_v = \vec{j} - 4v\vec{k}$$
$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -4v \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(-2u) - \vec{j}(-4v) + \vec{k}$$
$$= -2u\vec{i} + 4v\vec{j} + \vec{k}$$
$$\left|\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right| = \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1}$$
$$\vec{n} = (-2u\vec{i} + 4v\vec{j} + \vec{k})\Big/\sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1}$$

ตัวอย่างที่ 5.5.3 พิจารณา Monge patch ซึ่งมีสมการเป็น

$$\vec{R}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + uv\vec{k}$$
$$\vec{R}_u(u,v) = \vec{i} + v\vec{k}$$
$$\vec{R}_u(a,b) = \vec{i} + b\vec{k}$$
$$\vec{R}_v(u,v) = \vec{j} + u\vec{k}$$
$$\vec{R}_v(a,b) = \vec{j} + a\vec{k}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-b) - \vec{j}(a) + \vec{k}$$

$$= -b\vec{i} - a\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right| = \sqrt{b^2 + a^2 + 1}$$

$$\vec{n} = \frac{-b\vec{i} - a\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{b^2 + a^2 + 1}}$$

ถ้า $u = 1, \quad v = 2$

$$\vec{R}_u(1,2) = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\vec{R}_v(1,2) = \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{R}_u \times \vec{R}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2) - \vec{j} + \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right| = \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$\vec{n} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$$

ที่จุด $u = 1, \quad v = 2$ จะได้ $uv = 2$

$\vec{R}$ ที่จุด $(1,2,2)$ คือ $\vec{R}_o$

$$\vec{R}_o = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

ดังนั้นในระนาบสัมผัสกับ $\vec{R}$ ที่จุด $(1,2,2)$ คือ

$$(\vec{r} - \vec{R}_o) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v) = 0$$

$$\left\{(x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right\} \cdot (-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = 0$$

$$-2(x-1) - (y-2) + (z-2) = 0$$

$$-2x + 2 - y + 2 + z - 2 = 0$$

$$-2x - y + z + 2 = 0$$

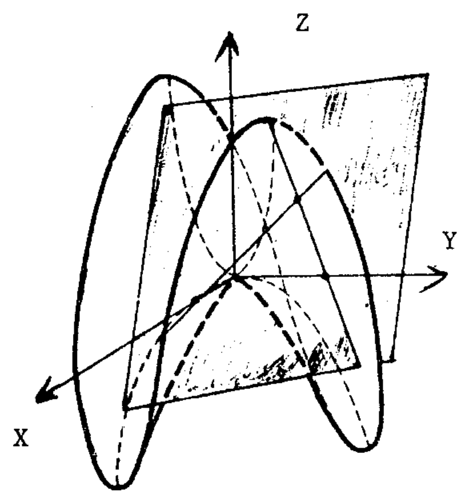
$$2x + y - z - 2 = 0$$

ในตัวอย่างนี้ ระนาบสัมผัสตัดกับผิวได้เส้นตรง 2 เส้น ดังรูป 5.5.2 สมการของเส้นตรงทั้ง 2 คือ

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{R}(t,2) = t\vec{i} + 2\vec{j} + 2t\vec{k}$$

และ $\vec{\beta}(t) = \vec{R}(1,t) = \vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$

ตอบ



รูป 5.5.2

ตอบ

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาเวกเตอร์หน่วยแนวฉาก ($\vec{n}$) กับผิวโค้งซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + (3u^2 + 4v^2)\vec{k} \text{ ที่จุด } (0,0,0)$$

2. จงหาเวกเตอร์หน่วยแนวฉาก ($\vec{n}$) และสมการระนาบสัมผัสกับผิวโค้งซึ่งมีสมการคือ $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2 - 1)\vec{k}$ ที่จุด $(1,1,1)$

จากข้อ 3 ถึงข้อ 6 จงหา $\vec{n}$ และระนาบสัมผัสกับ $\vec{R}$ ที่ กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

3. $\vec{R} = (u+v)\vec{i} + (u-v)\vec{j} + uv\vec{k}$, $u = 1$, $v = 2$
4. $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1-u^2-v^2}\,\vec{k}$, $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$
5. $\vec{R} = u\vec{i} - \sqrt{1-u^2-v^2}\,\vec{j} + v\vec{k}$, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$
6. $\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1-u^2-v^2}\,\vec{k}$, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$
7. จงหา $\vec{n}$ กับผิวโค้งซึ่งมีสมการ คือ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

หรือ $\vec{R} = a \cos u \sin v\vec{i} + a \sin u \sin v\vec{j} + a \cos v\vec{k}$,

$a > 0$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$

8. จงแสดงว่า $\vec{n}$ ของ surface of revolution ซึ่ง มีสมการเป็น

$\vec{R} = f(u) \cos \theta\vec{i} + f(u) \sin \theta\vec{j} + g(u)\vec{k}$,

$f > 0$ คือ

$$\vec{n} = \frac{-g' \cos \theta\vec{i} - g' \sin \theta\vec{j} + f'\vec{k}}{\left[(f')^2 + (g')^2\right]^{1/2}}$$

9. จงหาสมการของระนาบสัมผัส และเส้นแนวฉากกับผิวซึ่งแทนด้วย

$$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 - v^2)\vec{k}$$

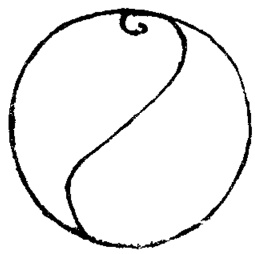
ที่จุดซึ่ง $u = 1, \quad v = 1$

10. จงแสดงว่าภาพของเส้นโค้ง $\theta = \ln t, \quad \phi = 2\tan^{-1}t,$ $t > 0$, บนผิวทรงกลม

$$\vec{R} = \cos\theta\sin\phi\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\vec{j} + \cos\phi\vec{k}$$

ตัดกับเส้นเมริเดียน (meridian), ϕ-parameter curves, เป็นมุม 45°

t แปรค่าจาก 0 ไปยัง 1 ไปยัง ∞ จะได้ว่า θ แปรค่าจาก $-\infty$ ไปยัง 0 ไปยัง ∞ และ ϕ แปรค่าจาก 0 ไปยัง $\frac{\pi}{2}$ ไปยัง π ดังนั้นเส้นโค้งขดเป็นเกลียวที่ขั้วเหนือ และขั้วใต้ดังรูป 5.5.3



รูป 5.5.3