บทที่ 4
ทฤษฎีที่เกี่ยวกับเส้นโค้ง
(The Theory of Curves)

4.1 สมการเฟรอเนต์ (Frenet equations)

ทฤษฎีบทที่ 4.1.1 ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้ง ซึ่ง $\kappa \neq 0$ แล้ว

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.1.1)$$

$$\dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \quad \ldots\ldots\ldots (4.1.2)$$

$$\dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N} \quad \ldots\ldots \quad (4.1.3)$$

สมการ (4.1.1), (4.1.2) และ (4.1.3) เรียกว่า สมการแซร์เรต์-เฟรอเนต์ (Serret-Frenet equations) หรือ สมการเฟรอเนต์ ของเส้นโค้ง

พิสูจน์ สมการ (4.1.1) ได้มาจาก สมการ (3.7.2)

สมการ (4.1.3) ได้มาจาก สมการ (3.10.2)

สมการ (4.1.2) พิสูจน์ได้โดยใช้ $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

สมการ (4.1.1) และ สมการ (4.1.3)

หาอนุพันธ์ สมการ $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\dot{\vec{N}} &= \dot{\vec{B}} \times \vec{T} + \vec{B} \times \dot{\vec{T}} \\ &= (-\tau\vec{N}) \times \vec{T} + \vec{B} \times (\kappa\vec{N}) \\ &= (-\tau)(-\vec{B}) + \kappa(-\vec{T}) \\ &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\end{aligned}$$

ช.ต.พ.

จะเห็นว่า ถ้าเขียนสมการเฟรอเนต์ในรูปของส่วนประกอบ $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ จะได้ว่า

$$\dot{\vec{T}} = 0\vec{T} + \kappa\vec{N} + 0\vec{B}$$

$$\dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} + 0\vec{N} + \tau\vec{B}$$

$$\dot{\vec{B}} = 0\vec{T} - \tau\vec{N} + 0\vec{B}$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{N}} \\ \dot{\vec{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

สัมประสิทธิ์ของ $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ **คือ**

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

สมการเฟรอเนต์ อาจเขียนได้ในรูป

$$\dot{\vec{T}} = \vec{D} \times \vec{T} \quad .... \quad (4.1.4)$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{D} \times \vec{N} \quad .... \quad (4.1.5)$$

$$\dot{\vec{B}} = \vec{D} \times \vec{B} \quad .... \quad (4.1.6)$$

ให้ $\vec{D} = \alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B}$

จากสมการ (4.1.4) **จะได้ว่า**

$$\dot{\vec{T}} = \vec{D} \times \vec{T}$$

$$= (\alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B}) \times \vec{T}$$
$$= \alpha\vec{T} \times \vec{T} + \beta\vec{N}\times\vec{T} + \gamma\vec{B}\times\vec{T}$$
$$= \vec{0} + \beta(-\vec{B}) + \gamma\vec{N}$$
$$= -\beta\vec{B} + \gamma\vec{N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.1.7)$$

จากสมการ (4.1.5) จะได้ว่า

$$\dot{\vec{N}} = \vec{D}\times\vec{N}$$
$$= (\alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B}) \times \vec{N}$$
$$= \alpha\vec{T}\times\vec{N} + \beta\vec{N}\times\vec{N} + \gamma\vec{B}\times\vec{N}$$
$$= \alpha\vec{B} + \vec{0} + \gamma(-\vec{T})$$
$$= \alpha\vec{B} - \gamma\vec{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.1.8)$$

จากสมการ (4.1.6) จะได้ว่า

$$\dot{\vec{B}} = \vec{D}\times\vec{B}$$
$$= (\alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B}) \times \vec{B}$$
$$= \alpha\vec{T}\times\vec{B} + \beta\vec{N}\times\vec{B} + \gamma\vec{B}\times\vec{B}$$
$$= \alpha(-\vec{N}) + \beta\vec{T} + \vec{0}$$
$$= -\alpha\vec{N} + \beta\vec{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.1.9)$$

เปรียบเทียบสมการ (4.1.7), (4.1.8) และ (4.1.9) กับสมการเฟรอเนต์ จะได้ว่า

$$\alpha = \tau, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \kappa$$

ดังนั้น
$$\vec{D} = \tau\vec{T} + \kappa\vec{B}$$

เรียก $\vec{D}$ ว่า ดาร์บอกซ์ เวกเตอร์ (Darboux vector)

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงพิสูจน์ว่า ก $\dfrac{d\vec{T}}{ds} \cdot \dfrac{d\vec{B}}{ds} = -\kappa\tau$

   ข. $\vec{B} \cdot \dfrac{d\vec{N}}{ds} = \tau$

   ค $\vec{T} \cdot \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa$

2. จงพิสูจน์ว่า $\dot{\vec{T}} \times \ddot{\vec{T}} = \kappa^2\vec{D}$ โดยที่ D คือ ดาร์บอกซ์ เวกเตอร์

3. จงพิสูจน์ว่า $\dddot{\vec{R}}(s) = \dot{\kappa}\vec{N} - \kappa^2\vec{T} + \kappa\tau\vec{B}$

4. จงพิสูจน์ว่า $\dot{\vec{R}} \cdot \ddot{\vec{R}} \times \dddot{\vec{R}} = \kappa^2\tau$

5. จงพิสูจน์ว่า เส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ซึ่งอยู่ใน ชั้น ≥ 4

   จะคล้องตามสมการ

$$\vec{R}^{(4)} - \left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dddot{\vec{R}} + \left(\kappa^2 + \tau^2 + \frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau} + \frac{2\dot{\kappa}^2 - \kappa\ddot{\kappa}}{\kappa^2}\right)\ddot{\vec{R}} + \kappa^2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dot{\vec{R}} = \vec{0}$$

6. จงแสดงว่า สำหรับ ฮีลิกซ์ จะได้ว่า

$$\vec{D} \times \vec{e} = \vec{0}$$

   เมื่อ $\vec{e}$ คือ เวกเตอร์หน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับแกนของ ฮีลิกซ์

7. จะพิสูจน์ว่า $[\dot{\vec{R}}\ddot{\vec{R}}\vec{R}^{(4)}] = \kappa^5\dfrac{d}{ds}(\tau/\kappa)$

4.2 สมการในตัว (Intrinsic equations)

ความสำคัญอันแรกของสมการเฟรอเนต์ ก็คือ แสดงให้เห็นว่า เส้นโค้งถูกกำหนดอย่างสมบูรณ์ โดยความโค้งและความบิดของเส้นโค้งนั้น

ทฤษฎีบทที่ 4.2.1 ถ้าเส้นโค้ง C และ เส้นโค้ง C^* เป็นเส้นโค้ง 2 เส้นในปริภูมิ ซึ่ง

$$\kappa(s) = \kappa^*(s)$$

และ $$\tau(s) = \tau^*(s)$$

สำหรับค่า s ทุก ๆ ค่า แล้ว C และ C^* เป็นเส้นโค้งเดียวกัน

พิสูจน์ ให้ C และ C^* ตัดกันที่ $s = s_0 = s^*$

หาอนุพันธ์ของ $\vec{T}.\vec{T}^*$ และใช้สมการเฟรอเนต์ จะได้ว่า

$$\frac{d}{ds}(\vec{T}.\vec{T}^*) = \vec{T}.\dot{\vec{T}}^* + \dot{\vec{T}}.\vec{T}^*$$

$$= \vec{T}.\kappa^*\vec{N}^* + \kappa\vec{N}.\vec{T}^*$$

$$= \kappa(\vec{T}.\vec{N}^* + \vec{N}.\vec{T}^*) \quad \text{เนื่องจาก} \quad \kappa = \kappa^*$$

หาอนุพันธ์ของ $\vec{N}.\vec{N}^*$

$$\frac{d}{ds}(\vec{N}.\vec{N}^*) = \vec{N}.\dot{\vec{N}}^* + \dot{\vec{N}}.\vec{N}^*$$

$$= \vec{N}.(-\kappa^*\vec{T}^* + \tau^*\vec{B}^*) + (-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}).\vec{N}^*$$

$$= -\kappa^*(\vec{N}.\vec{T}^*) + \tau^*(\vec{N}.\vec{B}^*) - \kappa(\vec{T}.\vec{N}^*) + \tau(\vec{B}.\vec{N}^*)$$

$$= -\kappa(\vec{N}.\vec{T}^* + \vec{T}.\vec{N}^*) + \tau(\vec{N}.\vec{B}^* + \vec{B}.\vec{N}^*)$$

และหาอนุพันธ์ของ $\vec{B}.\vec{B}^*$

$$\frac{d}{ds}(\vec{B}.\vec{B}^*) = \vec{B}.\dot{\vec{B}}^* + \dot{\vec{B}}.\vec{B}^*$$

$$= \vec{B}.(-\tau^*\vec{N}^*) + (-\tau\vec{N}).\vec{B}^*$$

$$= -\tau(\vec{B}.\vec{N}^* + \vec{N}.\vec{B}^*)$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{T}.\vec{T}^* + \vec{N}.\vec{N}^* + \vec{B}.\vec{B}^*)$$

$$= \frac{d}{ds}(\vec{T}.\vec{T}^*) + \frac{d}{ds}(\vec{N}.\vec{N}^*) + \frac{d}{ds}(\vec{B}.\vec{B}^*)$$

$$= \kappa(\vec{T}.\vec{N}^* + \vec{N}.\vec{T}^*) - \kappa(\vec{N}.\vec{T}^* + \vec{T}.\vec{N}^*) + \tau(\vec{N}.\vec{B}^* + \vec{B}.\vec{N}^*) - \tau(\vec{B}.\vec{N}^* + \vec{N}.\vec{B}^*)$$

$$= 0$$

เมื่ออินทิเกรต จะได้ว่า

$$\vec{T}.\vec{T}^* + \vec{N}.\vec{N}^* + \vec{B}.\vec{B}^* = \text{ค่าคงตัว}$$

แต่ที่ s_0 จะได้ว่า

$$\vec{T}_0 = \vec{T}_0^*, \quad \vec{N}_0 = \vec{N}_0^* \text{ และ } \vec{B}_0 = \vec{B}_0^*$$

ดังนั้น $\vec{T}_0 . \vec{T}_0^* = \vec{N}_0.\vec{N}_0^* = \vec{B}_0.\vec{B}_0^* = 1$

ดังนั้น ที่ s_0 และสำหรับทุก ๆ ค่า s จะได้ว่า

$$\vec{T}.\vec{T}^* + \vec{N}.\vec{N}^* + \vec{B}.\vec{B}^* = 3$$

$\vec{T}$ และ $\vec{T}^*$ ซึ่งต่างก็เป็นเวกเตอร์หน่วย มีคุณสมบัติว่า

$$-1 \leq \vec{T}.\vec{T}^* = \cos\theta \leq 1$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{T}$ และ $\vec{T}^*$

เนื่องจากถ้า $\vec{T}.\vec{T}^* + \vec{N}.\vec{N}^* + \vec{B}.\vec{B}^* = 3$ แล้ว

$$\vec{T}.\vec{T}^* = \vec{N}.\vec{N}^* = \vec{B}.\vec{B}^* = 1$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ ค่า s จะได้ว่า

$$\vec{T} = \vec{T}^*, \quad \vec{N} = \vec{N}^* \text{ และ } \vec{B} = \vec{B}^*$$

จาก $\quad \vec{T} = \dfrac{d\vec{R}}{ds} = \vec{T}^* = \dfrac{d\vec{R}^*}{ds}$

จะได้ว่า $\quad \vec{R}(s) = \vec{R}^*(s) +$ ค่าคงตัว

แต่ที่ $\quad s_o \;,\; \vec{R}(s) = \vec{R}^*(S_o)$

ดังนั้น $\quad \vec{R}(s) = \vec{R}^*(s)$ สำหรับทุก ๆ ค่า s

นั่นคือ เส้นโค้ง C และ C^* ทับกันสนิท **ช.ต.พ.**

ทฤษฎีบทที่ 4.2.1 อาจกล่าวได้ว่า เส้นโค้งถูกกำหนดโดยความโค้ง และ ความบิดของเส้นโค้งนั้นเท่านั้น และ สมการ

$$\kappa = \kappa(s) \text{ และ } \tau = \tau(s)$$

ซึ่งให้ความโค้ง และ ความบิดของเส้นโค้งในรูปของฟังก์ชันของ s เรียกว่า สมการในตัว หรือ สมการธรรมชาติ (natural equation) ของเส้นโค้ง

ตัวอย่างที่ 4.2.1 สมการในตัวของเส้นตรง คือ

$$\kappa \equiv 0 \text{ และ } \tau \equiv 0$$

ตัวอย่างที่ 4.2.2 สมการในตัวของวงกลมรัศมี $= \rho = \dfrac{1}{\kappa}, \kappa \neq 0$

คือ κ เป็นค่าคงตัว $\neq 0$, $\tau = 0$

ตัวอย่างที่ 4.2.3 สมการในตัว ของ ฮีลิกซ์ คือ

เป็นค่าคงตัว > 0 , τ เป็นค่าคงตัว $\neq 0$

ฮีลิกซ์ นี้อยู่บน ทรงกระบอก ซึ่งมีรัศมี

$$= \frac{\kappa}{(\kappa^2 + \tau^2)}$$

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงหาสมการในตัวของแคทีนารี (catenary) ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\vec{i} + t\vec{j}\ , \quad a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

วิธีทำ

$$\vec{R}' = \sinh\left(\frac{t}{a}\right)\vec{i} + \vec{j}$$

$$|\vec{R}'| = \left[\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right) + 1\right]^{1/2}$$

$$= \cosh\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\vec{R}'' = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\vec{i}$$

$$\vec{R}'\times\vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sinh\left(\frac{t}{a}\right) & 1 & 0 \\ \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}\left(-\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{0a}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\vec{k}$$

จากทฤษฎีบทที่ 3.6.2

$$\kappa^2 = \frac{(\vec{R}'\times\vec{R}'') \cdot (\vec{R}'\times\vec{R}'')}{(\vec{R}'.\vec{R}')^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}{(\sinh^2 \frac{t}{a} + 1)^3}$$

$$= \frac{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}{a^2\cosh^6\left(\frac{t}{a}\right)}$$

$$= \frac{1}{a^2\cosh^4\left(\frac{t}{a}\right)}$$

จาก $s = \int_0^t |\vec{R}'|\, dt$

$$= \int_0^t \cosh\left(\frac{t}{a}\right)dt$$

$$= a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$$

เนื่องจาก $s^2 + a^2 = a^2 \sinh^2 \frac{t}{a} + a^2$

$$= a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\kappa = \frac{1}{a\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$ **ตอบ**

$$\tau = \frac{\vec{R}'\times\vec{R}'' . \vec{R}'''}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$$

$$= 0$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 4.2

จงหา สมการในตัว ของเส้นโค้งต่อไปนี้

1. เอพิไซคลอยด์ ซึ่งมีสมการคือ

$$\vec{R} = \left[(r_o+r_1) \cos\theta - r_1 \cos\left(\frac{r_o+r_1}{r_1}\theta\right)\right]\vec{i}$$

$$+ \left[(r_o+r_1) \sin\theta - r_1 \sin\left(\frac{r_o+r_1}{r_1}\theta\right)\right]\vec{j}$$

2. ไฮโพไซคลอยด์ ซึ่งมีสมการคือ

$$\vec{R} = \left[(r_o - r_1)\cos 6 - r_1 \cos\left(\frac{r_o - r_1}{r_1}\theta\right)\right]\vec{i}$$

$$+ \left[(r_o-r_1)\sin\theta - r_1 \sin\left(\frac{r_o - r_1}{r_1}6\right)\right] j$$

3. $\vec{R} = e^t(a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + b\vec{k})$

4. จงแสดงว่าเส้นโค้งที่อยู่บนผิวทรงกลมซึ่งมีรัศมี $= a$ และความบิดไม่เท่ากับศูนย์ จะคล้องตามสมการ

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

5. ให้เส้นโค้ง C กำหนดโดย

$$\vec{R} = a\int \vec{g}(t) \times \vec{g}'(t)dt, \quad a \text{ เป็นค่าคงตัว } \neq 0$$

เมื่อ $\vec{g}(t)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันซึ่งคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $|\vec{g}(t)| = 1$

2. $[\vec{g}\vec{g}'\vec{g}''] \neq 0$

จงแสดงว่า $\kappa \neq 0$ และ $\tau = \frac{1}{a}$

6. ความบิดของเส้นโค้ง คือ $\tau = \frac{1}{a}$ เป็นค่าคงตัวแล้วเส้นโค้งนี้

สามารถเขียนอยู่ในรูป $\vec{R} = a\int \vec{g}(t) \times \vec{g}'(t)dt$ เมื่อ $|\vec{g}(t)| = 1$

และ $[\vec{g}\vec{g}'\vec{g}''] \neq 0$

7. ถ้า เส้นแนวฉาก ของเส้นโค้ง C และ เส้นคู่แนวฉากของเส้นโค้ง C* เป็นเส้นเดียวกันแล้ว จงแสดงว่า

$$\alpha(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa \ , \quad \alpha \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

โดยที่ κ และ τ เป็นความโค้ง และความบิด ของเส้นโค้ง C ตามลำดับ

4.3 The fundamental existence and uniqueness theorem

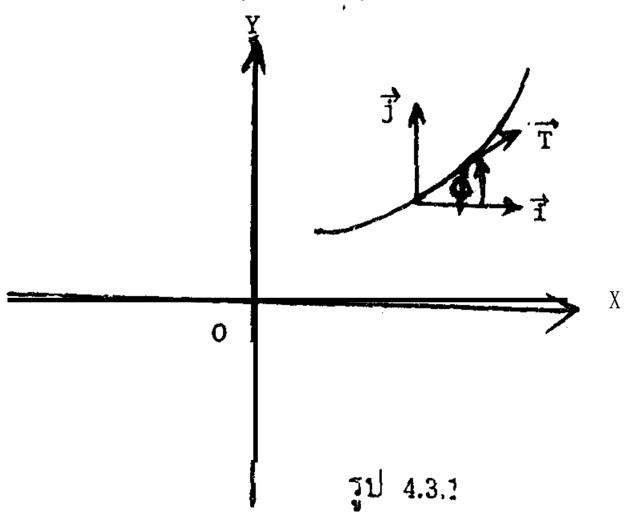
สมการเฟรอเนต์ คือ สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\vec{T}, \vec{N}$ และ $\vec{B}$ 3 สมการ (three vector differential equations of the first order in $\vec{T}, \vec{N}$ and $\vec{B}$) ถ้ากำหนด κ และ τ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องให้ แล้วสามารถหา $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ได้หรือไม่ คำตอบหาได้จาก ทฤษฎีบทที่ 4.3.1

ทฤษฎีบทที่ 4.3.1 Fundamental existence and uniqueness theorem for space curves.

ให้ $\kappa(s)$ และ $\tau(s)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $a \leq s \leq b$ แล้วมีเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นเส้นโค้งใน 3 มิติเพียงเส้นเดียวเท่านั้น ซึ่งมี $\kappa(s)$ เป็นความโค้ง, $\tau(s)$ เป็นความบิด และ s เป็น ตัวแปรเสริมธรรมชาติของ C

โดยทั่วไป ไม่สามารถแก้สมการเฟรอเนต์ โดยการอินทิเกรต

ในกรณีที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ นั่นคือ ถ้า $\tau \equiv 0$ แล้วการอินทิเกรตสมการเฟรอเนต์ย่อมจะทำได้ เนื่องจาก ให้ ϕ เป็นมุมที่ $\vec{T}$ ทำกับแกน X ดังรูป 4.3.1



รูป 4.3.1

จากรูป 4.3.1 จะได้ว่า

$$\vec{T} = \cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}$$

เนื่องจาก $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ ดังนั้น

$$\vec{N} = -\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}$$

$$\dot{\vec{T}} = \dot{\phi}(-\sin\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j})$$

$$= \dot{\phi}\vec{N}$$

$$\dot{\vec{N}} = -\dot{\phi}(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j})$$

$$= -\dot{\phi}\vec{T}$$

เมื่อ $\tau = 0$ สมการเฟรอเนต์ คือ

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}, \quad \dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T}$$

ดังนั้น

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds} = \kappa$$

หรือ $\phi = \int\kappa\, ds + c_1$

จาก $\dot{\vec{R}} = \vec{T}$

ดังนั้น $\vec{R} = \int\vec{T}\, ds + c_2$

$$= \int(\cos\phi(s)\vec{i} + \sin\phi(s)\vec{j})ds + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.3.1)$$

ข้อสังเกต ถ้า $\kappa \neq 0$ สำหรับทุก s แล้ว $\dot{\phi} \neq 0$ สำหรับทุกๆ s จึงทำให้ได้ว่า $\phi = \phi(s)$ เป็นตัวแปรเสริมในสมการ (4.3.1) และ

$$\vec{R} = \int(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j})\frac{ds}{d\phi}\, d\phi + c_2$$

$$= \int\frac{1}{\kappa(\phi)}(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j})\, d\phi + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.3.2)$$

ตัวอย่างที่ 4.3.1 สมการ $\kappa = \frac{1}{s}$, $\tau = 0$, $s > 0$ เป็นสมการในตัวของเส้นโค้งที่มีชื่อว่า เส้นเวียนก้นหอยลอการิทึม (logarithmic spiral)

ให้ $\phi = \kappa = \frac{1}{s}$

แล้ว $\phi = \ln s + C_1$

$\therefore \quad s = e^{(\phi-C_1)}$

และ $\kappa = \frac{1}{s}$

$= e^{-(\phi-C_1)}$

ดังนั้น $\vec{R} = \int \frac{1}{\kappa(\phi)}(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j})\,d\phi + C_2$

$= \int e^{(\phi-C_1)}(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j})\,d0 + C_2$

$= \int \left\{e^{(\phi-C_1)}\cos\phi\vec{i} + e^{(\phi-C_1)}\sin\phi\vec{j}\right\} d0 + C_2$

$\int e^{(\phi-C_1)}\cos\phi\,d\phi$

ให้ $u = e^{(\phi-C_1)}$, $du = e^{(\phi-C_1)}\,d\phi$

$dV = \cos\phi\,d\phi$, $V = \sin\phi$

ให้ $\int e^{(\phi-C_1)}\cos\phi\,d\phi = e^{(\phi-C_1)}\sin\phi - \int \sin 0\, e^{(\phi-C_1)}d\phi + C_3 \quad ..(1)$

ให้ $u = e^{(\phi-C_1)}$, $du = e^{(\phi-C_1)}\,d\phi$

$dw = \sin 0\,d\phi$, $w = -\cos\phi$

$\therefore \int \sin\phi\, e^{(\phi-C_1)}d\phi = -e^{(\phi-C_1)}\cos\phi - \int(-\cos\phi)e^{(\phi-C_1)}d\phi$

$= -e^{(\phi-C_1)}\cos\phi + \int\cos\phi e^{(\phi-C_1)}d\phi + C_4$

แทนค่าในสมการ (1),

$$\int e^{(\phi-C_1)}\cos\phi\,d\phi = e^{(\phi-C_1)}\sin\phi + e^{(\phi-C_1)}\cos\phi - \int\cos\phi e^{(\phi-C_1)}d\phi + C_3 + C_4$$

$$\int e^{(\phi-C_1)}\cos\phi\,d\phi = \frac{1}{2}e^{(\phi-C_1)}(\sin 0 + \cos\phi) + C_5$$

โดยที่ $C_5 = C_3 + C_4$

$$\int e^{(\emptyset - C_1)} \sin \emptyset \, d\emptyset$$

ให้ $u = e^{(\emptyset - C_1)}$, $du = e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset$

$dv = \sin \emptyset \, d\emptyset$, $v = -\cos \emptyset$

$$\int e^{(\emptyset - C_1)} \sin \emptyset \, d0 = -e^{(\emptyset - C_1)} \cos \emptyset - \int (-\cos \emptyset) e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset + C_6$$

$$= -e^{(\emptyset - C_1)} \cos \emptyset + \int \cos \emptyset e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset + C_6$$

$$\int \cos \emptyset e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset$$

ให้ $u = e^{(\emptyset - C_1)}$, $du = e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset$

$dw = \cos \emptyset \, d\emptyset$, $w = \sin \theta$

$$\int \cos\emptyset \, e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset = e^{(\emptyset - C_1)} \sin\emptyset - \int \sin\emptyset \, e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset + C,$$

$$\therefore \int e^{(\emptyset - C_1)} \sin \emptyset \, d\emptyset = -e^{(\emptyset - C_1)} \cos \emptyset + e^{(\emptyset - C_1)} \sin \emptyset - \int \sin\emptyset e^{(\emptyset - C_1)} d\emptyset + C_6 + C_7$$

$$= \frac{1}{2} e^{(\emptyset - C_1)} (-\cos \emptyset + \sin \theta) + C_8$$

โดยที่ $C_8 = C_6 + C_7$

$$\therefore \vec{R} = \frac{1}{2} e^{(\emptyset - C_1)} (\sin \emptyset + \cos \emptyset)\vec{i} + \frac{1}{2} e^{(\emptyset - C_1)} (\sin \emptyset - \cos \emptyset)\vec{j} + C_9$$

โดยที่ $C_9 = C_5 + C_8$

จาก $\cos(\emptyset - \frac{\pi}{4}) = \cos\emptyset \cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta \sin\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\emptyset + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\emptyset$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\emptyset + \sin\emptyset)$$

$$\sin(\emptyset - \frac{\pi}{4}) = \sin\emptyset \cos\frac{\pi}{4} - \cos\emptyset \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\phi - \cos\phi)$$

$$\therefore \quad \vec{R} = \frac{1}{2}e^{(\phi - C_1)}\left[\sqrt{2}\cos(\phi - \tfrac{\pi}{4})\vec{i} - \sqrt{2}\sin(\phi - \tfrac{\pi}{4})\vec{j}\right] + C_9$$

ถ้าให้ $C_1 = \frac{\pi}{4}$, $C_9 = 0$ และ $\phi - \frac{\pi}{4} = \theta$ จะได้

$$\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}\left[\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right]$$

ซึ่งคือเส้นโค้งที่มีชื่อว่าเส้นเวียนก้นหอยลอการิทึม $\left(r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}\right)$

ตอบ

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาสมการของเส้นโค้งซึ่งมีสมการในตัว คือ

$$\kappa = \left(\frac{1}{2as}\right)^{1/2}, \quad \tau = 0, \quad a > 0,\ s > 0$$

2. จงแสดงว่าเส้นโค้งซึ่งมีสมการในตัว คือ $\kappa = \sqrt{2}/(s^2+4)$, $\tau = \sqrt{2}/(s^2+4)$ จะเป็น ฮีลิกซ์ ที่อยู่บนผิวทรงกระบอก ซึ่งมี ภาคตัดขวาง (cross section) เป็น แคทีนารี

4.4 อาวัต (Involutes)

เส้นสัมผัสทั้งหลายของเส้นโค้ง C ทำให้เกิดผิวขึ้นผิวหนึ่ง เรียกว่าผิวสัมผัส (tangent surface) ของ C เส้นโค้ง C^* ซึ่งอยู่บนผิวสัมผัสของ C และตัดตั้งฉากกับเส้นสัมผัสทั้งหลายเรียกว่าเส้นสัมผัสทั้งหลายเรียกว่าอาวัตของ C

ถ้า C กำหนดโดย $\vec{R}(s)$ ดังรูป 4.4.1 และถ้า R เป็นจุดบน C ลากเส้นสัมผัสกับ C ที่จุด R ไปตัดกับ C^* ที่จุด R^* แล้ว $\vec{R}^* - \vec{R}(s)$ จะเป็นสัดส่วนกับ $\vec{T}(s)$

ดังนั้น C^* จะมีตัวแทน ดังนี้

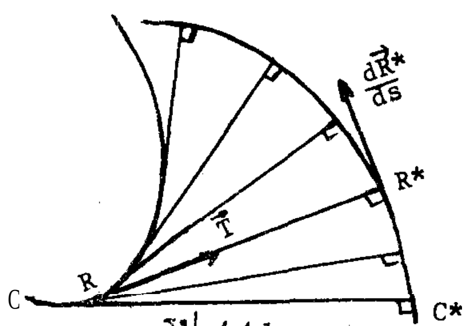
$$\vec{R}^* = \vec{R}(s) + \lambda(s)\,\vec{T}(s)$$

เวกเตอร์สัมผัสของ C^* คือ

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \dot{\vec{R}}(s) + \lambda(s)\,\dot{\vec{T}}(s) + \dot{\lambda}\vec{T}$$

$$= \vec{T} + \lambda\kappa\vec{N} + \dot{\lambda}\vec{T}$$

$$= (1+\dot{\lambda})\vec{T} + \lambda\kappa\vec{N}$$



รูป 4.4.1

$\frac{d\vec{R}^*}{ds}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของ C นั่นคือ

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds}\cdot\vec{T} = 0$$

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds}\cdot\vec{T} = (1+\dot{\lambda})\ \vec{T}\cdot\vec{T} + \lambda\kappa\vec{N}\cdot\vec{T}$$

$$= 1+\dot{\lambda}$$

$$\therefore\ 1+\dot{\lambda} = 0$$

อินทิเกรต จะได้

$$\lambda = -s + c \quad , \quad c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังนั้น จะมีวงศ์อนันต์ (infinite family) ของ อาวัต

$$\vec{R}^* = \vec{R} + (c-s)\vec{T}$$

ข้อสังเกต ถ้า $\vec{R}$ มีจุดเปลี่ยนเว้า แล้ว $\vec{R}^*$ จะไม่เป็น ตัวแทนปรกติ เนื่องจาก

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \frac{d\vec{R}}{ds} + (c-s)\frac{d\vec{T}}{ds} - \vec{T}$$

$$= \vec{T} + (c-s)\dot{\vec{T}} - \vec{T}$$

$$= (c-s)\dot{\vec{T}}$$

$$= (c-s)\kappa\vec{N}$$

ที่จุดเปลี่ยนเว้า ของเส้นโค้ง $\vec{R}$ จะมี $\kappa = 0$

ดังนั้น $\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \vec{0}$

นั่นคือ $\vec{R}^*$ ไม่เป็น ตัวแทนปรกติ

ดังนั้น เมื่อเราสมมติว่า เส้นโค้ง C มี $\kappa \neq 0$ แล้วจะได้ว่า κ^* ซึ่งเป็นความโค้งของอาวัตของ C ก็ไม่เท่ากับศูนย์ด้วย และ

$$\kappa^* = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}$$

เมื่อเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ที่จุด R กำหนดโดย

$$\vec{R}^* = \vec{R} + \lambda\vec{T} \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$\frac{d\vec{R}^*}{d\lambda} = \vec{0} + \vec{T}$$

แล้ว $\left|\frac{d\vec{R}^*}{d\lambda}\right| = |\vec{T}| = 1$

นั่นคือ λ เป็นตัวแปรเสริมธรรมชาติ

เนื่องจาก $\vec{R}^* = \vec{R}$ ถ้า $\lambda = 0$

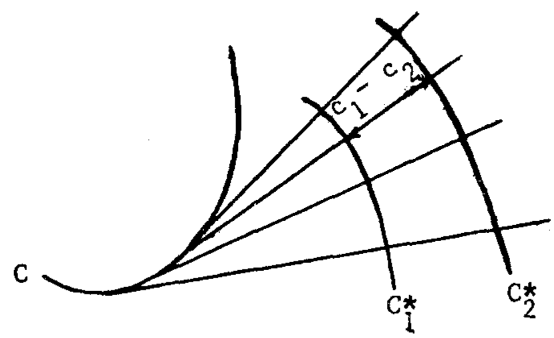
นั่นคือ $|\lambda|$ คือระยะทางระหว่างจุด R^* บนเส้นสัมผัส และ จุด R บน C

กำหนดให้ $C_1^* : \vec{R}^* = \vec{R} + (c_1-s)\vec{T}$

และ $C_2^* : \vec{R}^* = \vec{R} + (c_2-s)\vec{T}$

เป็นอาวัตของ C ดังรูป 4.4.2 แล้ว ระยะทางระหว่าง C_1^* และ C_2^* คือ

$$|(c_1-s)-(c_2-s)| = |c_1-c_2|$$



รูป 4.4.2

ตัวอย่างที่ 4.4.1 จงหาอาวัตของ ฮีลิกซ์ ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a > 0$$

วิธีทำ
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k})$$

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$= (a^2+b^2)^{1/2}t$$

ดังนั้น อาวัต คือ

$$\vec{R}^* = \vec{R} + (c-s)\vec{T}$$

$$= [a\cos t - a(c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t]\vec{i}$$

$$+ [a\sin t + a(c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t]\vec{j}$$

$$+ [bt + (c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}b]\vec{k}$$

ให้ $\gamma = c(a^2+b^2)^{-1/2}$ และ

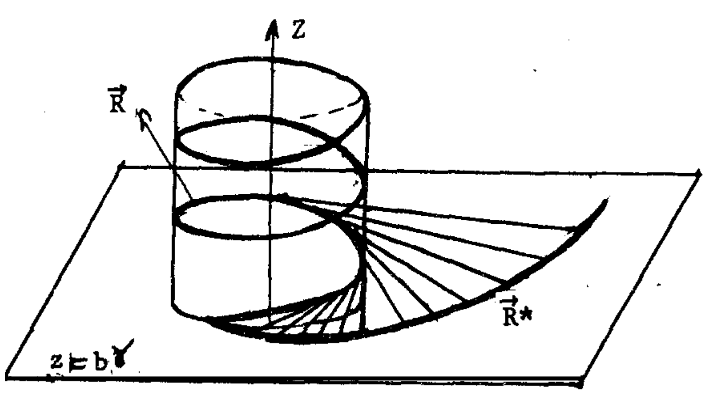
จาก $t = s(a^2+b^2)^{-1/2}$

$$\therefore \quad \vec{R}^* = a[(\cos t + t\sin t) - \gamma\sin t]\vec{i}$$

$$+ a[(\sin t - t\cos t) + \gamma\cos t]\vec{j} + b\gamma\vec{k}$$

อาวัต นี้ เป็นเส้นโค้งในระนาบ ซึ่งอยู่บนระนาบ

$z = b\gamma$ ดังรูป 4.4.3



รูป 4.4.3

4.5 วิวัฒน์ (Evolutes)

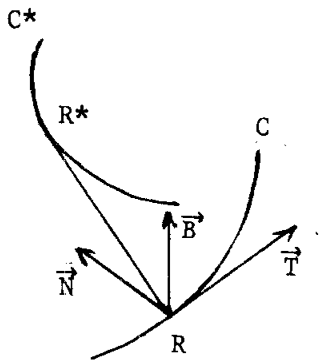
ถ้าเส้นโค้ง C เป็นอาวัต ของเส้นโค้ง C* แล้ว C* เป็นวิวัฒน์ของ C นั่นคือ ถ้ากำหนด C ให้ แล้ว วิวัฒน์ คือ เส้นโค้ง ซึ่งเส้นสัมผัสของเส้นโค้งเหล่านี้ตั้งฉากกับ C

ถ้า C กำหนดโดย $\vec{R} = \vec{R}(s)$ และถ้า $R^*(s)$ เป็นจุดบนวิวัฒน์ ลากเส้นสัมผัสกับ C^* ไปตัดกับ C ที่จุด $R(s)$ แล้ว

$$\vec{R}^*(s) - \vec{R}(s) = \alpha(s)\,\vec{N}(s) + \beta(s)\,\vec{B}(s)$$

$$\vec{R}^*(s) = \vec{R}(s) + \alpha(s)\,\vec{N}(s) + \beta(s)\,\vec{B}(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.5.1)$$

ดังรูป 4.5.1 $\vec{R}^* - \vec{R}(s)$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}(s)$ และเป็นผลบวกเชิงเส้น ของ $\vec{N}(s)$ และ $\vec{B}(s)$



รูป 4.5.1

หาอนุพันธ์สมการ (4.5.1) จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \dot{\vec{R}} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha\dot{\vec{N}} + \dot{\beta}\vec{B} + \beta\dot{\vec{B}}$$

$$= \vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) + \dot{\beta}\vec{B} - \beta\tau\vec{N}$$

$$= (1-\alpha\kappa)\vec{T} + (\dot{\alpha}-\beta\tau)\vec{N} + (\dot{\beta}+\tau\alpha)\vec{B}$$

เนื่องจาก $\frac{d\vec{R}^*}{ds}$ สัมผัสกับ C^* ด้วย และขนานกับ $\vec{R}^* - \vec{R} = \alpha\vec{N} + \beta\vec{B}$ ดังนั้นจะมี λ ซึ่ง

$$1-\alpha\kappa = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.5.2)$$

$$\dot{\alpha}-\beta\tau = \lambda\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.5.3)$$

$$\dot{\beta}+\tau\alpha = \lambda\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.5.4)$$

จากสมการ (4.5.2), $\alpha = \frac{1}{\kappa}$

จากสมการ (4.5.3), (4.5.4), กำจัด λ

$$(4.5.3)\times\beta \;;\quad \beta(\dot{\alpha}-\beta\tau) = \lambda\alpha\beta \quad \ldots\ldots \quad (4.5.5)$$

$$(4.5.4)\times\alpha \;;\quad \alpha(\dot{\beta}+\tau\alpha) = \lambda\alpha\beta \quad \ldots\ldots \quad (4.5.6)$$

$$(4.5.5)-(4.5.6),\quad \beta(\dot{\alpha}-\beta\tau)-\alpha(\dot{\beta}+\tau\alpha) = 0$$

$$\beta\dot{\alpha}-\beta^2\tau = \alpha\dot{\beta}+\alpha^2\tau$$

$$\beta\dot{\alpha}-\alpha\dot{\beta} = (\alpha^2+\beta^2)\tau$$

$$\frac{\beta\dot{\alpha}-\alpha\dot{\beta}}{\alpha^2} = \left[1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]\tau$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left[1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]\tau$$

$$-\frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \tau$$

$$\frac{d}{ds}\left(\text{arc cot}\,\frac{\beta}{\alpha}\right) = \tau$$

$$\text{arc cot}\,\frac{\beta}{\alpha} = \int\tau(s)ds + \text{ค่าคงตัว}$$

$$\beta = \alpha\cot\left(\int\tau(s)ds + \text{ค่าคงตัว}\right)$$

ดังนั้นจะมี วงศ์อนันต์ของวิวัฒน์

$$\vec{R}^* = \vec{R} + \frac{1}{\kappa}\vec{N} + \frac{1}{\kappa}\cot\left(\int\tau(s)ds + \text{ค่าคงตัว}\right)\vec{B}$$

ข้อสังเกต เราต้องสมมติว่า $(\dot{\alpha}-\beta\tau)^2 + (\dot{\beta}+\tau\alpha)^2 \neq 0$ เนื่องจาก เมื่อหาอนุพันธ์

ของสมการ $\vec{R}^* = \vec{R} + \alpha\vec{N} + \beta\vec{B}$ จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = (\dot{\alpha} - \beta\tau)\vec{N} + (\dot{\beta} + \tau\alpha)\vec{B}$$

เมื่อ $(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2 = 0$ แล้ว C^* **ไม่เป็น** เส้นโค้งปรกติ **ดังนั้น** **จึงต้องสมมติว่า** $(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2 \neq 0$

ถ้า C เป็นเส้นโค้งในระนาบ แล้ว $\tau = 0$, $\alpha = \gamma\beta$, γ เป็นค่าคงตัว และ

$$(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2$$
$$= (\dot{\kappa}^2/\kappa^4)(1 + \gamma^2)$$

ดังนั้น สำหรับเส้นโค้งในระนาบ เราต้องสมมติว่า $\dot{\kappa} \neq 0$

ตัวอย่างที่ 4.5.1 ถ้า C เป็นเส้นโค้งในระนาบ แล้ว $\tau = 0$ แล้ว วิวัฒน์ คือ

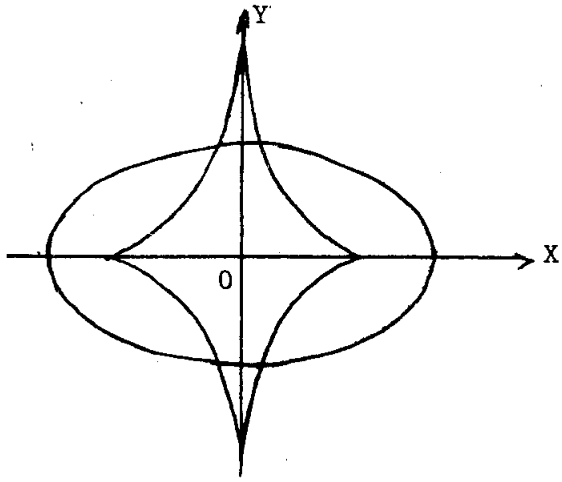
$$\vec{R}^* = \vec{R} + \frac{1}{\kappa}\vec{N} + \frac{\gamma}{\kappa}\vec{B} , \quad \gamma \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังรูป (4.5.2) ถ้า $\gamma = 0$ แล้ววิวัฒน์ อยู่บนระนาบเดียวกับ C ซึ่งเป็นระนาบสัมผัสประชิดของ C

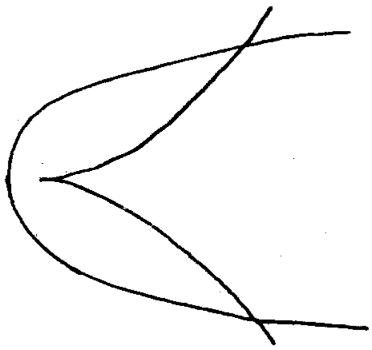
ความจริงแล้ว มีวิวัฒน์ เพียงอันเดียวเท่านั้นที่อยู่ในระนาบเดียวกับ C ซึ่งเรียกว่า วิวัฒน์ระนาบ (plane evolute) ของ C

เนื่องจาก $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว วิวัฒน์อื่น ๆ จะอยู่บนทรงกระบอก ซึ่งตัวก่อกำเนิด (generator) ตั้งฉากกับระนาบซึ่งมี C อยู่ และวิวัฒน์ระนาบของ C ก็อยู่บนทรงกระบอกนี้ด้วย

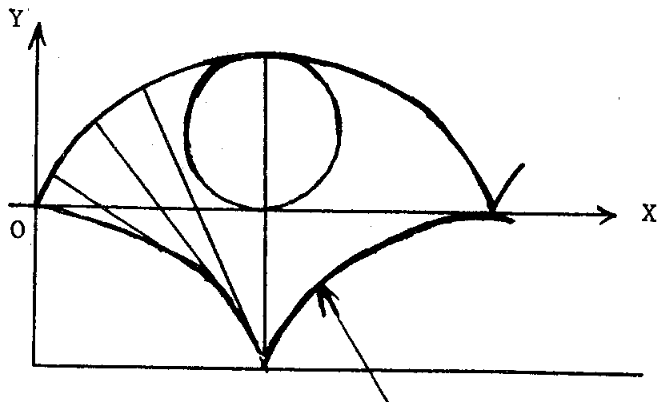
ตัวอย่างที่ 4.5.2 วิวัฒน์ของวงรี



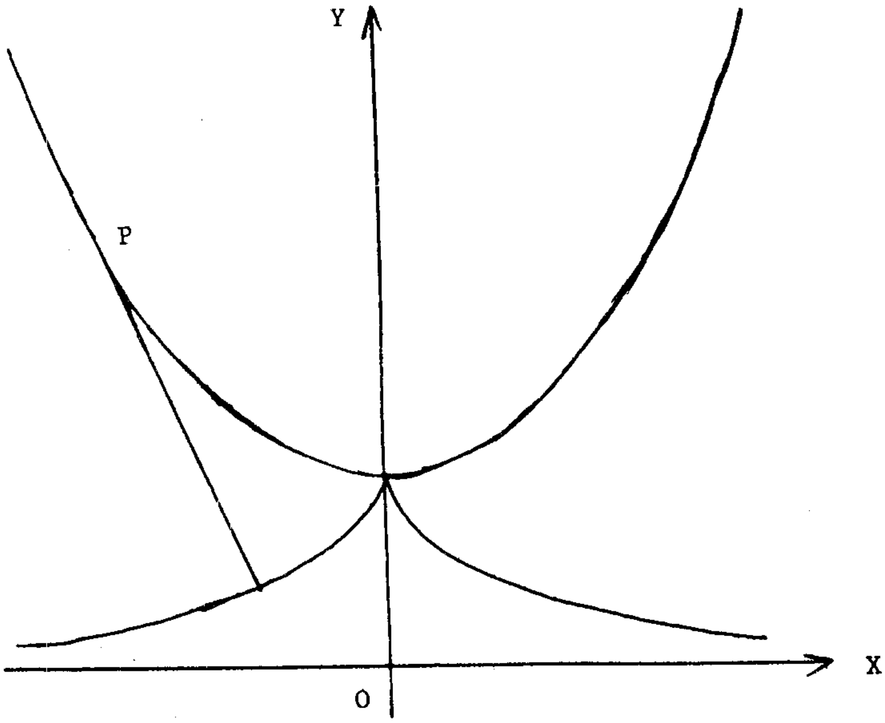
ตัวอย่างที่ 4.5.3 วิวัฒน์ของพาราโบลา



ตัวอย่างที่ 4.5.4 วิวัฒน์ของไซคลอยด์ คือ ไซคลอยด์



ตัวอย่างที่ 4.5.5 วิวัฒน์ของโค้งจอมแห คือ แคทีนารี



แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาสมการของอาวัตของวงกลม $\vec{R} = a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}$, $a > 0$

2. จงแสดงว่าความโค้งของอาวัตของ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ซึ่งมีสมการ คือ
   $\vec{R}^* = \vec{R} + (c-s)\vec{T}$ ถูกกำหนดโดย $\kappa^{*2} = \dfrac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}$

3. จงแสดงว่า เวกเตอร์คู่แนวฉากของอาวัตของ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ คือ

   $\vec{B}^* = \dfrac{\kappa\vec{B} + \tau\vec{T}}{|(c-s)\kappa|\kappa^*}$

4. จงหาสมการของผิวสัมผัส (tangent surface) กับเส้นโค้ง
   $\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$

5. จงพิสูจน์ว่าเส้นแนวฉากของ C^* ซึ่งเป็นวิวัฒน์ของ C ขนานกับเส้นสัมผัสของ C

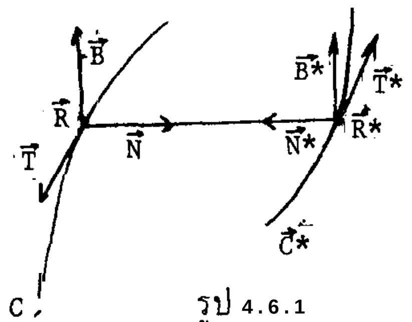
6. จงหาสมการของวิวัฒน์ของ ฮีลิกซ์ ซึ่งแทนด้วย

   $\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$, $a > 0$

4.6 เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ (Bertrand curves)

เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ ค้นพบโดย เจ.เบอร์แทรนด์ (J. Bertrand) ในปี ค.ศ.1850

เส้นโค้ง C(s) และ เส้นโค้ง C*(s) เรียกว่า เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ ถ้าสำหรับแต่ละ s จะได้ว่า เส้นแนวฉากของ C ที่ $s = s_0$ คือ เส้นแนวฉากของ C* ที่ $s = s_0$ (s ไม่จำเป็นต้องเป็นความยาวโค้งบน C และ C*) นั่นคือ C และ C* มี เส้นแนวฉากร่วมกัน (common principal normal lines) ดูรูป 4.6.1



รูป 4.6.1

เรากล่าวว่า C^* เป็น Bertrand mate สำหรับ C ถ้า C และ C^* เป็นเส้นโค้งเบอร์แทรนด์ (ข้อสังเกต จะได้ว่า $\vec{N} = \pm \vec{N}_{C^*}$)

ตัวอย่างที่ 4.6.1 ถ้าเส้นโค้ง C และเส้นโค้ง C* เป็น เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ แล้ว จงแสดงว่า

ก. ระยะทางระหว่างจุดที่สมนัยกัน (corresponding points) บน C และ C^* มีค่าคงตัว

ข. มุมระหว่างเส้นสัมผัสที่สมนัยกัน (corresponding tangent lines) บน C และ C^* มีค่าคงตัว

วิธีทำ ให้ C ถูกกำหนดโดย $\vec{R} = \vec{R}(s)$

ให้ R^* เป็นจุดบน C^*

และให้ เส้นแนวฉากที่จุด R*

เป็นเส้นแนวฉากที่จุด R ด้วย

จะได้ว่า $\vec{R}^* - \vec{R}(s)$ ขนานกับ $\vec{N}(s)$ ดังนั้น

$$\vec{R}^* - \vec{R}(s) = \alpha(s)\,\vec{N}(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.6.1)$$

$$\vec{R}^* = \vec{R}(s) + \alpha(s)\,\vec{N}(s) \quad \ldots\ldots \quad (4.6.2)$$

หาอนุพันธ์สมการ (4.6.2) จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \dot{\vec{R}} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha\dot{\vec{N}}$$

$$= \vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$$= \vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N} - \alpha\kappa\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}$$

$$= (1-\alpha\kappa)\vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha\tau\vec{B}$$

แต่ $\frac{d\vec{R}^*}{ds}$ สัมผัสกับ C^* ดังนั้น $\frac{d\vec{R}^*}{ds}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{N}^*$ และ $\vec{N}$

ดังนั้น $\vec{N}.\frac{d\vec{R}^*}{ds} = 0$

$$\vec{N}.\left\{(1-\alpha\kappa)\vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N} + \alpha\tau\vec{B}\right\} = 0$$

$$(1-\alpha\kappa)\vec{N}.\vec{T} + \dot{\alpha}\vec{N}.\vec{N} + \alpha\tau\vec{N}.\vec{B} = 0$$

เนื่องจาก $\vec{N}.\vec{T} = 0$, $\vec{N}.\vec{N} = 1$ และ $\vec{N}.\vec{B} = 0$

ดังนั้น $\dot{\alpha} = 0$, α เป็นค่าคงตัว

และระยะทางระหว่างจุดที่สมนัยกัน คือ

$$|\vec{R}^* - \vec{R}(s)| = |\alpha\vec{N}(s)| \quad \text{(จากสมการ (4.6.1))}$$

$$= |\alpha|\,|\vec{N}(s)|$$

$$= |\alpha| \quad \text{(เนื่องจาก } |\vec{N}(s)| = 1)$$

$|\alpha|$ เป็นค่าคงตัว

ตอบ

ข. ให้ $\vec{T}$ และ $\vec{T}^*$ เป็นเวกเตอร์หน่วยสัมผัสกับ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ และ $\vec{R}^* = \vec{R} + \alpha\vec{N}$ ตามลำดับ และ พิจารณาอนุพันธ์ของ $\vec{T}^*.\vec{T}$

$$\frac{d}{ds}(\vec{T}^*.\vec{T}) = \vec{T}^*.\dot{\vec{T}} + \frac{d\vec{T}^*}{ds}.\vec{T}$$

$$= \vec{T}^*.\dot{\vec{T}} + \frac{d\vec{T}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}.\vec{T}$$

$$= \vec{T}^*.\kappa\vec{N} + \left(\frac{d\vec{T}^*}{ds^*}.\vec{T}\right)\frac{ds^*}{ds}$$

$$= \vec{T}^*.\,\kappa\vec{N} + (\kappa^*\vec{N}^*.\ \vec{T})\,\frac{ds^*}{ds}$$

$$= \kappa(\vec{T}^*.\ \vec{N}) + \kappa^*\frac{ds^*}{ds}(\vec{N}^*.\ \vec{T})$$

เนื่องจาก $\vec{N}^* = \pm\vec{N},\ \vec{N}^*$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}^*$

ดังนั้น $\frac{d}{ds}(\vec{T}^*.\ \vec{T}) = 0$ (เนื่องจาก $\vec{T}^*.\ \vec{N} = 0$ และ $\vec{N}^*.\ \vec{T} = 0$)

$\therefore\ \vec{T}^*.\ \vec{T}$ เป็นค่าคงตัว

จาก $\vec{T}^*.\ \vec{T} = |\vec{T}^*|\,|\vec{T}|\ \cos\beta$ เมื่อ β เป็นมุม ระหว่าง $\vec{T}^*$ และ $\vec{T}$

และ $|\vec{T}^*| = |\vec{T}| = 1$

ดังนั้น $\vec{T}^*.\ \vec{T} = \cos\beta$ ซึ่งเป็นค่าคงตัว

นั่นคือ β จะมีค่าคงตัว **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.6.2 ถ้าเส้นโค้ง C มี $\tau \neq 0$ จงแสดงว่า C เป็น เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ (นั่นคือจะมีเส้นโค้ง C^* ซึ่ง C และ C^* เป็น เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ ก็ต่อเมื่อ มี γ และ α ซึ่ง $\kappa + \gamma\tau = \frac{1}{\alpha}$ โดยที่ γ และ α เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ สมมติว่า C ถูกกำหนดโดย $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ให้เส้นโค้ง C มี $\tau \neq 0$ และ $\kappa + \gamma\tau = \frac{1}{\alpha}$ และ C^* ถูกกำหนดโดย

$$\vec{R}^* = \vec{R}(s) + \alpha\vec{N}(s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.6.3)$$

หาอนุพันธ์สมการ (4.6.3) จะได้ว่า

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \dot{\vec{R}} + \alpha\dot{\vec{N}}(s)$$

$$= \vec{T} + \alpha(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$$= \vec{T} - \alpha\kappa\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}$$

$$= (1-\alpha\kappa)\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}$$

จาก $\kappa + \gamma\tau = \frac{1}{\alpha}$,

$$\alpha\kappa + \gamma\alpha\tau = 1$$

$$\gamma\alpha\tau = 1 - \alpha\kappa$$

$$\therefore \frac{d\vec{R}^*}{ds} = \gamma\alpha\tau\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}$$

$$= \alpha\tau(\gamma\vec{T} + \vec{B})$$

$$\left|\frac{d\vec{R}^*}{ds}\right| = |\alpha\tau|(\gamma^2 + 1)^{1/2}$$

$$\vec{T}^* = \frac{d\vec{R}^*}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}^*}{ds}\right|$$

$$= \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma\vec{T} + \vec{B})$$

$$\frac{d\vec{T}^*}{ds} = \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma\dot{\vec{T}} + \dot{\vec{B}})$$

$$= \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma\kappa\vec{N} - \tau\vec{N})$$

$$= \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma\kappa - \tau)\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{T}^*}{ds^*} = \frac{d\vec{T}^*}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}^*}{ds}\right|$$

$$\kappa^*\vec{N}^* = \pm\frac{(\gamma\kappa - \tau)\vec{N}}{|\alpha\tau|(\gamma^2+1)}$$

ดังนั้น $\vec{N}^* = \pm\vec{N}$

แสดงว่า C และ C* เป็นเส้นโค้งเบอร์แทรนด์

ในทางกลับกัน ถ้า C และ C* เป็นเส้นโค้งเบอร์แทรนด์

C ถูกกำหนดโดย $\vec{R} = \vec{R}(s)$ และ $\tau \neq 0$

C* ถูกกำหนดโดย $\vec{R}^* = \vec{R}(s) + \alpha\vec{N}(s)$, α เป็นค่าคงตัว $\neq 0$

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \dot{\vec{R}}(s) + \alpha\dot{\vec{N}}(s)$$

$$= \vec{T} + \alpha(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B})$$

$$= (1-\alpha\kappa)\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}$$

$$\vec{T}^* = \frac{d\vec{R}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}$$

$$= \left[(1-\alpha\kappa)\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}\right]\frac{ds}{ds^*} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.6.4)$$

จากตัวอย่างที่ 4.6.1 ข้อ ข. จะได้ว่า

$$\vec{T}.\vec{T}^* = \text{ค่าคงตัว} = \cos\beta$$

$$\vec{T}.\vec{T}^* = \vec{T}.\left[(1-\alpha\kappa)\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}\right]\frac{ds}{ds^*}$$

$$\cos\beta = \left[(1-\alpha\kappa)\vec{T}.\vec{T} + (\alpha\tau)\vec{T}.\vec{B}\right]\frac{ds}{ds^*}$$

เนื่องจาก $\vec{T}.\vec{T} = 1$ และ $\vec{T}.\vec{B} = 0$

ดังนั้น $\cos\beta = (1-\alpha\kappa)\frac{ds}{ds^*}$ .... (4.6.5)

เนื่องจาก $\vec{T}^*$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{T}$ และ $\vec{B}$

และ $\vec{T}.\vec{T}^* = \cos\beta$

จึงได้ว่า

$$\vec{B}.\vec{T}^* = \pm\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.6.6)$$

จากสมการ (4.6.4),

$$\vec{B}.\vec{T}^* = \left[(1-\alpha\kappa)\vec{B}.\vec{T} + \alpha\tau\vec{B}.\vec{B}\right]\frac{ds}{ds^*}$$

เนื่องจาก $\vec{B}.\vec{T} = 0$ และ $\vec{B}.\vec{B} = 1$

ดังนั้น $\vec{B}.\vec{T}^* = \alpha\tau\frac{ds}{ds^*}$ ....(4.6.7)

จากสมการ (4.6.6) และสมการ (4.6.7) จะได้ว่า

$$\alpha\tau\frac{ds}{ds^*} = \pm\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.6.8)$$

เนื่องจาก $\alpha \neq 0$, $\tau \neq 0$ และ $\frac{ds}{ds^*} \neq 0$

ดังนั้น $\sin\beta \neq 0$

จากสมการ (4.6.5) จะได้ว่า

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\cos\beta}{1-\alpha\kappa}$$

จากสมการ (4.6.8) จะได้ว่า

$$\frac{ds}{ds^*} = \pm\frac{\sin\beta}{\alpha\tau}$$

ดังนั้น
$$\pm\frac{\sin\beta}{\alpha\tau} = \frac{\cos\beta}{1-\alpha\kappa}$$

$$\pm(1-\alpha\kappa)\sin\beta = \alpha\tau\cos\beta$$

$$\pm\frac{1}{\alpha\tau} \mp \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$= \cot\beta$$

$$\pm\frac{1}{\alpha} \mp \kappa = \pm\tau\cot\beta$$

$$\pm\frac{1}{\alpha} = \pm\tau\cot\beta \pm \kappa$$

$$\frac{1}{\alpha} = \tau\gamma + \kappa \text{ เมื่อ } \gamma = \pm\cot\beta$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 4.5

1. ถ้าเส้นโค้ง C มี $\tau \neq 0$ จงแสดงว่าจะมีเส้นโค้ง C^* ซึ่ง C และ C^* เป็นเส้นโค้งเบอร์แทรนด์ ก็ต่อเมื่อ C เป็น ฮีลิกซ์วงกลม

2. **จงแสดงว่า** อาวัต 2 อันของเส้นโค้งในระนาบเป็น เส้นโค้งเบอร์แทรนด์ (ดูตัวอย่างที่ 4.6.1)