บทที่ 3
แนวคิดที่เกี่ยวกับเส้นโค้ง
(Concept of a Curve)

3.1 ตัวแทนปรกติ

(Regular Representations)

ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ (regular parametric representation) หมายถึง เวกเตอร์ฟังก์ชัน

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \quad , \quad t \in I \ldots\ldots.(3.1.1)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

1. $\vec{R}(t)$ อยู่ใน ชั้น C^1 ในช่วง I
2. $\vec{R}'(t) \neq \vec{0}$ สำหรับ t ทุก ๆ ค่า ในช่วง I

t เรียกว่า ตัวแปรเสริม

ถ้ามูลฐานอยู่ใน E^3 แล้ว สมการ $\vec{R} = \vec{R}(t)$ จะสมมูล (equivalent) กับสมการสเกลาร์ 3 สมการต่อไปนี้

$$r_1 = r_1(t), \quad r_2 = r_2(t), \quad r_3 = r_3(t), \quad t \in I \ldots.(3.1.2)$$

ซึ่งเป็นส่วนประกอบของ $\vec{R} = \vec{R}(t)$ เมื่อเทียบกับมูลฐาน

สรุป $\vec{R} = \vec{R}(t)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติก็ต่อเมื่อ $r_i(t)$ แต่ละตัวอยู่ใน C^1 และสำหรับ t แต่ละตัว ในช่วง I จะมี r_i' อย่างน้อยที่สุด 1 ตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 3.1.1 $\vec{R} = (t+1)\vec{i}+(t^2+3)\vec{j}, \quad -\infty < t < \infty$ เป็น

ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ เนื่องจาก

$\vec{R}' = \vec{i}+2t\vec{j}$ มีความต่อเนื่อง และ

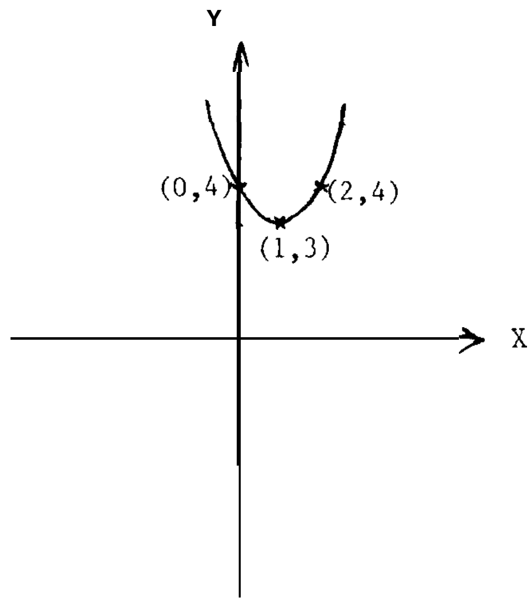
$\vec{R}' \neq \vec{0}$ สำหรับ t ทุก ๆ ค่า

กราฟของฟังก์ชัน คือ พาราโบลา ดังรูป 3.1.1

$t = 0, \quad x = 1, \quad y = 3$

$t = 1, \quad x = 2, \quad y = 4$

$t = -1, \quad x = 0, \quad y = 4$



รูป 3.1.1

ตัวอย่างที่ 3.1.2 กราฟของสมการ $r = 2\cos\theta - 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

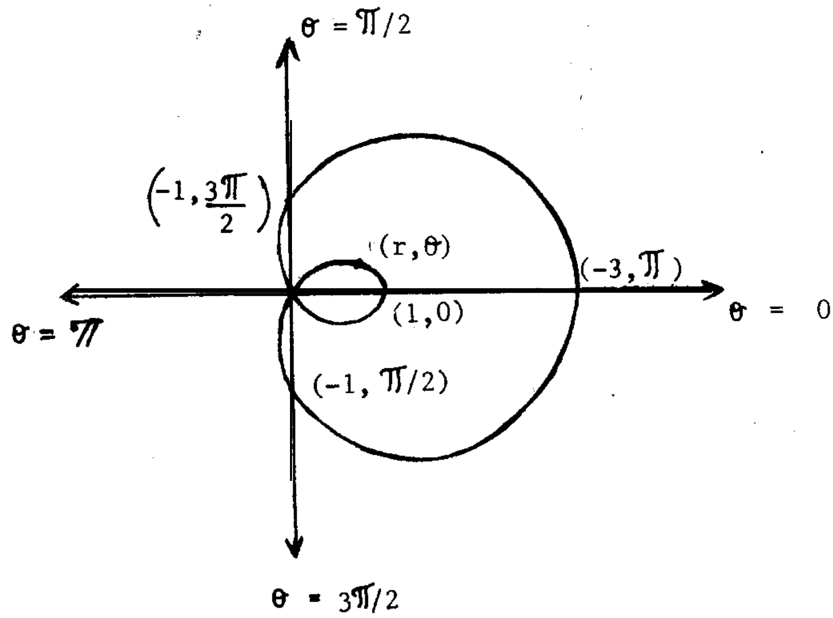
ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ดังรูป 3.1.2

ระบบพิกัดเชิงขั้ว และระบบพิกัดฉากสัมพันธ์กันดังนี้

$$x = r\cos\theta , \qquad y = r\sin\theta$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta) \\ y = (2\cos\theta - 1)(\sin\theta) \end{array}\right\} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{R} = \cos\theta(2\cos\theta - 1)\vec{i} + \sin\theta(2\cos\theta - 1)\vec{j}$$



รูป 3.1.2

$\vec{R}$ เป็นตัวแทนปรกติ เนื่องจาก

$$\vec{R}' = \left[-4\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\right]\vec{i} + \left[2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - \cos\theta\right]\vec{j}$$

$\vec{R}'$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ

$$
\begin{aligned}
|\vec{R}'| &= \left[(-4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)^2+(2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta)^2\right]^{1/2} \\
&= \left[16\sin^2\theta\cos^2\theta-8\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta+4\sin^4\theta+4\cos^4\theta-8\sin^2\theta\cos^2\theta \right. \\
&\qquad \left. +4\sin^2\theta\cos\theta-4\cos^3\theta+\cos^2\theta\right]^{1/2} \\
&= \left[8\sin^2\theta\cos^2\theta-4\sin^2\theta\cos\theta+4\sin^4\theta+4\cos^4\theta-4\cos^3\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right]^{1/2} \\
&= \left[(4\sin^4\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta+4\cos^4\theta)-(4\sin^2\theta\cos\theta+4\cos^3\theta)+1\right]^{1/2} \\
&= \left[4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-4\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1\right]^{1/2} \\
&= (4-4\cos\theta+1)^{1/2} \\
&= \sqrt{5-4\cos\theta} \neq 0 \quad \text{สำหรับ } \theta \text{ ทุก ๆ ค่า}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\vec{R'} \neq a$ สำหรับ θ ทุก ๆ ค่า **ตอบ**

$\vec{R} = \vec{R}(t)$ ซึ่งเป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ บนช่วง I สามารถมีจุดตัดซ้อน (multiple points) นั่นคือ ถ้า $t_1 \neq t_2$ ในช่วง I แล้ว

$$\vec{R}(t_1) = \vec{R}(t_2)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.1.1 ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(t)$ เป็นตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติบนช่วง I แล้ว สำหรับแต่ละ t_o ในช่วง I จะมีย่านของ t_o ซึ่ง $\vec{R}(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3.1.3 $\vec{R} = a\cos\theta\vec{i}+a\sin\theta\vec{j}, \quad a \neq 0, \quad (-\infty<\theta<\infty)$

เป็นตัวแทนปรกติของวงกลม ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ $|a|$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

เนื่องจาก $\dfrac{d\vec{R}}{d\theta} = -a\sin\theta\vec{i}+a\cos\theta\vec{j}$

มีความต่อเนื่อง สำหรับ θ ทุก ๆ ค่า และ

$$\left|\frac{d\vec{R}}{d\theta}\right| = \left|-a\sin\theta\vec{i} + a\cos\theta\vec{j}\right|$$

$$= \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}$$

$$= |a| \neq 0$$

ขอให้สังเกตว่า ทุก ๆ จุดบนตัวแทนนี้ มีจุดตัดซ้อน

เนื่องจากสำหรับ θ_0 ใด ๆ

ให้ $\theta_1 = \theta_0 \quad , \quad \theta_2 = \theta_0 + 2\pi$

$$\vec{R}_1 = a\cos\theta_0\vec{i} + a\sin\theta_0\vec{j}$$

$$\vec{R}_2 = a\cos(\theta_0+2\pi)\vec{i} + a\sin(\theta_0+2\pi)\vec{j}$$

$$= a\cos\theta_0\vec{i} + a\sin\theta_0\vec{j}$$

$\therefore \theta_1 \neq \theta_2$ แต่ $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$

แสดงว่า ทุก ๆ จุดบนตัวแทนนี้มีจุดตัดซ้อน

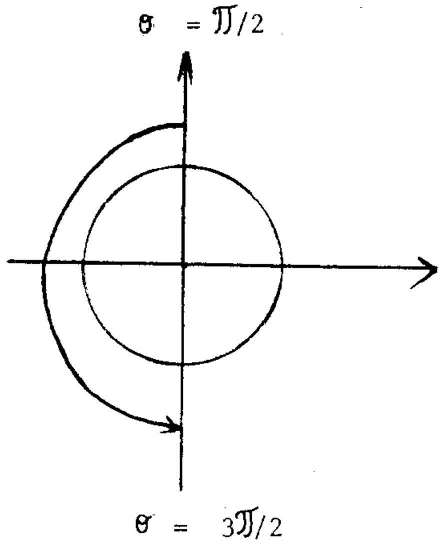
ในช่วง $\theta_0 - \pi/2 < \theta < \theta_0 + \pi/2$

$\vec{R} = a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เช่น ให้ $\theta_0 = \pi$ แล้ว

$\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

จากรูป 3.1.3 จะเห็นว่าเมื่อ θ อยู่ในช่วง $(\pi/2, 3\pi/2)$ จะทำให้ $\vec{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



รูป3.1.3

ตัวอย่างที่ 3.1.4

$$x = t^2, \quad y = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \le 0 \\ t^2 \sin(1/t) & \text{ถ้า } t > 0 \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$$

ดังรูป 3.1.4 จะเห็นว่าฟังก์ชันนี้ มีอนุพันธ์สำหรับ t ทุก ๆ ค่า เนื่องจาก ที่ $t = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

ดังนั้น ฟังก์ชันนี้จึงไม่ใช่ตัวแทนปรกติ

ขอให้สังเกตว่าฟังก์ชันนี้มีจุดตัดซ้อนในทุก ๆ ย่าน ของ $t = 0$

เนื่องจากว่าถ้าพิจารณา $\delta > 0$ และเลือก N ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0

และ $1/2\pi N < \delta$

ให้ $t_1 = -1/2\pi N$ และ $t_2 = 1/2\pi N$

จะได้ว่า $-\delta < t_1 < t_2 < \delta$

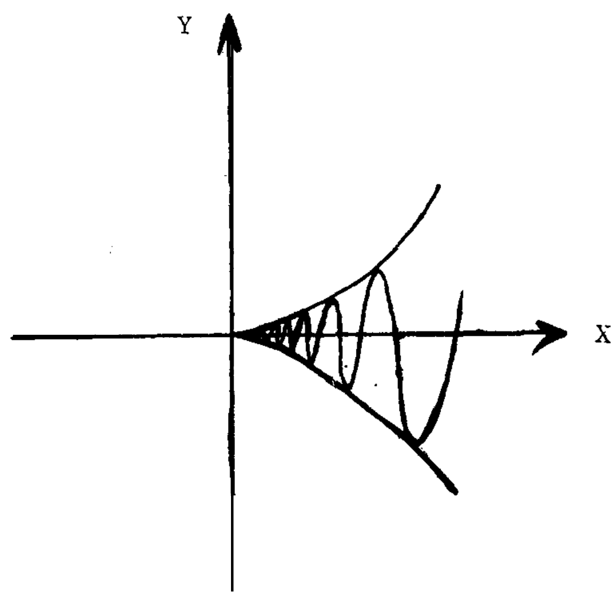
ยิ่งกว่านั้น

$$x(t_1) = \frac{1}{4\pi^2 N^2} = x(t_2)$$

และ $$y(t_1) = 0 = \frac{1}{4\pi^2 N^2} \sin 2\pi N = y(t_2)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันนี้มีจุดตัดซ้อน ในช่วง

$$-\delta < t < \delta$$



รูป 3.1.4

ตัวอย่างที่ 3.1.5

$$\vec{R} = \begin{cases} t\vec{i} + e^{-1/t^2}\vec{k}, & t < 0 \\ 0 \quad , & t = 0 \\ t\vec{i} + e^{-1/t^2}\vec{j} \quad , & t > 0 \end{cases}$$

เป็นตัวแทนที่อยู่ในชั้น C^{∞} จะเห็นว่า เมื่อ $t < 0$ เส้นโค้งอยู่ในระนาบ XZ และ สำหรับ $t > 0$ เส้นโค้งจะอยู่ในระนาบ XY

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแสดงว่า $\vec{R} = t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j} + (t-1)^3\vec{k}$

   เป็น ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ สำหรับ t ทุก ๆ ค่า

2. จงแสดงว่า $\vec{R} = (1+\cos\theta)\vec{i}+\sin\theta\vec{j}+2\sin\frac{\theta}{2}\vec{k}, \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

   เป็นตัวแทนปรกติ และอยู่บนผิวทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี = 2 และอยู่บนทรงกระบอก (Cylinder) ที่มีสมการเป็น

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

3. สมการของซิสซอยด์ของดีโอเคลส (cissoid of diocles) ในรูปพิกัดเชิงขั้ว คือ

$$r = 2\sin\theta\tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$ จงเขียนเส้นโค้งนี้

   และหาตัวแทนอิงตัวแปรเสริมในระบบพิกัดฉาก

4. จงหาตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของรอยตัดของทรงกระบอก ซึ่งมีสมการเป็น

   $x^2 + y^2 = 1$ และ ระนาบซึ่งมีสมการเป็น $x+y+z = 1$

5. จงแสดงว่า $\vec{R} = t\vec{i}+(t^2+2)\vec{j}+(t^3+t)\vec{k}$

   เป็นตัวแทนปรกติสำหรับ t ทุก ๆ ค่า

6. สมการของ Conchoid of Nicomedes ในรูปพิกัดเชิงขั้ว คือ

$$r = \frac{a}{\cos\theta} + c, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

   จงหาตัวแทนในระบบพิกัดฉาก

7. จงหาตัวแทนอิงตัวแปรเสริมของรอยตัดของทรงกระบอก

$z^2 = x, \quad y^2 = 1-x$

(คำแนะนำ : $y^2 + z^2 = 1$)

8. จงแสดงว่า $\vec{R} = t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty$

และ $\vec{R} = \ln t\vec{i} + \sin(\ln t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 < t < \infty$

เป็นตัวแทนของเส้นโค้งเดียวกัน

3.2 เส้นโค้งปรกติ (Regular Curves)

$t = t(\theta)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน บนช่วง I_θ

t สามารถเปลี่ยนตัวแปรเสริมได้ถ้า

1. $t(\theta)$ อยู่ใน ชั้น C^1 ในช่วง I_θ
2. $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ สำหรับ θ ทุก ๆ ค่าใน I_θ

ขอให้สังเกตว่า ถ้า $t = t(\theta)$ สามารถเปลี่ยนตัวแปรเสริมได้แล้ว $\frac{dt}{d\theta}$ มีความต่อเนื่อง และ $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$

ถ้า $\frac{dt}{d\theta} > 0$ บนช่วง I_θ แล้ว $t(\theta)$ เป็นฟังก์ชัน เพิ่ม (increasing function)

ถ้า $\frac{dt}{d\theta} < 0$ บนช่วง I_θ แล้ว $t(\theta)$ เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function)

ทฤษฎีบทที่ 3.2.1 ถ้า $t = t(\theta)$ เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้บนช่วง I_θ แล้ว

1. $t = t(\theta)$ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งของ (one-to-one mapping of) I_θ ไปบนช่วง $I_t = t(I_\theta)$
2. $\theta = \theta(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผัน (inverse function) เปลี่ยนตัวแปรเสริม I_t

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ก. $t = (b-a)\theta + a, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad a < b$

t เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้ในช่วง $0 \leq \theta \leq 1$

ไปบนช่วง $a \leq t \leq b$

ฟังก์ชันผกผัน คือ

$$\theta = (t-a)/(b-a)$$

θ เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้ ในช่วง $a \leq t \leq b$ ไปบนช่วง

$0 \leq \theta \leq 1$

ข. $t = \tan(\pi\theta/2), \quad 0 \leq \theta < 1$

t เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้ในช่วง $0 \leq \theta < 1$ ไปบนช่วง

$0 \leq t < \infty$

ฟังก์ชันผกผัน คือ

$$\theta = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} t$$

θ เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้ในช่วง $0 \leq t < \infty$

ไปบนช่วง $0 \leq \theta < 1$

ตอบ

ตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ 2 อัน คือ $\vec{R} = \vec{R}(t), t \in I_t$ และ $\vec{R} = \vec{R}^*(\theta), \theta \in I_\theta$ จะสมมูลกัน ถ้ามีการเปลี่ยนตัวแปรเสริม $t = t(\theta)$ บนช่วง I_θ ซึ่ง

1. $t(I_\theta) = I_t$
2. $\vec{R}(t(\theta)) = \vec{R}^*(\theta)$

นิยาม 3.2.1 เส้นโค้งปรกติคือ ชั้นสมมูลของตัวแทนอิงตัวแปรเสริมปรกติ (a regular curve is an equivalence class of regular parametric representations)

ตัวอย่างที่ 3.2.2 ให้ $\theta = t+1, \ -1 \leq t \leq 2\pi-1$

จากตัวอย่างที่ 3.1.2

$$\vec{R} = \cos\theta(2\cos\theta-1)\vec{i}+\sin\theta(2\cos\theta-1)\vec{j}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$\vec{R}$ จะให้ equivalent parametric representation คือ

$$\vec{R} = \left[\cos(t+1)\right]\left[2\cos(t+1)-1\right]\vec{i} + \left[\sin(t+1)\right]\left[2\cos(t+1)-1\right]\vec{j}, \quad -1 \leq t \leq 2\pi-1$$

ในขณะที่ t เพิ่มขึ้นในช่วง $-1 \leq t \leq 2\pi-1$, $\theta = t+1$

ก็จะเพิ่มขึ้นในช่วง $0 \leq \theta = 2\pi$

กราฟของสมการใหม่ก็เหมือนกับกราฟของสมการเดิม ดังรูป 3.2.1 (a)

ถ้าให้ $\theta = -t, \ -2\pi \leq t \leq 0$ จะได้ equivalent representation คือ

$$\vec{R} = \cos t(2\cos t-1)\vec{i}-\sin t(2\cos t-1)\vec{j}, \quad -2\pi \leq t \leq 0$$

ค่า t เพิ่มขึ้นจาก -2π ถึง 0 แต่ $\theta = -t$ ลดลงในช่วง $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และกราฟของสมการใหม่จะเหมือนกับกราฟของสมการเดิม แต่มีทิศทางตรงข้าม ดังรูป 3.2.1 (b)

ถ้าให้

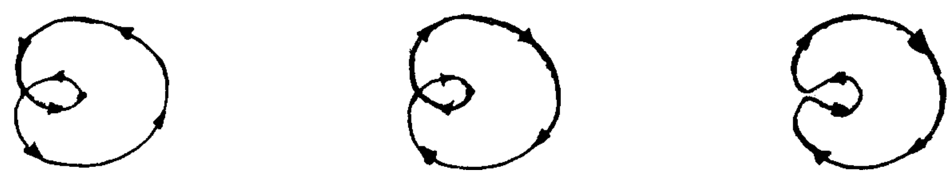
$$\theta = \theta(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq \pi/3 \\ -t+2\pi & , \quad \pi/3 < t < 5\pi/3 \\ t & , \quad 5\pi/3 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

แทนค่า $\theta = \theta(t)$ ใน $\vec{R}$ จะได้

$\vec{R} = [\cos\theta(t)][2\cos\theta(t)-1]\,\vec{i} + [[\sin\theta(t)][2\cos\theta(t)-1]\,\vec{j},$

$0 \le t \le 2\pi$

มีกราฟดังรูป 3.2.1 (c)



a b c

รูป 3.2.1

ตัวอย่างที่ 3.2.3 เส้นโค้งที่สำคัญอันหนึ่ง คือ ฮีลิกซ์วงกลม (circular helix)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k} \\ \text{หรือ} \\ x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt \end{array}\right\} a,b \ne 0,\quad -\infty < t < \infty$$

ดังรูป 3.2.2

เส้นโค้งนี้อยู่บนทรงกระบอกกลมตรง (right circular cylinder) ซึ่งมีสมการคือ

$$x^2+y^2 = a^2$$

หรือ $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad -\infty < z < \infty$

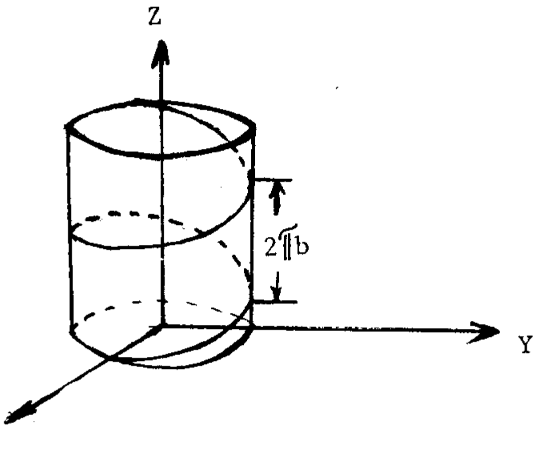
ทรงกระบอกนี้มีรัศมี $= |a|$

ส่วนสมการ $z = bt$ ทำให้เกิดโลกัสของจุดซึ่งเป็นเส้นโค้งอยู่ในทิศทางของแกน z เมื่อ t เพิ่มจาก 0 ถึง 2π ค่า x และ y จะกลับมาที่จุดเริ่มต้น ในขณะที่ z เพิ่มขึ้น

(b > 0) หรือลดลง (b < 0) ด้วย ค่า $z = 2\pi|b|$

เมื่อ $a, b > 0$ เรียกว่า ฮีลิกซ์วงกลมขวา (right circular helix)

เมื่อ $a > 0, \quad b < 0$ เรียกว่า ฮีลิกซ์วงกลมซ้าย (left circular helix)



ฮีลิกซ์วงกลม
(a, b > 0)

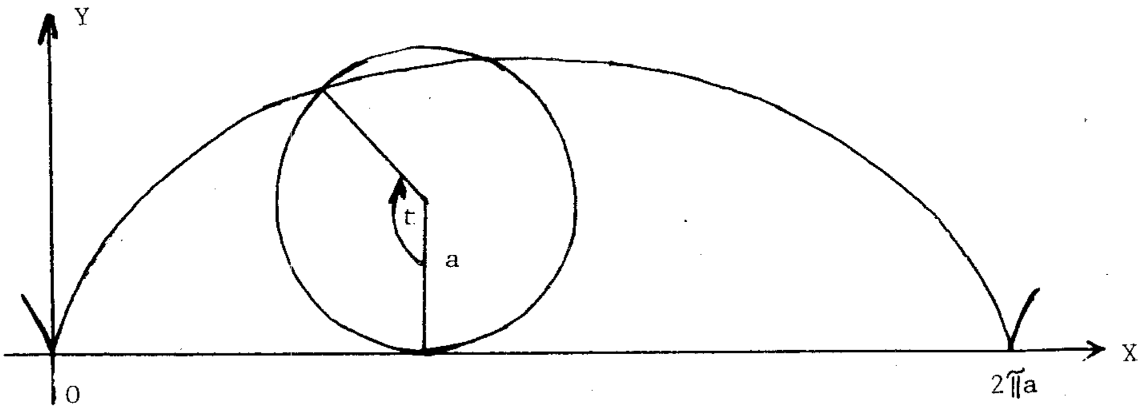
รูป 3.2.2

นิยาม 3.2.2 $\vec{R} = \vec{R}(t), \quad t \in I$ โดยที่ $\vec{R}$ เป็น เส้นโค้งปรกติ เรียก $\vec{R}$ ว่าเชิงเดียว (simple) ถ้า $\vec{R}$ ไม่มีจุดตัดซ้อน นั่นคือ ถ้า $t_1 \neq t_2$ แล้ว $\vec{R}(t_1) \neq \vec{R}(t_2)$ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของเส้นโค้ง ไม่ใช่คุณสมบัติของตัวแทน

นิยาม 3.2.3 $\vec{R} = \vec{R}(t), t \in I$ เรียกว่าเป็นส่วนโค้งปรกติ (regular arc) ถ้า I เป็นช่วงปิด คือ $a \leq t \leq b$
จุด $\vec{R}(a)$ และ $\vec{R}(b)$ เรียกว่า จุดปลาย (end points) ของส่วนโค้ง

อาร์กเซกเมนต์ (arc segment) ของเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ บนช่วง I คือ ส่วนโค้ง $\vec{R} = \vec{R}^*(t), \quad t \in I^*$ เมื่อ I^* เป็นช่วงปิดใด ๆ ที่อยู่ใน I

ตัวอย่างที่ 3.2.4 ไซคลอยด์ (cycloid) คือ เส้นโค้งในระนาบ (planar curve) ซึ่งคือแนววิถี (trajectory) ของจุดของวงกลมในขณะที่วงกลมหมุนไปตามเส้นตรงเส้นหนึ่งโดยไม่เลื่อนหลุด ดังรูป 3.2.3



รูป 3.2.3

วงกลมมีรัศมี $= a$

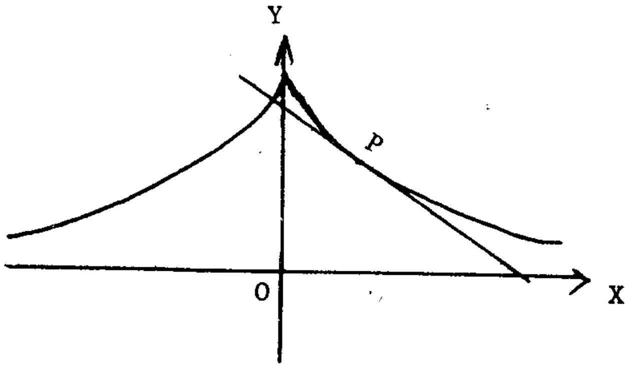
สมการอิงตัวแปรเสริมของไซคลอยด์ คือ

$$x = a(t-\sin t)$$

$$y = a(1-\cos t)$$

วงกลมหมุนไป 1 รอบ t จะแปรค่าจาก 0 ถึง 2π จะได้ จะได้ไซคลอยด์ 1 ส่วน (one arc of the cycloid)

ตัวอย่างที่ 3.2.5 โค้งจอมแห (tractrix) คือเส้นโค้งในระนาบ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า เซกเมนต์ของเส้นสัมผัสระหว่างจุด P (contact point) และเส้นตรงเส้นหนึ่งในระนาบ (the asymptote of the tractrix) มีความยาวเท่ากับ a ซึ่งเป็นค่าคงตัว ดังรูป 3.2.4



รูป 3.2.4

สมการอิงตัวแปรเสริมของโค้งจอมแห คือ

$$x = a\cos t + a\ln|\tan t/2|$$

$$y = a\sin t$$

เมื่อ t แปรค่าจาก 0 ถึง π จะได้ทุกจุดของ โค้งจอมแห

ถ้า $t \to 0$ แล้ว $x \to -\infty$, $y \to 0$

ถ้า $t \to \pi$ แล้ว $x \to \infty$, $y \to 0$

ดังนั้น โค้งจอมแหขยายออกไปไม่มีที่สิ้นสุด และเข้าใกล้เส้นกำกับ (asymptote) ทั้ง 2 ข้าง (เส้นกำกับของโค้งจอมแห คือ แกน x)

จุด $t = \pi/2$ คือ จุดเอกฐาน (singular point)

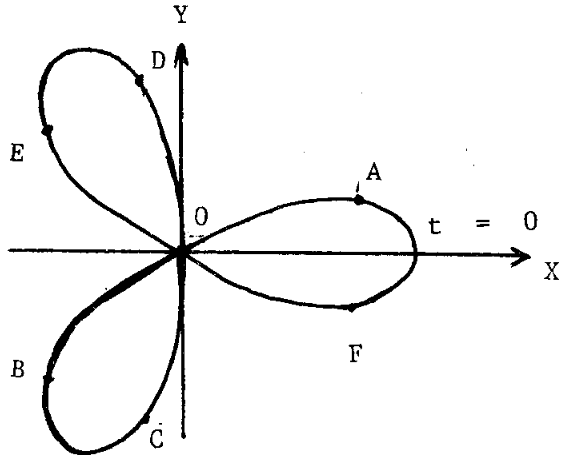
ตัวอย่างที่ 3.2.6 The clover leaf ดังรูป 3.2.5 มีสมการ คือ

$$x = \cos 3t \cos t$$

$$y = \cos 3t \sin t$$

$$z = 0$$

$(0 \leq t \leq \pi)$



รูป 3.2.5

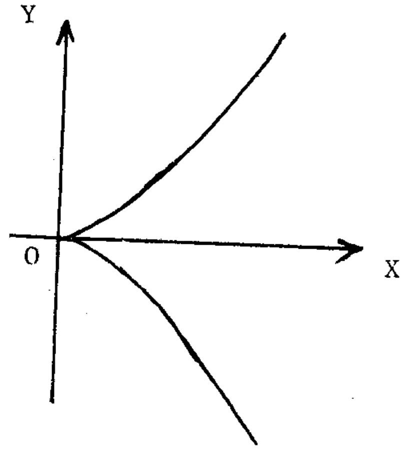
จุด O เป็นจุดตัดของเส้นโค้ง และเป็นจุดที่สมนัยกับค่า t 3 ค่า คือ

$\pi/6, \quad \pi/2, \quad 5\pi/6$

ภาพ ของช่วงปิด $[\pi/12, \ 3\pi/12]$, $[5\pi/12, \ 7\pi/12]$ และ $[9\pi/12, \ 11\pi/12]$ คือ ส่วนโค้ง AOB, COD, และ EOF ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3.2.7 The semicubical parabola ดังรูป 3.2.6 มีสมการ คือ

$$x = t^2 , \ y = t^3 , \ z = o \quad (-\infty < t < \infty)$$



รูป 3.2.6

หมายเหตุ ตัวแทนโดยปริยายของเส้นโค้ง (Implicit Representation of Curves)

เส้นโค้งใน 3 มิติ สามารถหาได้จากการตัดกันของผิว 2 ผิว นั่นคือ จุด (x,y,z) ที่อยู่บนเส้นโค้งจะคล้องตามความสัมพันธ์ 2 อัน คือ

$$F_1(x,y,z) = 0 \text{ และ } F_2(x,y,z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.1)$$

ถ้าจุด (x,y,z) คล้องตามสมการ (3.2.1) และ

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \neq 0$$

แล้วจากทฤษฎีบทของฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function theorem) จะได้ว่าเราสามารถหา x,y ให้อยู่ในรูปของ z ดังนี้

$$x = x(z), \quad y = y(z), \quad z = z$$

โดยที่ z เป็นตัวแปรเสริม

ตัวอย่างที่ 3.2.8 ผิว $y-z^2 = 0$ และ ผิว $xz-y^2 = 0$ ตัดกัน

จงพิจารณาเส้นที่เกิดจากการตัดกัน

วิธีทำ

$$y-z^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$xz-y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จาก (1), $y = z^2$

แทนค่า y ใน (2), $xz-z^4 = 0$

$$x = z^3$$

ให้ $z = t$, $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t \ldots\ldots\ldots(A)$ **ตอบ**

ถ้า $z = 0$ แล้ว $y = z^2 = 0$ และ x เป็นค่าอะไรก็ได้

(x is arbitrary)

นั่นคือ เส้นที่เกิดจากการตัดกัน คือ แกน X ซึ่งมีสมการ คือ

$x = t$, $y = 0$, $z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(B)$ **ตอบ**

จะเห็นว่าจุด $(0,0,0)$ คือจุดตัดของเส้น (A) และ เส้น (B) **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงแสดงว่า $t = \theta^2/(\theta^2+1)$ เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้บนช่วง $0 < \theta < \infty$ และเปลี่ยนจากช่วง $0 < \theta < \infty$ ไปบนช่วง $0 < t < 1$

2. จงแสดงว่า $\theta = 3t^5+10t^3+15t+1$ เปลี่ยนตัวแปรเสริมได้สำหรับทุก ๆ ค่า t

3. ให้สมการวงกลมคือ $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ และให้ $t = \tan^{-1}(\theta/4)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ จงเปลี่ยนตัวแปรเสริม

4. จงแสดงว่า $\vec{R} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ ไม่เป็น เส้นโค้งปรกติ

5. จงแสดงว่า $\vec{R} = \sin 3t\cos t\vec{i}+\sin 3t\sin t\vec{j}$ เป็นเส้นโค้งปรกติ

6. จงพิจารณาว่า $\vec{R} = \cos\theta\vec{i}+(1-\cos\theta-\sin\theta)\vec{j}-\sin\theta\vec{k}$ เป็นเส้นโค้งปรกติหรือไม่

3.3 **ความยาวโค้ง** (Arc length)

นิยาม 3.3.1 ความยาว (length) ของ $\vec{R} = \vec{R}(t)$ ซึ่งเป็นเส้นโค้งปรกติบนช่วง I คือ

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt \text{.........(3.3.1)}$$

s เรียกว่า ความยาวโค้ง

ถ้า $t \geq t_0$ แล้ว $s \geq 0$

และ s จะเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นโค้งระหว่าง $\vec{R}(t_0)$ และ $\vec{R}(t)$

ถ้า $t < t_0$ แล้ว $s < 0$ และ s จะเท่ากับค่าลบของความยาวของส่วนของเส้นโค้งระหว่าง $\vec{R}(t_0)$ และ $\vec{R}(t)$

จากสมการ (3.3.1) เมื่อหาอนุพันธ์ของ s จะได้

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$= \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

และจากสมการ (3.3.1) จะได้ว่า

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt = -\int_{t}^{t_0}\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

ทฤษฎีที่ 3.3.1 ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นตัวแทนธรรมชาติ (natural representation) ของเส้นโค้ง C แล้ว

1. $|s_2 - s_1|$ คือความยาวของส่วนของเส้นโค้งของ C ระหว่าง $\vec{R}(s_1)$ และ $\vec{R}(s_2)$

2. ถ้า $\vec{R} = \vec{R}^*(s^*)$ เป็นตัวแทนธรรมชาติอื่น ๆ ของ C แล้ว $s = \pm s^* +$ ตัวคงตัว

3. ถ้า $\vec{R} = \vec{R}^*(t)$ เป็นตัวแทนใด ๆ ของ C ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ แล้ว

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

ในทางตรงข้ามจะได้ว่า

$$\frac{ds}{dt} = -\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

ข้อสังเกต ถ้า $s = s(t)$ ถูกกำหนดโดยสมการ 3.3.1 แล้ว $\vec{R} = \vec{R}(t(s))$ เป็นตัวแทนธรรมชาติ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| &= \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| \\ &= \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{ds}{dt}\right| \\ &= \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \\ &= 1\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.1 $\vec{R}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$

$\vec{R}$ เป็นตัวแทนธรรมชาติ ของฮีลิกซ์ จงหาความยาวโค้ง,

$\frac{ds}{dt}$ และเขียน $\vec{R}(s)$

วิธีทำ

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)^{1/2}$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (a^2+b^2)^{1/2}$$ **ตอบ**

$$\therefore s = \int_0^t (a^2+b^2)^{1/2} dt$$

$$= (a^2+b^2)^{1/2} t$$

$$t = (a^2+b^2)^{-1/2} s$$

แทนค่า t ใน $\vec{R}$ **จะได้**

$$\vec{R}(s) = a\cos\left[(a^2+b^2)^{-1/2}s\right]\vec{i} + a\sin\left[(a^2+b^2)^{-1/2}s\right]\vec{j}$$

$$+b(a^2+b^2)^{-1/2}s\vec{k}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.3.2 ให้ $\vec{R}(t) = r\cos t\vec{i} + r\sin t\vec{j}, \quad r > 0$

จงเขียน $\vec{R}(s)$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -r\sin t\vec{i} + r\cos t\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)^{1/2}$$

$$= r$$

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^t r\,dt$$

$$= rt$$

และ $t = s/r$

$$\therefore \vec{R}(s) = r\cos(s/r)\vec{i} + r\sin(s/r)\vec{j}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.3.3 ให้ $\vec{R} = a\cos wt\vec{i} + a\sin wt\vec{j} + bt\vec{k}$

จงหาความยาวโค้งในช่วง $0 \leq t \leq \pi$

และเขียน $\vec{R}(s)$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -aw\sin wt\vec{i} + aw\cos wt\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{a^2w^2\sin^2 wt + a^2w^2\cos^2 wt + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2w^2 + b^2}$$

$$s = \int_0^\pi \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2w^2+b^2}\,dt$$

$$= \left(\sqrt{a^2w^2+b^2}\right)t\Big|_0^\pi$$

$$= \left(\sqrt{a^2w^2+b^2}\right)\pi$$ **ตอบ**

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2w^2+b^2}\,dt$$

$$= \left(\sqrt{a^2w^2+b^2}\right)t$$

$$\therefore t = s/\sqrt{a^2w^2+b^2}$$

$$\vec{R}(s) = a\cos\frac{ws}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}\vec{i} + a\sin\frac{ws}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}\vec{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}\vec{k}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.3.4 ให้ $\vec{R}(t) = t\vec{i} + (t^2/2)\vec{j}$ จงหาความยาวโค้งในช่วง $0 \leq t \leq 3$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i} + t\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (1+t^2)^{1/2}$$

$$s = \int_0^3 \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^3 (1+t^2)^{1/2}\, dt$$

ให้ $t = \tan\theta$, $dt = \sec^2\theta\, d\theta$, $\sec\theta = \sqrt{1+t^2}$

$$\int(1+t^2)^{1/2}dt = \int(1+\tan^2\theta)^{1/2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \sec\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \sec^3\theta\, d\theta$$

ให้ $u = \sec\theta$, $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

$du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$, $v = \tan\theta$

$$\int\sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\tan\theta\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int\sec\theta(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \left(\int(\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta\right)$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int\sec^3\theta\, d\theta + \int\sec\theta\, d\theta$$

$$2\int\sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$\int\sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|) + c$$

$$\therefore \int(1+t^2)^{1/2}dt = \frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|\sqrt{1+t^2} + t\right|\right) + c$$

ดังนั้น

$$s = \int_o^3 (1+t^2)^{1/2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|\sqrt{1+t^2} + t\right|\right) \Big|_o^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\sqrt{10} + \ln\left|\sqrt{10} + 3\right|\right)$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.3

จากข้อ 1 ถึงข้อ 9 จงหาความยาวโค้งในช่วงที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = t\vec{i} + (t^2/\sqrt{2})\vec{j} + (t^3/3)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$
2. $\vec{R} = t\vec{i} + (3t^2/2)\vec{j} + (3t^3/2)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$
3. $\vec{R} = t\vec{i} + \ln(\sec t + \tan t)\vec{j} + \ln \sec t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$
4. $\vec{R} = 2\cosh 3t\vec{i} - 2\sinh 3t\vec{j} + 6t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 5$
5. $\vec{R} = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
6. $\vec{R} = 3\cosh 2t\vec{i} + 3\sinh 2t\vec{j} + 6t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
7. $\vec{R} = \cosh t\vec{i} + \sinh t\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$
8. $\vec{R} = 3t\cos t\vec{i} + 3t\sin t\vec{j} + 4t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$
9. $\vec{R} = t\cos t\vec{i} + t\sin t\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

10. ให้ $\vec{R}(t)$ เป็น เส้นโค้งปรกติ ซึ่ง $\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ จงแสดงว่า ถ้า s เป็นความยาวโค้งแล้ว

$$t = \frac{s}{a} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

11. กำหนดให้ $\vec{R}(t) = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty$ จงเขียน $\vec{R}(s)$

12. จงแสดงว่า

$$\vec{R} = \frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)^{-1}\vec{j} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\right)\vec{k}$$

เป็นตัวแทนธรรมชาติ นั่นคือ $\left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| = 1$

13. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบทที่ 3.3.1 (ข้อ 1 และ ข้อ 2)

14. จงหาความยาวโค้ง ของเอพิไซคลอยด์ (epicycloid) ซึ่งมีสมการเป็น

$$\vec{R} = \left[(r_o+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_o+r}{r}\theta\right)\right]\vec{i} + \left[(r_o+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_o+r}{r}\theta\right)\right]\vec{j}$$

15. จงหาความยาวโค้งของไฮโพไซคลอยด์ (hypocycloid) ซึ่งมีสมการเป็น

$$\vec{R} = \left[(r_o-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{r_o-r}{r}\theta\right)\right]\vec{i} + \left[(r_o-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_o-r}{r}\theta\right)\right]\vec{j}$$

$r_o > r$

3.4 เวกเตอร์หน่วยสัมผัส (Unit Tangent Vector)

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นตัวแทนธรรมชาติ ของ เส้นโค้งปรกติ C

หาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \dot{\vec{R}}(s)$$

$\dot{\vec{R}}(s)$ จะกำหนดทิศทางของเส้นสัมผัสกับ C ที่จุด R (s)

$$\dot{\vec{R}}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{R}(s+\Delta s)-\vec{R}(s)}{\Delta s}$$

เพราะว่า $\vec{R}(s)$ เป็นตัวแทนธรรมชาติ

ดังนั้น $\left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| = |\dot{\vec{R}}| = 1$

นั่นคือ $\dot{\vec{R}}(s)$ มีความยาว 1 หน่วย

ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(s^*)$ เป็นตัวแทนธรรมชาติอื่น ๆ ของ C แล้วจาก

ทฤษฎีบทที่ 3.3.1 จะได้ว่า

$$s = \pm s^* + \text{ตัวคงตัว}$$

และ

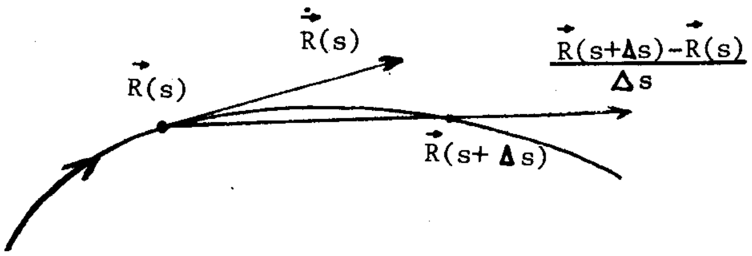
$$\frac{d\vec{R}}{ds^*} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{ds^*}$$

$$= \pm \frac{d\vec{R}}{ds}$$

นั่นคือ $\frac{d\vec{R}}{ds^*}$ มีทิศทางเดียวกันหรือตรงข้ามกับ $\frac{d\vec{R}}{ds}$ และ $\frac{d\vec{R}}{ds^*}$ มีทิศทาง

ขึ้นอยู่กับ $\vec{R} = \vec{R}(s^*)$ ดังนั้น $\vec{R}(s)$ เป็นปริมาณที่มีทิศทาง

จากรูป 3.4.1 จะเห็นว่า $\dot{\vec{R}}(s)$ มีทิศทางไปทางเดียวกับที่ s เพิ่มขึ้น



รูป 3.4.1

เวคเตอร์ $\dot{\vec{R}}(s)$ เรียกว่าเวกเตอร์หน่วยสัมผัสกับเส้นโค้งที่มีทิศทาง ($\vec{R} = \vec{R}(s)$) ที่ R(s) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{T} = \vec{T}(s)$

ดังนั้น $\vec{T} = \vec{T}(s) = \dot{\vec{R}}(s)$

ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(t)$ เป็นตัวแทนใด ๆ ของ C ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ แล้ว

$$\vec{R}' = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \vec{T}\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= \vec{T}\,|\vec{R}'| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.1)$$

ดังนั้น $\vec{R}'$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{T}$ และ $\vec{R}'$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับเส้นโค้ง

จากสมการ (3.4.1) จะได้ว่า

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|}$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 ฮีลิกซ์ คือ $\vec{R} = a \cos t\,\vec{i} + a \sin t\,\vec{j} + bt\vec{k}$, $a, b \neq 0$

จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a \sin t\vec{i} + a \cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|}$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{-1}{2}} (-a \sin t\,\vec{i} + a \cos t\,\vec{j} + b\vec{k})$$

ตอบ

ข้อสังเกต เวกเตอร์หน่วย**สัมผัส** $\vec{T}$ **ของ** ฮีลิกซ์ **จะทำมุมคง**ตัวโดยตลอดกับแกน z ให้มุมคงตัวนั้นคือ θ

เนื่องจาก

$$\vec{T}\cdot\vec{k} = |\vec{T}||\vec{k}| \cos\theta$$

$$= \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}(\vec{T}\cdot\vec{k})$$

$$= \cos^{-1}((a^2 + b^2)^{-1/2} b)$$

ตัวอย่างที่ 3.4.2 ให้ $\vec{R} = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j}$, $a > 0$

จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a \sin t\vec{i} + a \cos t\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = a$$

$$\vec{T} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4.3 ให้ $\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + a\cos t\vec{k}$

จงหาเวกเตอร์หน่วยสัมผัส ที่ $t = 0$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} - a\sin t\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2\sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{1+\sin^2 t}$$

$$\vec{T} = \frac{-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} - a\sin t\vec{k}}{a\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$= \frac{-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} - \sin t\vec{k}}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

ที่ $t = 0$, $\vec{T} = \vec{j}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.4

จากข้อ 1 ถึงข้อ 12 จากเวกเตอร์หน่วยสัมผัส

1. $\vec{R} = t^3\vec{i} + (1-t)\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$

2. $\vec{R} = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 3t^4\vec{k}$

3. $\vec{R} = e^{-2t}\vec{i} + e^{2t}\vec{j} + (1+t^2)\vec{k}$

4. $\vec{R} = \frac{t}{1+t}\vec{i} + \frac{t^2}{1+t}\vec{j} + \frac{1-t}{1+t}\vec{k}$

5. $\vec{R} = e^t\sin t\vec{i} + e^{2t}\cos t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$

6. $\vec{R} = t\cos t\vec{i} + t\sin t\vec{j} + t\vec{k}$

7. $\vec{R} = t\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j} + \frac{3}{2}t^3\vec{k}, \quad t = 2$

8. $\vec{R} = \frac{t^3}{3}\vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{2}{t}\vec{k}, \quad t = 1$

9. $\vec{R} = (1+t)\vec{i} + (3-t)\vec{j} + (2t+4)\vec{k}, \quad t = 3$

10. $\vec{R} = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad t = 0$

11. $\vec{R} = (e^{t/2} + e^{-t/2})\vec{i} + (e^{t/2} - e^{-t/2})\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t = 0$

12. $\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + (1+t^2)\vec{k}, \quad t = 1$

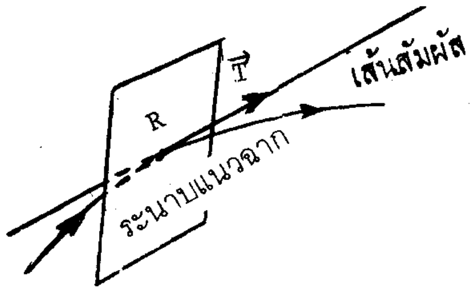
13. จงแสดงว่า เวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง $\vec{R} = at\vec{i} + bt^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ เมื่อ $2b^2 = 3a$ จะทำมุมคงตัวกับเวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{i} + \vec{k}$

14. ให้ $\vec{R}(\theta) = e^{\theta}\cos\theta\,\vec{i} + e^{\theta}\sin\theta\,\vec{j}$

จงแสดงว่ามุมระหว่าง $\vec{R}$ และ $\vec{T}$ เป็นมุมคงตัว

3.5 เส้นสัมผัสและระนาบแนวฉาก (Tangent line and Normal Plane)

เส้นตรงที่ผ่านจุด R บนเส้นโค้งปรกติ C ซึ่งขนานกับเวกเตอร์สัมผัส เรียกว่า เส้นสัมผัสกับ C ที่จุด R ดังรูป 3.5.1



รูป 3.5.1

สมการเส้นสัมผัสกับ C ที่จุด R_0 คือ

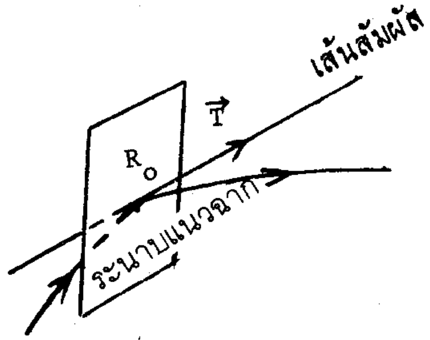
$$\vec{r} = \vec{R}_o + \mu \vec{T}_o \quad , \ -\infty < \mu < \infty$$

หรือ $$\vec{r} = \vec{R}_o + \lambda \vec{R}'_o \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty$$

เมื่อ $$\lambda = \frac{\mu}{|\vec{R}'_o|}$$

หรือ $$(\vec{r} - \vec{R}_o) \times \vec{R}'_o = \vec{o}$$

ดูรูป 3.5.2



รูป 3.5.2

ระนาบที่ผ่านจุด R และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด R เรียกว่า
ระนาบแนวฉากของ C ที่จุด R ดูรูป 3.5.1

สมการระนาบแนวฉากที่จุด R_o คือ

$$(\vec{r}-\vec{R}_o).\vec{T}_o = 0$$

หรือ $$(\vec{r}-\vec{R}_o).\vec{R}'_o = 0$$

ดูรูป 3.5.2

ตัวอย่างที่ 3.5.1 จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง

$$\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \qquad \text{ที่ } t=1$$

และหาระนาบแนวฉากที่ $t = 1$

วิธีทำ

$$\vec{R}' = \vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k}$$

$$\vec{R}(1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{R}'(1) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส ที่ $t=1$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R}(1) + \lambda\vec{R}'(1), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \lambda(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$$

$$= (1+\lambda)\vec{i}+(1+2\lambda)\vec{j}+(1+3\lambda)\vec{k}$$

หรือ $$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$ **ตอบ**

สมการระนาบแนวฉาก ที่ t = 1 คือ

$$
\begin{aligned}
(\vec{r}-\vec{R}(1))\cdot\vec{R}'(1) &= 0\\
((x-1)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z-1)\vec{k})\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}) &= 0\\
(x-1)+2(y-1)+3(z-1) &= 0\\
x+2y+3z-1-2-3 &= 0\\
x+2y+3z-6 &= 0
\end{aligned}
$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.5.2 จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง

$$\vec{R} = (t^2-2)\vec{i}+(t+3)\vec{j}+(t^4+4t+1)\vec{k}$$

ที่ $t = 1$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\vec{R}' &= 2t\vec{i}+\vec{j}+(4t^3+4)\vec{k}\\
\vec{R}'(1) &= 2\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}\\
\vec{R}(1) &= -\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส ที่ $t=1$ คือ

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{R}(1)+\lambda\vec{R}'(1), \qquad -\infty<\lambda<\infty\\
&= (-\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k})+\lambda(2\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k})\\
&= (2\lambda-1)\vec{i}+(\lambda+4)\vec{j}+(8\lambda+6)\vec{k}
\end{aligned}
$$

หรือ $$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-6}{8}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาสมการเส้นสัมผัส และระนาบแนวฉากของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = (1+t)\vec{i} - t^2\vec{j} + (1+t^3)\vec{k}$$

ที่ $t = 1$

2. จงหารอยตัดของระนาบ XY และเส้นสัมผัสทั้งหลายของ ฮีลิกซ์ ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}, \qquad t > 0$$

3. จงหารอยตัดของระนาบ XY และระนาบแนวฉากของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$$

ที่ $t = \pi/2$

4. จงหาจุดตัดระนาบ XY และเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = (1+t)\vec{i} - t^2\vec{j} + (1+t^3)\vec{k}$$

ที่ $t = 1$

5. จงหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

ก. $\vec{R} = (1+t)\vec{i} + (3-t)\vec{j} + (2t+4)\vec{k}, \quad t = 3$

ข. $\vec{R} = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad t = 0$

ค. $\vec{R} = (e^{t/2} + e^{-t/2})\vec{i} + (e^{t/2} - e^{-t/2})\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t = 0$

ง. $\vec{R} = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k} \quad t = 1$

6. จงหาสมการเส้นสัมผัสและระนาบแนวฉากของฮีลิกซ์ ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R} = 4\cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j} + 2t\vec{k} \quad \text{ที่} \quad t = 2\pi/3$$

7. $\vec{R} = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ จงหาระนาบแนวฉาก ที่ $t = 0, t = 1$

3.6 **ความโค้ง** (Curvature)

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งปรกติ ของชั้น ≥ 2 แล้ว

$$\vec{T} = \vec{T}(s) = \dot{\vec{R}}(s)$$

หาอนุพันธ์ของ $\vec{T}$ จะได้

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s)$$

$$= \ddot{\vec{R}}(s)$$

เนื่องจาก $\vec{T}.\vec{T} = 1$

หาอนุพันธ์ จะได้

$$\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds}.\vec{T} = 0$$

$$2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

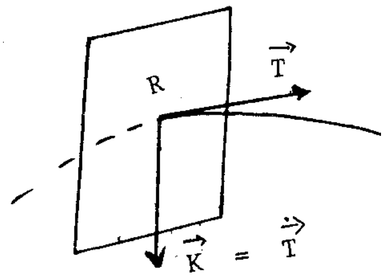
$$\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

ดังนั้น $\vec{T}$ ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{T}}{ds}$

และ $\dot{\vec{T}}(s)$ ขนานกับระนาบแนวฉาก

$\dot{\vec{T}}(s)$ เรียกว่า เวกเตอร์ความโค้ง (curvature vector) บน C ที่จุด R(s) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{K} = \vec{K}(s) = \dot{\vec{T}}(s)$

ถ้า $\dot{\vec{T}}$ ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ แล้ว $\dot{\vec{T}}$ จะมีทิศทางดังรูป 3.6.1



รูป 3.6.1

ขนาดของเวกเตอร์ความโค้ง **แทนด้วย** κ (kappa)

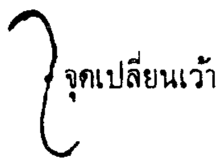
$$\kappa = |\vec{K}| = |\vec{K}(s)|$$

เรียก κ ว่า ความโค้ง ของ C ที่จุด R(s)

ตัวผกผันของความโค้ง แทนด้วย ρ

$$\therefore \rho = 1/\kappa = 1/|\vec{K}|$$

เรียก ρ ว่า รัศมีความโค้ง (radius of curvature) ที่จุด R(s) **จุดบน C เมื่อ**เวกเตอร์ความโค้ง $(\vec{K}) = \vec{O}$ เรียกว่าจุดเปลี่ยนเว้า (point of inflection) **ดังนั้นที่จุดเปลี่ยนเว้า** จะมีความโค้งเท่ากับศูนย์ และรัศมีความโค้ง เท่ากับอนันต์ (infinite) **ดูรูป** 3.6.2



รูป 3.62

ตัวอย่างที่ 3.6.1 วงกลมที่มีรัศมี = a และมีตัวแทนอิงตัวแปรเสริม คือ

$$\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j}, \qquad a > 0$$

จงหาความโค้ง และรัศมีความโค้ง

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = a$$

$$\vec{T} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$$

$$\vec{K} = \dot{\vec{T}}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= \frac{-1}{a}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

ความโค้ง $= |\vec{K}|$

$$= \frac{1}{a}$$

จะเห็นว่าความโค้งของวงกลมจะเท่ากับตัวผกผันของรัศมี

รัศมีความโค้ง $= \rho = \frac{1}{|\vec{K}|} = a$

รัศมีความโค้งของวงกลม คือ รัศมีของวงกลม **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.6.2 $\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a>0, \quad b \neq 0$

จงหา κ

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\vec{T} = (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k})$$

$$\vec{K} = \dot{\vec{T}}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j})$$

$$\vec{K} = (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j})(a^2+b^2)^{-1/2}$$

$$= (a^2+b^2)^{-1}(-a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j})$$

$$= \frac{-a}{a^2+b^2}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

$$\kappa = |\vec{K}| = \frac{a}{a^2+b^2}$$ **ตอบ**

ถ้าความโค้งของเส้นโค้ง C เท่ากับศูนย์แบบเอกลักษณ์ นั่นคือ

$|\vec{K}| \equiv 0$ แล้ว $\dot{\vec{T}} \equiv \vec{0}$ และอินทิเกรตจะได้

$\vec{T} = \vec{a}$, $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว และไม่เท่ากับศูนย์

เนื่องจาก $\vec{T} = \dot{\vec{R}}$ อินทิเกรตอีกครั้งหนึ่งจะได้

$\vec{R} = \vec{a}s + \vec{b}$, $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว

โดยที่ $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

และ $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

นั่นคือ C เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $b(b_1,b_2,b_3)$ และขนานกับ เวกเตอร์

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ในทางกลับกัน ถ้า C เป็นเส้นตรงที่มีสมการ คือ

$$\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

แล้ว $\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$

$= \vec{a}/|\vec{a}|$

และ $\vec{K} = |\dot{\vec{T}}| = \vec{0}$

$|\vec{K}| = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3.6.1 เส้นโค้งปรกติ ของชั้น $\geqq 2$ เป็นเส้นตรง ก็ต่อเมื่อความโค้งเท่ากับศูนย์แบบเอกลักษณ์

ทฤษฎีบทที่ 3.6.2 ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(t)$ เป็นตัวแทนใด ๆ ของเส้นโค้งของชั้น $\geqq 2$ แล้ว

$$\kappa = |\vec{K}| = \frac{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$$

ตัวอย่างที่ 3.6.3 $\vec{R} = (3t-t^3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + (3t + t^3)\vec{k}$

จงหา κ โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.6.2

วิธีทำ

$$\vec{R}' = (3-3t^2)\vec{i}+6t\vec{j}+(3+3t^2)\vec{k}$$

$$\vec{R}'' = -6t\vec{i}+6\vec{j}+6t\vec{k}$$

$$\vec{R}''' = -6\vec{i}+6\vec{k}$$

$$= 6(-\vec{i}+\vec{k})$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(36t^2-18-18t^2)-\vec{j}(18t-18t^3+18t+18t^3)$$
$$+\vec{k}(18-18t^2+36t^2)$$

$$= (18t^2-18)\vec{i}-36t\vec{j}+(18t^2+18)\vec{k}$$

$$= 18\left[(t^2-1)\vec{i}-2t\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}\right]$$

$$|\vec{R}' \times \vec{R}''| = 18\sqrt{(t^2-1)^2+4t^2+(t^2+1)^2}$$

$$= 18\sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2+t^4+2t^2+1}$$

$$= 18\sqrt{2t^4+4t^2+2}$$

$$= 18\sqrt{2}\sqrt{(t^2+1)^2}$$

$$= 18\sqrt{2}(t^2+1)$$

$$|\vec{R}'| = \sqrt{(3-3t^2)^2+36t^2+(3+3t^2)^2}$$

$$= \sqrt{9-18t^2+9t^4+36t^2+9+18t^2+9t^4}$$

$$= \sqrt{18+18t^4+36t^2}$$

$$= 3\sqrt{2}\sqrt{1+t^4+2t^2}$$

$$= 3\sqrt{2}(t^2+1)$$

$$\kappa = \frac{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$$

$$= \frac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{(3\sqrt{2}(t^2+1))^3}$$

$$= \frac{18\sqrt{2}\ (t^2+1)}{27 \times 2\sqrt{2}(t^2+1)^3}$$

$$= 1/3(t^2+1)^{2}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาเวกเตอร์ความโค้ง และความโค้งของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = t\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k} \quad \text{ที่ } t = 1$$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.6.2

3. จงแสดงว่า เส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ ซึ่งอยู่ใน ชั้น ≥ 2 เป็นเส้นตรง ถ้า $\vec{R}'(t)$ และ $\vec{R}''(t)$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้นสำหรับทุก ๆ ค่า t

4. จงแสดงว่าเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ที่อยู่ใน ชั้น ≥ 2 เป็นเส้นตรง ถ้าเส้นสัมผัสทุกเส้นมีจุดตัดร่วมกัน

5. จงแสดงว่ารัศมีความโค้งของ $\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + a\cos t\vec{k}$

คือ $$\rho = \frac{a(1+\sin^2 t)^{3/2}}{\sqrt{2}}$$

6. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{R} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ แล้ว

$$\kappa = \frac{|x'y''-y'x''|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$$

7. จงหาความโค้งของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j} + t\vec{k}$$

3.7 เวกเตอร์หน่วยแนวฉาก (Principal Normal Unit Vector)

เส้นโค้ง C ที่อยู่ใน ชั้น ≥ 2 จะมีเวคเตอร์ความโค้ง คือ $\vec{K}$ แปรเปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่องตามเส้นโค้ง C

เมื่อเราหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{K}$ ใช้สัญลักษณ์ $\vec{N}$ จะได้ว่า

$$\vec{N} = \vec{N}(s) = \frac{\vec{K}(s)}{|\vec{K}(s)|} \text{ ถ้า } \vec{K}(s) \neq \vec{0} \ldots\ldots (3.7.1)$$

เรียก $\vec{N}$ ว่า เวกเตอร์หน่วยแนวฉาก

ข้อสังเกต จากเส้นตรงมีว่า $\vec{K} \equiv \vec{O}$ ดังนั้น เวกเตอร์หน่วยแนวฉากกำหนดค่าไม่ได้

จากสมการ (3.7.1) จะได้ว่า

$$\vec{K}(s) = \kappa \vec{N}(s) \ldots\ldots\ldots (3.7.2)$$

จุดที่อยู่บนเส้นโค้งซึ่ง $\vec{N}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{K}$ จะได้ว่า

$$\kappa = |\vec{K}|$$

และเมื่อ $\vec{N}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{K}$ จะได้ว่า

$$\kappa = -|\vec{K}|$$

ถ้าคูณสมการ (3.7.2) ด้วย $\vec{N}$ แบบสเกลาร์ และใช้

$$\vec{N}.\vec{N} = |\vec{N}|^2 = 1 \quad \text{จะได้สูตร}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}(s).\vec{N}(s) &= \kappa \vec{N}(s).\vec{N}(s) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

$$\kappa = \vec{K}.\vec{N} \quad \ldots\ldots\ldots(3.7.3)$$

ตัวอย่างที่ 3.7.1 $\vec{R} = t\vec{i} + (1/3)t^3\vec{j}$ จงหา $\vec{N}$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i} + t^2\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{1+t^4}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= (1+t^4)^{-1/2}\,(\vec{i}+t^2\vec{j})$$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}(2t\vec{j}) - (1/2)(1+t^4)^{-3/2}(4t^3)(\vec{i}+t^2\vec{j})$$

$$= (1+t^4)^{-3/2}\Big[(1+t^4)(2t\vec{j}) - 2t^3\,(\vec{i}+t^2\vec{j})\Big]$$

$$= -(1+t^4)^{-3/2}\,(2t^3\vec{i} - 2t\vec{j})$$

$$\vec{K} = -(1+t^4)^{-2}\,(2t^3\vec{i} - 2t\vec{j})$$

$$|\vec{K}| = \sqrt{\frac{4t^6+4t^2}{(1+t^4)^4}}$$

$$= \frac{2t\sqrt{t^4+1}}{(1+t^4)^2}$$

$$= 2t(1+t^4)^{-3/2}$$

$$\vec{N} = \vec{K} \Big/ |\vec{K}|$$

$$= \frac{-(1+t^4)^{-2}(2t)(t^2\vec{i}-\vec{j})}{2t(1+t^4)^{-3/2}}$$

$$= -(1+t^4)^{-1/2}(t^2\vec{i}-\vec{j})$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.7.2 จงหา $\vec{N}$ ของ ฮีลิกซ์ ซึ่งมีสมการ คือ

$$\vec{R}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.4.1 จะได้ว่า

$$\vec{T} = (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k})$$

และจากตัวอย่างที่ 3.6.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{K} \Big/ |\vec{K}| \\ &= \frac{-a}{a^2+b^2}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}) \Big/ \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) \\ &= -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.7.3 จงแสดงว่า สำหรับ ฮีลิกซ์ จะได้ว่า

$\vec{N}.\vec{e} = 0$ เมื่อ $\vec{e}$ คือเวกเตอร์หน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับแกนของฮีลิกซ์

วิธีทำ ในที่นี้ $\vec{e}$ ก็คือ $\vec{k}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N}\,\vec{e} &= \vec{N}.\vec{k} \\ &= (-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}).\vec{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.7

จากข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหา เวกเตอร์หน่วยแนวฉาก

1. $\vec{R} = t\vec{i}+\frac{3}{2}t^2\vec{j}+\frac{3}{2}t^3\vec{k}, \quad t = 2$
2. $\vec{R} = \frac{t^3}{3}\vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{2}{t}\vec{k}, \quad t = 1$
3. $\vec{R} = (t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}+t\vec{k}, \quad t = 0$
4. $\vec{R} = (1+t)\vec{i} + (3-t)\vec{j} +(2t +4)\vec{k}, \quad t = 3$
5. $\vec{R} = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad t = 0$
6. $\vec{R} = (e^{t/2}+e^{-t/2})\vec{i}+(e^{t/2}-e^{-t/2})\vec{j}+2t\vec{k}, \quad t = 0$