3.8 เส้นแนวฉากและระนาบสัมผัสประชิด (Principal Normal Line and Osculating Plane)

เส้นตรงที่ผ่านจุด R_0 บนเส้นโค้ง C ซึ่งขนานกับ เวกเตอร์หน่วยแนวฉาก ดังรูป 3.8.1 เรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นแนวฉาก ของ C ที่จุด R_0

สมการของเส้นแนวฉาก ที่จุด R_0 คือ

$$\vec{r} = \vec{R}_o + \lambda\vec{N}, \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

$$= \vec{R}_o + \lambda(\dot{\vec{R}}/|\dot{\vec{R}}|)$$

ระนาบที่ขนานกับเวกเตอร์หน่วยสัมผัสและเวกเตอร์หน่วยแนวฉากเรียกว่า ระนาบสัมผัสประชิดของ C ที่จุด R_o คือ

$$\left[(\vec{r} - \vec{R}_o)\vec{T}\vec{N}\right] = 0$$

จาก $\vec{T} = \dfrac{d\vec{R}}{ds} = \dot{\vec{R}}$

$\dot{\vec{T}} = \dfrac{d^2\vec{R}}{ds^2} = \ddot{\vec{R}}$ ขนานกับ $\vec{N}$

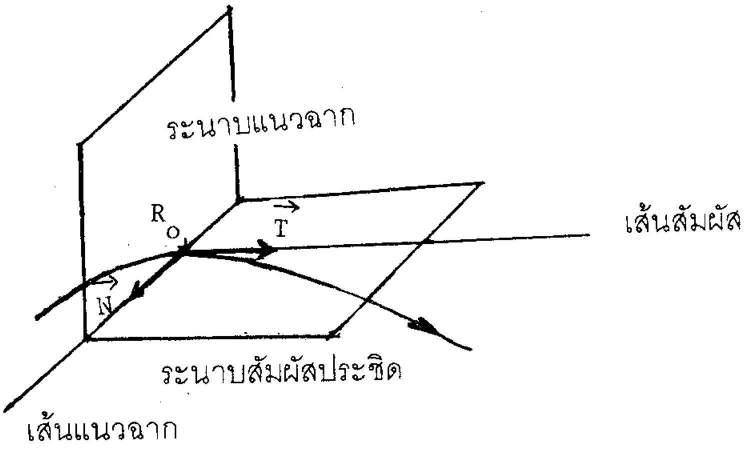
และจุดซึ่ง $\lambda \neq 0$

จะได้สมการของเส้นแนวฉากที่จุด R_0 คือ

$$\vec{r} = \vec{R}_o + \mu\ddot{\vec{R}}_o, \qquad -\infty < \mu < \infty$$

สมการระนาบสัมผัสประชิด ที่จุด R_0 คือ

$$\left[(\vec{r} - \vec{R}_o)\dot{\vec{R}}_o\ddot{\vec{R}}_o\right] = 0$$



รูป 3.8.1

ตัวอย่างที่ 3.8.1

$$\vec{R} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{R}' = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{R}'| = \sqrt{2}$$

$$\vec{T} = \vec{R}'/|\vec{R}'|$$

$$= (1/\sqrt{2})(-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k})$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = (1/\sqrt{2})(-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j})$$

$$= -(1/\sqrt{2})(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Bigg/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= \frac{-1}{2}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

$$\vec{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{j} + \frac{\pi}{2}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{R}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(1/\sqrt{2})\,\vec{i} + (1/\sqrt{2})\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{R}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(1/2)\vec{j}$$

สมการเส้นแนวฉากที่ $t = \frac{\pi}{2}$ คือ

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R}(\pi/2) + \lambda\ddot{\vec{R}}(\pi/2), \quad -\infty < \lambda < \infty \\ &= (\vec{j}+\pi/2\ \vec{k}) + \lambda(-1/2\,\vec{j}), \quad -\infty < \lambda < \infty \\ &= (1-\lambda/2)\vec{j} + \pi/2\ \vec{k}, \quad -\infty < \lambda < \infty\end{aligned}$$

ตอบ

หรือ

$$x = 0$$
$$y = 1-\lambda/2$$
$$z = \pi/2$$

ตอบ

สมการของระนาบสัมผัสประชิดที่ $t = \pi/2$ คือ

$$\left[(\vec{r} - \vec{R}(\pi/2))\dot{\vec{R}}(\pi/2)\ddot{\vec{R}}(\pi/2)\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-\pi/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1/2\sqrt{2})-(y-1)(0)+(z-\pi/2)(1/2\sqrt{2}) = 0$$
$$x + z - \pi/2 = 0$$
$$x + z = \pi/2$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.8

จากข้อ 1 ถึงข้อ 4 จงหาสมการ เส้นแนวฉาก ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = (1+t)\vec{i} + (3-t)\vec{j} + (2t+4)\vec{k}, \quad t = 3$
2. $\vec{R} = t\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j} + \frac{3}{2}t^3\vec{k}, \quad t = 2$
3. $\vec{R} = \frac{t^3}{3}\vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{2}{t}\vec{k}, \quad t = 1$
4. $\vec{R} = (t-\sin t)\vec{i} + (1-\cos t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t = 0$
5. จงแสดงว่า เส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ จะได้ว่า

เวกเตอร์ $\vec{R}''$ ขนานกับ ระนาบสัมผัสประชิด และ ส่วนประกอบ เมื่อเทียบกับ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ คือ $|\vec{R}'|$ และ $\kappa\ |\vec{R}'|^2$ ตามลำดับ

6. ก. ถ้า $\vec{R}'$ และ $\vec{R}''$ เป็น อิสระเชิงเส้น ที่จุด R ของเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ จงแสดงว่า ระนาบสัมผัสประชิด ที่จุด R คือ $[(\vec{r}-\vec{R})\vec{R}'\vec{R}''] = 0$

ข. ใช้สูตรนี้ในการหาสมการ ระนาบสัมผัสประชิด ของเส้นโค้ง

$$\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \text{ ที่ } t = 1$$

จากข้อ 7 ถึงข้อ 11 จงหาสมการ ระนาบสัมผัสประชิด ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

7. $\vec{R} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}, \quad t = 1$
8. $\vec{R} = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}, \quad t = 0, \quad t = 1$
9. $\vec{R} = 4\cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t = 2\pi/3$
10. $\vec{R} = (e^{t/2}+e^{-t/2})\vec{i}+(e^{t/2}-e^{-t/2})\vec{j}+2t\vec{k}, \quad t = 0$
11. $\vec{R} = e^t\cos t\vec{i}+e^t\sin t\vec{j} +e^t\vec{k}, \quad t = 0$
12. จงแสดงว่าเส้นโค้งเป็นเส้นโค้งในระนาบ ถ้า ระนาบสัมผัสประชิด ทั้งหลายตัดกันที่จุดเดียวกัน

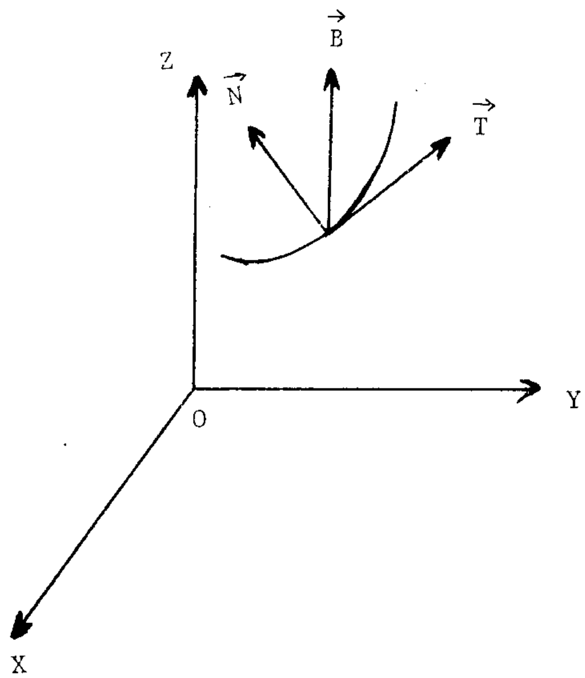
3.9 คู่แนวฉาก (Binormal)

ให้ $\vec{R}=\vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งปรกติ C ที่อยู่ในชั้น $\geqq 2$ ซึ่ง $\vec{N}$ ต่อเนื่องแล้วที่จุดแต่ละจุดบน C จะมีเวกเตอร์หน่วย 2 เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน คือ เวกเตอร์หน่วยสัมผัส $(\vec{T})$ และเวกเตอร์หน่วยแนวฉาก $(\vec{N})$ พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{B}$ ซึ่ง

$$\vec{B} = \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

เรียก $\vec{B}$ ว่า เวกเตอร์คู่แนวฉาก (unit binormal vector)

$\vec{B}$ มีความต่อเนื่อง และ มีความยาว 1 หน่วย และ $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ ทำให้เกิด right – handed orthonormal triplet เรียกว่า moving trihedron ของ C ดังรูป 3.9.1



รูป 3.9.1

เส้นตรงที่ผ่านจุด R_o และขนานกับ $\vec{B}$ เรียกว่า เส้นคู่แนวฉาก (binormal line) ของ C

ที่จุด R_0

สมการของเส้นคู่แนวฉากที่จุด R_o คือ

$$\vec{r} = \vec{R}_o + \lambda\vec{B}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

ระนาบที่ผ่านจุด R_o บน C ขนานกับ $\vec{T}$ และ $\vec{B}$ เรียกว่าระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก (rectifying plane)

ที่จุด R_0

สมการของระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉากที่จุด R_o คือ

$$(\vec{r}-\vec{R}_o) \cdot \vec{N} = 0$$

ดังนั้นที่จุด R_0 บน C จะได้เส้น และระนาบต่อไปนี้

เส้นสัมผัส : $\quad \vec{r} = \vec{R}_o + \lambda\vec{T}$

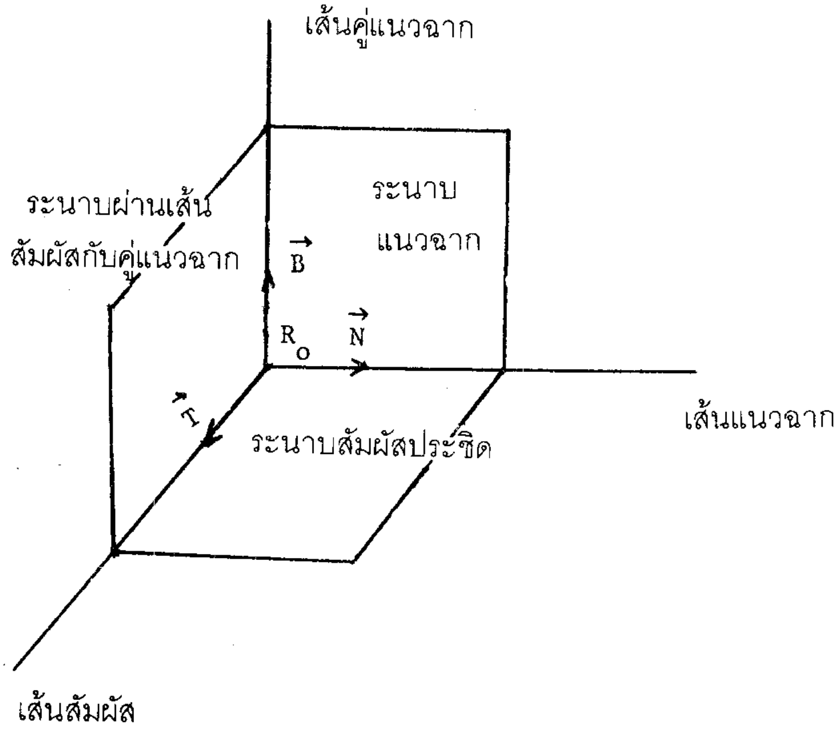
เส้นแนวฉาก : $\quad \vec{r} = \vec{R}_o + \lambda\vec{N}$

เส้นคู่แนวฉาก : $\quad \vec{r} = \vec{R}_o + \lambda\vec{B}$

ระนาบแนวฉาก : $\quad (\vec{r}-\vec{R}_o) \cdot \vec{T} = 0$

ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก : $\quad (\vec{r}-\vec{R}_o) \cdot \vec{N} = 0$

ระนาบสัมผัสประชิด : $\quad (\vec{r}-\vec{R}_o) \cdot \vec{B} = 0$



ตัวอย่างที่ 3.9.1 จากตัวอย่างที่ 3.6.2

$$\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a > 0, \quad b \neq 0$$

$$\vec{T} = (a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k})$$

$$\vec{K} = \frac{-a}{a^2+b^2}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

$$\vec{N} = \vec{K}/|\vec{K}| = -(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t & a(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t & b\,(a^2+b^2)^{-1/2} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2)^{-1/2}(b\sin t\vec{i} - b\cos t\vec{j} + a\vec{k})$$

สมการเส้นคู่แนวฉากที่ $t = t_o$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R}(t_o) + \lambda\vec{B}(t_o)$$

$$\vec{r} = (a\cos t_o\vec{i} + a\sin t_o\vec{j} + bt_o\vec{k}) + \lambda((a^2+b^2)^{-1/2}(b\sin t_o\vec{i} - b\cos t_o\vec{j} + a\vec{k}))$$

$$= (a\cos t_o + \lambda b(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t_o)\vec{i} + (a\sin t_o - \lambda b(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t_o)\vec{j}$$

$$+ (bt_o + a\lambda(a^2+b^2)^{-1/2})\vec{k} \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty$$

ถ้าเปลี่ยนตัวแปรเสริม โดยให้ $\theta = \lambda(a^2+b^2)^{-1/2}$ จะได้ว่า

$$\vec{r} = (a\cos t_o + \theta b\sin t_o)\vec{i} + (a\sin t_o - \theta b\cos t_o)\vec{j} + (bt_o + a\theta)\vec{k}, \quad -\infty < \theta < \infty$$

สมการ ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก ที่ $t = t_0$ คือ

$$(\vec{r} - \vec{R}(t_o)) \cdot \vec{N}(t_o) = 0$$

$$\left[(x - a\cos t_o)\vec{i} + (y - a\sin t_o)\vec{j} + (z - bt_o)\vec{k}\right] \cdot (-\cos t_o\vec{i} - \sin t_o\vec{j}) = 0$$

$$(x - a\cos t_o)(-\cos t_o) + (y - a\sin t_o)(-\sin t_o) = 0$$

$$-\cos t_o x + a\cos^2 t_o - \sin t_o y + a\sin^2 t_o = 0$$

$$\cos t_o x + \sin t_o y - a = 0$$

ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉากขนานกับแกน Z

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.9.2 $\vec{R} = (3t-t^3)\vec{i}+3t^2\vec{j}+(3t+t^3)\vec{k}$ จงหา $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$

วิธีทำ

$$\vec{R}' = (3-3t^2)\vec{i}+6t\vec{j}+(3+3t^2)\vec{k}$$

$$= 3\left[(1-t^2)\vec{i}+2t\vec{j}+(1+t^2)\vec{k}\right]$$

$$|\vec{R}'| = 3\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2+(1+t^2)^2}$$

$$= 3\sqrt{1-2t^2+t^4+4t^2+1+2t^2+t^4}$$

$$= 3\sqrt{2+2t^4+4t^2}$$

$$= 3\sqrt{2}\sqrt{1+t^4+2t^2}$$

$$= 3\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}\left[(1-t^2)\vec{i}+2t\vec{j}+(1+t^2)\vec{k}\right]$$ **ตอบ**

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-4t\vec{i}+2(1-t^2)\vec{j}}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{-2t\vec{i}+(1-t\ )\vec{j}}{3(1+t^2)^3}$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{\left[4t^2+(1+t^2)^2\right]^{1/2}}{3(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{(4t^2+1-2t^2+t^4)^{1/2}}{3(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{(1+2t^2+t^4)^{1/2}}{3(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{1+t}{3(1+t^2)^3} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds}\Big/\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

$$= (-2t\vec{i}+(1-t^2)\vec{j}\Big/(1+t^2)$$ **ตอบ**

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{1+t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+t^2)^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \\ -2t & 1-t^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^2}\Big[\vec{i}(-(1+t^2)(1-t^2)-\vec{j}(2t(1+t^2))$$
$$+\vec{k}((1-t^2)^2+4t^2)\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+t^2)^2}\Big[\vec{i}(-(1+t^2)(1-t^2)-2t\ (1+t^2)\vec{j}$$
$$+\vec{k}(1+t^2)^2\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}(-(1+t^2)\vec{i}-2t\vec{j}+(1+t^2)\vec{k})$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.9.3 $\vec{R} = 3t^2\vec{i}+2t^3\vec{j}+3t\vec{k}$ เมื่อ $t = 1$ จงหา $\vec{T},\vec{N},\vec{B},K$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 6t\vec{i} + 6t^2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{36t^2+36t^4+9}$$

$$= 3\sqrt{4t^4+4t^2+1}$$

$$= 3(2t^2+1)$$

$$= \frac{d\vec{R}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= \frac{2t}{2t^2+1}\vec{i} + \frac{2t^2}{2t^2+1}\vec{j} + \frac{\vec{k}}{2t^2+1}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{2-4t^2}{(2t^2+1)^2}\vec{i} + \frac{4t}{(2t^2+1)^2}\vec{j} - \frac{4t}{(2t^2+1)^2}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= ((2-4t^2)\vec{i}+4t\vec{j}-4t\vec{k}) \Big/ 3(2t^2+1)^3$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{4-16t^2+16t^4+16t^2+16t^2}{9(2t^2+1)^6}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(1+4t^2+4t^4)}{9(2t^2+1)^6}}$$

$$= \frac{2}{3(2t^2+1)^2}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

$$= ((2-4t^2)\vec{i}+4t\vec{j}-4t\vec{k}) \Big/ 2(2t^2+1)$$

$t = 1,\quad \vec{T} = 2/3\,\vec{i} + 2/3\,\vec{j} + 1/3\,\vec{k}$ **ตอบ**

$\vec{N} = -2/6\,\vec{i} + 4/6\,\vec{j} - 4/6\,\vec{k}$

$= -1/3\,\vec{i} + 2/3\,\vec{j} - 2/3\,\vec{k}$ **ตอบ**

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-4/9-2/9)-\vec{j}(-4/9+1/9)+\vec{k}(4/9+2/9)$$

$$= -6/9\,\vec{i}+3/9\,\vec{j}+6/9\,\vec{k}$$

$= -2/3\,\vec{i}+1/3\,\vec{j}+2/3\,\vec{k}$ **ตอบ**

เนื่องจาก $K = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$

$$= 2/3(2t^2+1)^2$$

ที่ $t = 1,\ K = 2/27$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3.9.4 $\vec{R} = \frac{1}{3}t^3\vec{i}+2t\vec{j}+\frac{2}{t}\vec{k}, \quad t = 2$ จงหา

ก. $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa$

ข. เส้นสัมผัส, เส้นแนวฉาก และ เส้นคู่แนวฉาก

ค. ระนาบแนวฉาก, ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก และระนาบสัมผัสประชิด

วิธีทำ ก.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = t^2\vec{i}+2\vec{j}-2t^{-2}\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{t^4+4+4t^{-4}}$$

$$= t^2+2t^{-2}$$

$$\vec{T} = \frac{t^2\vec{i}+2\vec{j}-2t^{-2}\vec{k}}{t^2+2t^{-2}}$$

$$= \frac{t^4\vec{i}+2t^2\vec{j}-2\vec{k}}{t^4+2}$$

$$\vec{T}(2) = \frac{16\vec{i}+8\vec{j}-2\vec{k}}{16+2}$$

$$= \frac{2(8\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k})}{18}$$

$$= \frac{8\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}}{9}$$ **ตอบ**

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{(t^4+2)(4t^3\vec{i}+4t\vec{j})-(t^4\vec{i}+2t^2\vec{j}-2\vec{k})(4t^3)}{(t^4+2)^2}$$

$$= \frac{(4t^7+8t^3)\vec{i}+(4t^5+8t)\vec{j}-4t^7\vec{i}-8t^5\vec{j}+8t^3\vec{k}}{(t^4+2)^2}$$

$$= \frac{8t^3\vec{i}+(8t-4t^5)\vec{j}+8t^3\vec{k}}{(t^4+2)^2}$$

$$= \frac{4t(2t^2\vec{i}+(2-t^4)\vec{j}+2t^2\vec{k})}{(t^4+2)^2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$= \frac{4t(2t^2\vec{i}+(2-t^4)\vec{j}+2t^2\vec{k})}{(t^4+2)^2(t^2+2t^{-2})}$$

$$= \frac{4t^3(2t^2\vec{i}+(2-t^4)\vec{j}+2t^2\vec{k})}{(t^4+2)^3}$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{4t^3}{(t^4+2)^3} \sqrt{4t^4+(2-t^4)+4t^4}$$

$$= \frac{4t^3}{(t^4+2)^3} \sqrt{8t^4+4-4t^4+t^8}$$

$$= \frac{4t^3}{(t^4+2)^3} \sqrt{t^8+4t^4+4}$$

$$= \frac{4t^3}{(t^4+2)^3} (t^4+2)$$

$$= 4t^3 / (t^4+2)^2$$

$$\vec{N} = \frac{2t^2\vec{i}+(2-t^4)\vec{j}+2t^2\vec{k}}{t^4+2}$$

$$\vec{N}(2) = \frac{8\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}}{18}$$

$$= \frac{4\vec{i}-7\vec{j}+4\vec{k}}{9}$$ ตอบ

$$K = 8/81$$ ตอบ

$$t = 2,\ \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8/9 & 4/9 & -1/9 \\ 4/9 & -7/9 & 4/9 \end{vmatrix}$$

$$= (1/81)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1/81)\left[\vec{i}(16-7)-\vec{j}(32+4)+\vec{k}(-56-16)\right]$$

$$= (1/81)(9\vec{i} - 36\vec{j} - 72\vec{k})$$

$$= (1/9)(\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k})$$ **ตอบ**

ข. สมการเส้นสัมผัส ที่ $t=2$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R}(2)+\lambda\vec{T}(2)$$

$$= (\frac{8}{3}\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k})+\lambda(\frac{8}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{\vec{k}}{9})$$

$$= (\frac{8}{3}+\frac{8}{9}\lambda)\vec{i}+(4+\frac{4}{9}\lambda)\vec{j}+(1-\frac{\lambda}{9})\vec{k}$$

หรือ

$$\frac{x-8/3}{8} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{-1}$$ **ตอบ**

สมการเส้นแนวฉากที่ $t=2$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R}(2) + \lambda\vec{N}(2)$$

$$= (\frac{8}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + \lambda(\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{7}{9}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k})$$

$$= (\frac{8}{3} + \frac{4}{9}\lambda)\vec{i} + (4 - \frac{7}{9}\lambda)\vec{j} + (1 + \frac{4}{9}\lambda)\vec{k}$$

หรือ

$$\frac{x-\frac{8}{3}}{4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-1}{4}$$ **ตอบ**

สมการเส้นคู่แนวฉากที่ $t=2$ คือ

$$\vec{r} = \vec{R}(2) + \lambda\vec{B}(2)$$

$$= (\frac{8}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + \lambda(\frac{1}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{8}{9}\vec{k})$$

$$= (\frac{8}{3} + \frac{\lambda}{9})\vec{i} + (4 - \frac{4}{9}\lambda)\vec{j} + (1 - \frac{8}{9}\lambda)\vec{k}$$

หรือ $\dfrac{x-\frac{8}{3}}{1} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z-1}{-8}$ **ตอบ**

ค. สมการระนาบแนวฉากที่ $t=2$ คือ

$$(\vec{r}-\vec{R}(2))\ \vec{T}(2) = 0$$

$$\vec{R}(2) = \frac{8}{3}\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{T}(2) = \frac{8}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{\vec{k}}{9}$$

$$\left(\vec{r}-\left(\frac{8}{3}\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{\vec{k}}{9}\right) = 0$$

$$\frac{8}{9}\left(x-\frac{8}{3}\right)+\frac{4}{9}(y-4)-\frac{1}{9}(z-1) = 0$$

$$8x-\frac{64}{3}+4y-16-z+1 = 0$$

$$24x+12y-3z-64-48+3 = 0$$

$$24x+12y-3z-109 = 0$$ **ตอบ**

สมการระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก ที่ $t=2$ คือ

$$(\vec{r}-\vec{R}(2)).\vec{N}(2) = 0$$

$$\left(\vec{r}-\left(\frac{8}{3}\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)\right) \left(\frac{4}{9}\vec{i}-\frac{7}{9}\vec{j}+\frac{4}{9}\vec{k}\right) = 0$$

$$\frac{4}{9}\left(x-\frac{8}{3}\right)-\frac{7}{9}(y-4)+\frac{4}{9}(z-1) = 0$$

$$4x-\frac{32}{3}-7y+28+4z-4 = 0$$

$$12x-32-21y+84+12z-12 = 0$$

$$12x-21y+12z+40 = 0$$ **ตอบ**

สมการระนาบสัมผัสประชิดที่ $t=2$ คือ

$$(\vec{r}-\vec{R}(2)).\vec{B}(2) = 0$$

$$\left(\vec{r}-\left(\frac{8}{3}\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)\right) \left(\frac{1}{9}\vec{i}-\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{8}{9}\vec{k}\right) = 0$$

$$\frac{1}{9}(x-\frac{8}{3})-\frac{4}{9}(y-4)-\frac{8}{9}(z-1) = 0$$

$$x-8/3-4y+16-8z+8 = 0$$

$$3x-8-12y+48-24z+24 = 0$$

$$3x-12y-24z+64 = 0$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.9.5 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\vec{R}(t)$ เป็นเส้นโค้งปรกติใน R^3 แล้ว

ก. $\vec{B} = \dfrac{\vec{R}' \times \vec{R}''}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}$

ข. $\vec{N} = \dfrac{(\vec{R}' \times \vec{R}'') \times \vec{R}'}{|(\vec{R}' \times \vec{R}'') \times \vec{R}'|}$

พิสูจน์ ก. จากหัวข้อ 3.4 จะได้ว่า

$$\vec{T} = \vec{R}' / |\vec{R}'|$$

$$\therefore \vec{R}' = \vec{T}\,|\vec{R}'|$$

$$= \vec{T}\, s'$$

$$\vec{R}'' = \vec{T}s'' + \vec{T}'s'$$

$$= \vec{T}s'' + \dot{\vec{T}}\, s's'$$

$$= \vec{T}s'' + \kappa\vec{N}(s')^2 \quad \text{จาก} \quad \dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = s'\vec{T} \times (s''\vec{T} + \kappa(s')^2\, \vec{N})$$

$$= s's''\, \vec{T} \times \vec{T} + \kappa(s')^3\, (\vec{T} \times \vec{N})$$

$$= \kappa(s')^3\, \vec{B}$$

ถ้า $\kappa \neq 0$ จะได้ว่า

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}' \times \vec{R}''}{\kappa(s')^3}$$

$$= \frac{\vec{R}' \times \vec{R}''}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|} \quad \because \kappa(s')^3 = |\vec{R}' \times \vec{R}''|$$

ข. $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

$$= \frac{\vec{R}' \times \vec{R}''}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|} \times \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|}$$

$$= \frac{[\vec{R}' \times \vec{R}''] \times \vec{R}'}{|[\vec{R}' \times \vec{R}''] \times \vec{R}'|}$$ **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 3.9.6 $\vec{R} = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j}, \quad a > 0$ จงหา $\vec{N}, \vec{B}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.4.2

$$\vec{T} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$$

และจากตัวอย่างที่ 3.6.1

$$\kappa = 1/a$$

และ
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{-\cos t}{a}\vec{i} - \frac{\sin t}{a}\vec{j}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

$$= -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$$

$$= (-1/a)\vec{R}$$ **ตอบ**

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= \vec{k}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.9

จากข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหา $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa$ ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $\vec{R} = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 2t\vec{k}$, $t = \pi/2$
2. $\vec{R} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}$, $t = 1$
3. $\vec{R} = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$, $t = 0$, $t = 1$
4. $\vec{R} = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\, t\vec{k}$, $t = 0$
5. $\vec{R} = 3t\cos t\vec{i} + 3t\sin t\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t = 0$
6. $\vec{R} = e^t\sin t\vec{i} + e^t\cos t\vec{j} + e^t\vec{k}$, $t = 0$

3.10 การบิดหรือความบิด (Torsion)

ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งปรกติของ ชั้น ≥ 3 ซึ่ง $\vec{N}(s)$ อยู่ใน ชั้น C^1 หาอนุพันธ์ ของ $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{B}}(s) &= \dot{\vec{T}}(s) \times \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \times \dot{\vec{N}}(s) \\
&= \kappa(s)\vec{N}(s) \times \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \times \dot{\vec{N}}(s) \\
&= \kappa(s)\left[\vec{N}(s) \times \vec{N}(s)\right] + \vec{T}(s) \times \dot{\vec{N}}(s) \\
&= \vec{T}(s) \times \dot{\vec{N}}(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.10.1)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย $\dot{\vec{N}}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ และขนานกับระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับคู่แนวฉาก จะได้ว่า $\dot{\vec{N}}$ เป็น ผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{T}$ และ $\vec{B}$

ให้ $\dot{\vec{N}}(s) = \mu(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)$ โดยที่ $\mu(s)$ และ $\tau(s)$ เป็นสเกลาร์

แทนค่า $\dot{\vec{N}}(s)$ ในสมการ (3.10.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{B}}(s) &= \vec{T}(s) \times \left[\mu(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)\right] \\
&= \vec{T}(s) \times \mu(s)\vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \tau(s)\vec{B}(s) \\
&= \vec{0} + \tau(s)\left[\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)\right] \\
&= -\tau(s)\vec{N}(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.10.2)
\end{aligned}$$

$\tau(s)$ ในสมการ (3.10.2) เรียกว่า second curvature หรือ ความบิด ของ C ที่จุด $R(s)$

เมื่อคูณสมการ (3.10.2) แบบสเกลาร์ ด้วย $\vec{N}$ จะได้

$$\vec{B}'(s).\vec{N}(s) = -\tau(s)\vec{N}(s).\vec{N}(s)$$

$$= -\tau(s)$$

$$\therefore \quad \tau(s) = -\vec{B}'(s).\vec{N}(s) \ldots\ldots (3.10.3)$$

ตัวผกผันของความบิด แทนด้วย σ

$\sigma = 1/\tau$ เรียก σ ว่ารัศมีของความบิด (**radius of torsion**)

ตัวอย่างที่ 3.10.1 $\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a > 0, \quad b \neq 0$

จากตัวอย่างที่ 3.9.1

$$\vec{B} = (a^2+b^2)^{-1/2}(b\sin t\vec{i} - b\cos t\vec{j} + a\vec{k})$$

$$\vec{B}' = \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (a^2+b^2)^{-1/2}(b\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j})$$

จากตัวอย่างที่ 3.6.2

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = (a^2+b^2)^{1/2}$$

$$\vec{B}' = (a^2+b^2)^{-1}(b\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j})$$

$$\tau = -\vec{B}'.\vec{N}$$

$$= -\left[(a^2+b^2)^{-1}(b\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j})\right].(-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j})$$

$$= -(a^2+b^2)^{-1}(-b\cos^2 t - b\sin^2 t)$$

$$= b/(a^2+b^2)$$

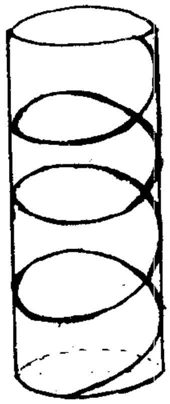
ตอบ

ข้อสังเกต ถ้า $b > 0$ (ดังนั้น $\tau > 0$) ฮีลิกซ์ เป็น เส้นโค้งบิดขวา (right-handed curve)

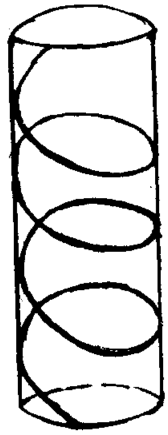
ดังรูป 3.10.1

ถ้า $b < 0$ (ดังนั้น $\tau < 0$) ฮีลิกซ์ เป็น เส้นโค้งบิดซ้าย (left-handed curve)

ดังรูป 3.10.2



รูป 3.10.1



รูป 3.10.2

ถ้าความบิดเท่ากับศูนย์แบบเอกลักษณ์

นั่นคือ ถ้า $\tau \equiv 0$ แล้ว

$$\dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N} \equiv 0$$

$\vec{B} = \vec{B}_0$ โดยที่ $\vec{B}_0$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว

พิจารณา
$$\frac{d}{ds}(\vec{R}\cdot\vec{B}_0) = \dot{\vec{R}}\cdot\vec{B}_0$$
$$= \vec{T}\cdot\vec{B}_0$$

เนื่องจาก $\vec{T}$ และ $\vec{B}_0$ ตั้งฉากกัน ดังนั้น

$$\frac{d}{ds}(\vec{R}.\vec{B}_o) = \vec{T}.\vec{B}_o = 0$$

อินทิเกรทจะได้

$$\vec{R}.\vec{B}_0 = \text{ค่าคงตัว}$$

นั่นคือ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งในระนาบ

และระนาบดังกล่าวมีสมการว่า

$$\vec{R}.\vec{B}_0 = \text{ค่าคงตัว}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.10.1 เส้นโค้งใน ชั้น ≥ 3 ซึ่ง $\vec{N}$ อยู่ใน ชั้น C^1 และอยู่ในระนาบ ก็ต่อเมื่อ ความบิดของมันเท่ากับศูนย์แบบเอกลักษณ์

τ (ความบิด) นอกจากจะหาได้จากสูตร (3.10.3) แล้วยังมีวิธีที่จะหาความบิดได้สะดวกกว่า โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.10.2

ทฤษฎีบทที่ 3.10.2 จุดบนเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ ซึ่ง $\kappa \neq 0$ จะได้ว่า

$$\tau = \frac{[\vec{R}'\vec{R}''\vec{R}''']}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$$

ตัวอย่างที่ 3.10.2 $\vec{R} = (3t-t^3)\vec{i}+3t^2\vec{j}+(3t + t^3)\vec{k}$

จงหาความบิด โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.10.2

วิธีทำ

$$\tau = \frac{[(\vec{R}'\vec{R}''\vec{R}''']}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$$

$$= \frac{(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$$

$$\vec{R}' = (3-3t^2)\vec{i}+6t\vec{j}+(3+3t^2)\vec{k}$$

$$\vec{R}'' = -6t\vec{i}+6\vec{j}+6t\vec{k}$$

$$\vec{R}''' = -6\vec{i}+6\vec{k}$$

$$= 6(-\vec{i}+\vec{k})$$

$$\vec{R}'\times\vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(36t^2-18-18t^2)-\vec{j}(18t-18t^3+18t+18t^3)+\vec{k}(18-18t^2+36t^2)$$

$$= (18t^2-18)\vec{i}-36t\vec{j}+(18t^2+18)\vec{k}$$

$$= 18\left[(t^2-1)\vec{i}-2t\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}\right]$$

$$(\vec{R}'\times\vec{R}'')\cdot\vec{R}''' = 18\left[(t^2-1)\vec{i}-2t\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}\right]\cdot 6\left[-\vec{i}+\vec{k}\right]$$

$$= 108(-t^2+1+0+t^2+1)$$

$$= 216$$

$$|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2 = 18^2(t^4-2t^2+1+4t^2+t^4+2t^2+1)$$

$$= 18^2(2t^4+4t^2+2)$$

$$= 18^2\times 2(t^4+2t^2+1)$$

$$= 18^2\times 2(t^2+1)^2$$

$$\tau = \frac{216}{18^2\times 2(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

ตอบ

$\vec{R} = \vec{R}(s)$ อาจจะหาความบิดในรูปของ พิกัดได้ ดังนี้

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2} \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (3.10.4)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{ds}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{ds^2}$$

$$\dddot{x} = \frac{d^3x}{ds^3}, \quad \dddot{y} = \frac{d^3y}{ds^3}, \quad \dddot{z} = \frac{d^3z}{ds^3}$$

ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(t)$ แล้ว

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (3.10.5)$$

โดยที่ $A = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$x''' = \frac{d^3x}{dt^3}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dt^3}, \quad z''' = \frac{d^3z}{dt^3}$$

ตัวอย่างที่ 3.10.3 จงหาความบิดของฮีลิกซ์ โดยใช้สูตร (3.10.5)

วิธีทำ สมการของ ฮีลิกซ์ คือ

$$\vec{R} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$$

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

$$x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t, \quad z' = b$$

$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -a\sin t, \quad z'' = 0$$

$$x''' = a\sin t, \quad y''' = -a\cos t, \quad z''' = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t$$

$$B = \begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix} = -ab\cos t$$

$$C = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}$$

$$= a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= a^2$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 b$$

$$\tau = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 3.10

1. จงหา κ และ τ ของ $\vec{R} = a(3t-t^3)\vec{i}+3at^2\vec{j} + a(3t+t^3)\vec{k}$

2. จงหา τ ของ $\vec{R} = (t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j} + t\vec{k}$

3. ให้ $\vec{R}(t) = (1+t^2)\vec{i}+t\vec{j}+t^3\vec{k}$ จงหา

$$\kappa, \tau, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$$

4. จงแสดงว่า κ และ τ ของเส้นโค้ง $\vec{R} = e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}$ คือ

$$\kappa = -\tau = \sqrt{2}\Big/(e^t+e^{-t})^2$$

และหาค่า κ และ τ ที่ $t = 0$

จากข้อ 5 ถึงข้อ 7 จงหา κ, τ ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนดให้

5. $\vec{R} = \sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+2t\vec{k}, \quad t = \pi/2$

6. $\vec{R} = 3t\vec{i}+3t^2\vec{j}+2t^3\vec{k}, \quad t = 0, \quad t = 1$

7. $\vec{R} = 2t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3/_3\ \vec{k}, \quad t = 1$

8. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งใด ๆ แล้ว

$$\dddot{\vec{R}} = -\kappa^2\vec{T} + \dot{\kappa}\vec{N} + \tau\kappa\vec{B}$$

9. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็นเส้นโค้งใด ๆ แล้ว

$$[\dot{\vec{R}}\ddot{\vec{R}}\dddot{\vec{R}}] = \kappa^2\tau$$

10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.10.2 : จุดบนเส้นโค้ง $\vec{R} = \vec{R}(t)$ ซึ่ง $\kappa \neq 0$ จะได้ว่า

$$\tau = \frac{[\vec{R}'\vec{R}''\vec{R}''']}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$$

11. จงแสดงว่า $\kappa\tau = |\dot{\vec{T}} \cdot \dot{\vec{B}}|$

12. จงแสดงว่าเส้นโค้ง $\vec{R} = t\vec{i} + \frac{1+t}{t}\vec{j} + \frac{1-t^2}{t}\vec{k}$ อยู่บนระนาบ

13. จงหา $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ κ และ τ ของวงกลมซึ่งมีรัศมี = a และแทนด้วย

$$\vec{R}(s) = a\cos(s/a)\vec{i} + a\sin(s/a)\vec{j}$$

14. ถ้าเส้นโค้ง C แทนด้วย $\vec{R}(s)$ เมื่อ s เป็นความยาวโค้ง แล้วจงแสดงว่า

$$\kappa = [\ddot{\vec{R}}(s) \cdot \ddot{\vec{R}}(s)]^{1/2}$$

$$\tau = \frac{[\dot{\vec{R}}(s)\ \ddot{\vec{R}}(s)\ \dddot{\vec{R}}(s)]}{\ddot{\vec{R}}(s) . ?(s)}$$

3.11 ฮีลิกซ์ (General or Cylindrical helix) คือเส้นโค้งใน 3 มิติ ซึ่งมีความชันคงตัว (constant slope) เวกเตอร์คงตัวซึ่งทำมุม α กับเวกเตอร์สัมผัสกับ ฮีลิกซ์ โดยที่มุม α เป็นมุมคงตัว แล้วเวกเตอร์คงตัวนั้น เรียกว่า แกน (axis) ของ ฮีลิกซ์ ยกเว้นในกรณีที่ $\alpha = 0$

ในกรณีที่ $\alpha = 0$ เวกเตอร์สัมผัสจะขนานกัน **และเส้นโค้งในกรณีนี้คือ เส้นตรง** .

ตัวอย่างที่ 3.11.1 จงแสดงว่า ฮีลิกซ์ มี ตัวแทนธรรมชาติ ในรูป

$$\vec{R} = x(s^*)\vec{i} + y(s^*)\vec{j} + s^*(\cos\alpha)\vec{k}$$

วิธีทำ ให้ ฮีลิกซ์ เริ่มจากจุดกำเนิด และ $\vec{k}$ ขนานกับแกนของ ฮีลิกซ์ แล้ว

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \vec{T}\cdot\vec{k} \\ &= \dot{\vec{R}}\cdot\vec{k} \\ &= \dot{z} \quad \text{..........(3.11.1)} \end{aligned}$$

เมื่อ α เป็นมุมระหว่าง $\vec{T}$ และ $\vec{k}$ **อินทิเกรต สมการ (3.11.1) จะได้**

$z = s\cos\alpha + c$, c เป็นค่าคงตัว.....(3.11.2)

ถ้า $\alpha \neq \pi/2$, $\cos\alpha \neq 0$

$$\therefore \frac{z}{\cos\alpha} = s + \frac{c}{\cos\alpha}$$

ให้ $s^* = z/\cos\alpha = s + c/\cos\alpha$

$$\therefore z = s^*\cos\alpha$$

และจะได้ ตัวแทนธรรมชาติ อยู่ในรูป

$$\vec{R} = x(s^*)\vec{i}+y(s^*)\vec{j}+s^*\cos\alpha\vec{k}$$

จากสมการ (3.11.2)

ถ้า $\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$

$\therefore$ $z = c = 0$ เนื่องจากจุดกำเนิดอยู่บนเส้นโค้ง

ดังนั้น

$$\vec{R} = x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}$$

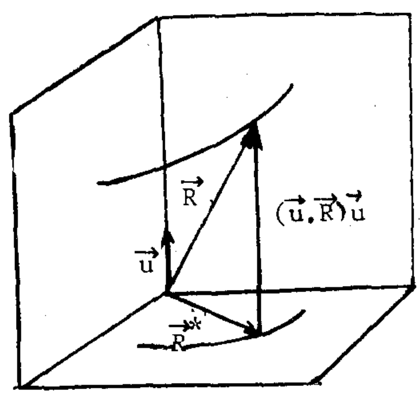
ในกรณีที่เส้นโค้งอยู่บนระนาบ XY

ตัวอย่างที่ 3.11.2 จงแสดงว่า $|K^*|$ ซึ่งเป็นความโค้งของโพรเจกชันของฮีลิกซ์บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของฮีลิกซ์ โดยที่

$$|K^*| = |K|/\sin^2\alpha$$

เมื่อ $\alpha \neq 0$ เป็นมุมระหว่างแกนและเวกเตอร์สัมผัสกับ ฮีลิกซ์

และ $|K|$ เป็นความโค้ง ของ ฮีลิกซ์



รูป 3.11.1

วิธีทำ ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ **เป็น** ฮีลิกซ์ และ

$\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยบนแกนของ ฮีลิกซ์ ดังรูป 3.11.1
โพรเจกชัน บนระนาบที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และผ่านจุดกำเนิด

คือ **เส้นโค้งที่มีสมการคือ**

$$\vec{R}^* = \vec{R}(s)-(\vec{u}\cdot\vec{R}(s))\vec{u} \quad \ldots\ldots\ldots (3.11.3)$$

ข้อสังเกตโดยทั่วไป s จะไม่เป็น ตัวแปรเสริมธรรมชาติ สำหรับ โพรเจกชัน

$$(\vec{R}^* = \vec{R}^*(s))$$

หาอนุพันธ์ **สมการ** (3.11.3) **จะได้**

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{R}^*}{ds} &= \vec{T}-(\vec{u}\cdot\vec{T})\vec{u} \\
&= \vec{T}-\cos\alpha\,\vec{u} \\
\left|\frac{d\vec{R}^*}{ds}\right| &= \left[\frac{d\vec{R}^*}{ds} \cdot \frac{d\vec{R}^*}{ds}\right]^{1/2} \\
&= \left[\vec{T}\cdot\vec{T} - 2\cos\alpha(\vec{T}\cdot\vec{u})+\cos^2\alpha(\vec{u}\cdot\vec{u})\right]^{1/2} \\
&= \left[1-2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\right]^{1/2} \\
&= \left[1-\cos^2\alpha\right]^{1/2} \\
&= \sin\alpha \quad , \quad 0 < \alpha < \pi
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\vec{T}^* &= \frac{d\vec{R}^*}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{R}^*}{ds}\right| \\
&= \frac{\vec{T}-\cos\alpha\,\vec{u}}{\sin\alpha} \\
&= \vec{T}/\sin\alpha - \cot\alpha\,\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{T}^*}{ds} = \vec{T}/\sin\alpha$$

$$|\kappa^*| = |\vec{T}^*|$$

$$= \left|\frac{d\vec{T}^*}{dS}\right| \Big/ \left|\frac{d\vec{R}^*}{dS}\right|$$

$$= |\dot{\vec{T}}| / \sin^2\alpha$$

$$= |\kappa| / \sin^2\alpha$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 3.11

1. จงแสดงว่าเส้นโค้งเป็นฮีลิกซ์ก็ต่อเมื่อ τ/κ เป็นค่าคงตัว เมื่อ $\kappa \neq 0$ และ $\tau = 0$ เมื่อ $\kappa = 0$

2. ให้ $\vec{R} = \vec{R}(s)$ อยู่ใน ชั้น ≥ 4 และให้ $[\ddot{\vec{R}}\,\dddot{\vec{R}}\,\vec{R}^{(4)}] = \kappa^5 \frac{d}{ds}(\tau/\kappa)$ จงแสดงว่า $\vec{R} = \vec{R}(s)$ เป็น ฮีลิกซ์ ก็ต่อเมื่อ $[\ddot{\vec{R}}\,\dddot{\vec{R}}\,\vec{R}^{(4)}] = 0$