บทที่ 2
เวกเตอร์ฟังก์ชันของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง
(Vector Functions of a Real Variable)

2.1 เวกเตอร์ฟังก์ชัน (Vector Functions)

ในเรขาคณิต เชิงอนุพันธ์ จะศึกษาเวกเตอร์ฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว หรือ ตัวแปร 2 ตัว โดยใช้สัญลักษณ์ $\vec{f}(t)$, $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(u_1, u_2)$,...

กำหนดให้ $\vec{f}(t)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันของตัวแปร t เพียงตัวเดียว โดยที่ t อยู่ในเซต S เช่นเดียวกับฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ (scalar functions) ของตัวแปรตัวเดียว จะเรียกเซต S ว่าโดเมน (Domain) ของ $\vec{f}$ และเรียก $\vec{f}(S)$ ว่าภาพ (image) ของ $\vec{f}$

เมื่อกำหนดระบบพิกัดขึ้นมาระบบหนึ่ง $\vec{f}(t)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันใด ๆ จะสมนัยกับฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ 3 ชุด คือ $x(t)$, $y(t)$, และ $z(t)$ ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ฟังก์ชัน และ ส่วนประกอบ คือ

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งว่า

$$x(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{i}, \quad y(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{j} \quad z(t) = P(t) \cdot \vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.1.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ

$$\vec{f}(t) = \vec{a}-2t\vec{b}+t^2\vec{c} \ , \quad -2 \le t \le 2$$

$\vec{f}(t)$ จะกำหนดเวกเตอร์ฟังก์ชันของ t ซึ่งมีโดเมนในช่วง

$$-2 \le t \le 2$$

ตารางสำหรับเวกเตอร์บางเวกเตอร์

t	-2	-1	0	1	2
$\vec{f}(t)$	$\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$	$\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{a}$	$\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{a}-4\vec{b}+4\vec{c}$

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จากตัวอย่างที่ 2.1.1 ถ้า $\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}-\vec{k}$ แล้ว

$$\vec{f}(t) = (\vec{i}+2\vec{j})-2t(\vec{j}-\vec{k})+t^2(\vec{i}-\vec{k})$$
$$= (1+t^2)\vec{i}+(2-2t)\vec{j}+(2t-t^2)\vec{k}$$

ในที่นี้ $\vec{f}$ อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ 3 ฟังก์ชัน คือ

$x(t) = 1+t^2$, $y(t) = 2-2t$, $z(t) = 2t-t^2$

ซึ่งเป็นส่วนประกอบของ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

จากตัวอย่างข้างบนจะเห็นว่า $\vec{f}(t)$ จะกำหนดฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ 3 ฟังก์ชัน คือ $x(t), y(t), z(t)$ เพียงชุดเดียว ซึ่งเป็นส่วนประกอบของ $\vec{f}(t)$ เทียบกับมูลฐาน ในทางกลับกัน ฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ 3 ฟังก์ชัน คือ

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ซึ่ง t อยู่ในเซท S (S เป็นโดเมน) จะกำหนดเวกเตอร์ฟังก์ชันเพียง ฟังก์ชันเดียว คือ

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

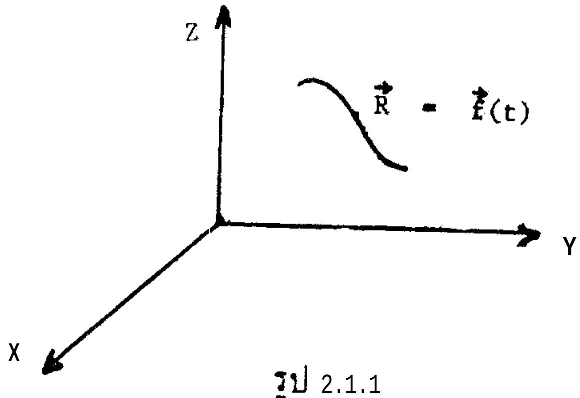
ซึ่งมี $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ เป็นส่วนประกอบเทียบกับ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

เวกเตอร์ฟังก์ชันอาจใช้ในการกำหนดเส้นโค้ง

ให้ $\vec{R} = \vec{f}(t)$ เมื่อ t แปรค่าไปก็จะได้ค่า $\vec{R}$ ต่าง ๆ ทำให้เขียนเส้นโค้งได้ ดังรูป 2.1.1

$$\vec{R} = \vec{f}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

เรียก $\vec{R}$ ว่าเป็นการแทนเส้นโค้งในรูปตัวแปรเสริม (parameter) และเรียก t ว่า ตัวแปรเสริม

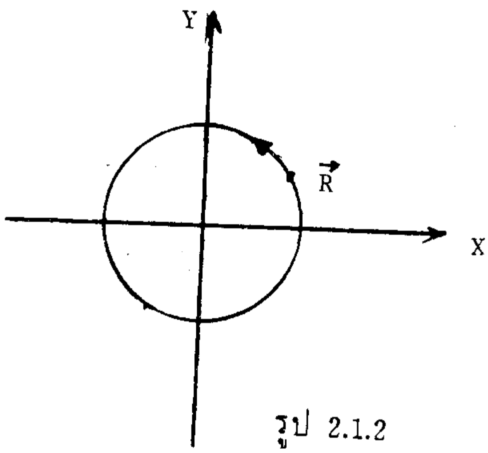


รูป 2.1.1

ตัวอย่างที่ 2.1.3 $\vec{R} = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j}$ .... (2.1.1)

หรือ $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

สมการ (2.1.1) แทนสมการวงกลมซึ่งมีรัศมี $= a$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ในขณะที่ t เพิ่มขึ้นในช่วง $0 \le t \le 2\pi$ วงกลมถูกลากให้ทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป 2.1.2



ตอบ

รูป 2.1.2

โดยทั่วไป ฟังก์ชันถูกกำหนดบนช่วงต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วยช่วงเปิด และช่วงปิดที่จำกัด (finite open and closed intervals) คือ $a < t < b$ และ $a \le t \le b$ ช่วงครึ่งเปิดที่จำกัด (finite half-open intervals) คือ $a \le t < b$ และ $a < t \le b$ และช่วงอนันต์ (infinite intervals) เช่น $-\infty < t < \infty$, $a \le t < \infty$, $-\infty < t < a$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.1.4 ให้

$$\vec{f}(t) = (1+t^3)\vec{i}+(2t-t^2)\vec{j}+t\vec{k}$$

$$\vec{g}(t) = (1+t^2)\vec{i} + t^3\vec{j}$$

$$h(t) = 2t-1$$

จงหา

a) $h(2)\,(\vec{f}(1)+\vec{g}(-1))$

b) $|\vec{g}(2)|$

c) $\vec{f}(a)\cdot\vec{g}(b)$

d) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

e) $\vec{g}(2a-b)$

f) $\vec{f}(t_o+\Delta t)-\vec{f}(t_o)$

g) $\vec{f}(h(t))$

วิธีทำ

a) $h(2)\,(\vec{f}(1)+\vec{g}(-1))$

$= 3\left[(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+(2\vec{i}-\vec{j})\right]$

$= 3(4\vec{i}+\vec{k})$

$= 12\vec{i}+3\vec{k}$

b) $|\vec{g}(2)| = |5\vec{i}+8\vec{j}|$

$= \sqrt{25+64}$

$= \sqrt{89}$

c) $\vec{f}(a).\vec{g}(b) = \left[(1+a^3)\vec{i}+(2a-a^2)\vec{j}+a\vec{k}\right].\left[\vec{i}(1+b^2)+b^3\vec{j}\right]$

$$= (1+a^3)(1+b^2) + b^3(2a-a^2)$$

d) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1+t^3 & 2t-t^2 & t \\ 1+t^2 & t^3 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -t^4\vec{i}+(t+t^3)\vec{j}+(t^6+t^4-t^3+t^2-2t)\vec{k}$$

e) $\vec{g}(2a-b) = (1+(2a-b)^2)\vec{i} + (2a-b)^3\vec{j}$

f) $\vec{f}(t_o+\Delta t) - \vec{f}(t_o)$

$= \left[1+(t_o+\Delta t)^3\right]\vec{i}+\left[2(t_o+\Delta t)-(t_o+\Delta t)^2\right]\vec{j}+(t_o+\Delta t)\vec{k}$

$\quad -(1+t_o^3)\vec{i}-(2t_o-t_o^2)\vec{j}-t_o\vec{k}$

$= (3t_o^2\Delta t+3t_o\Delta t^2+\Delta t^3)\vec{i}+(2\Delta t-2t_o\Delta t-\Delta t^2)\vec{j}+\Delta t\vec{k}$

g) $f(h(t) = \vec{f}(2t-1)$

$$= (1+(2t-1)^3)\vec{i}+(2(2t-1)-(2t-1)^2)\vec{j}+(2t-1)\vec{k}$$

$$= (8t^3-12t^2+6t)\vec{i}+(-4t^2+8t-3)\vec{j}+(2t-1)\vec{k}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 2.1

1. $\vec{R} = t^2\vec{i}+(1-t)\vec{j}$ สำหรับ t ที่เป็นจำนวนเต็ม และอยู่ในช่วง $[-4,4]$

   จงหา $\vec{R}$ สำหรับค่า t ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ และเขียนกราฟ

2. $\vec{R} = (t^3+1)\vec{i}+(1-t^2)\vec{j}$ สำหรับ t ที่เป็นจำนวนเต็ม และอยู่ในช่วง $[-4,4]$ จงหา $\vec{R}$ สำหรับค่า t ต่าง ๆ ที่กำหนดให้

จากข้อ 3 ถึงข้อ 4 จงหา $\vec{f}(t).\vec{g}(t)$ และ $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

3. $\vec{f}(t) = (t+3)\vec{i}+t^2\vec{j}+(t^3-1)\vec{k}$

   $\vec{g}(t) = 2t\vec{i}+(t^4-1)\vec{j}+(2t+3)\vec{k}$

4. $\vec{f}(t) = t\vec{i}+t\cos t\vec{j}+ t\sin t\vec{k}$

   $\vec{g}(t) = \cos t\vec{i}+\sin t\vec{j} +t\vec{k}$

5. ให้ $\vec{f}(t) =(t^2+1)\vec{i}+t^3\vec{k}$ และ $\vec{g}(t) = \sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}$

   จงหา

   ก. $\vec{f}(a+b)$

   ข. $\vec{g}(t+ \Delta t)$

   ค. $\vec{f}(\sin t) \times \vec{g}(t^2+1)$

6. จงแสดงว่า $\vec{R} = -(-1+\sin 2t\cos 3t)\vec{i}+(2+\sin 2t\sin 3t)\vec{j}+(-3+\cos 2t)\vec{k}$

   อยู่บนผิวทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $A(-1,2,-3)$ และรัศมี $= 1$

7. จงแสดงว่า $\vec{R} = (-2+\sin t)\vec{i}+(t^2+2)\vec{j}+(t^2-1+2\sin t)\vec{k}$

   อยู่บนระนาบที่ผ่าน $\vec{A} = \vec{j}+2\vec{k}$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

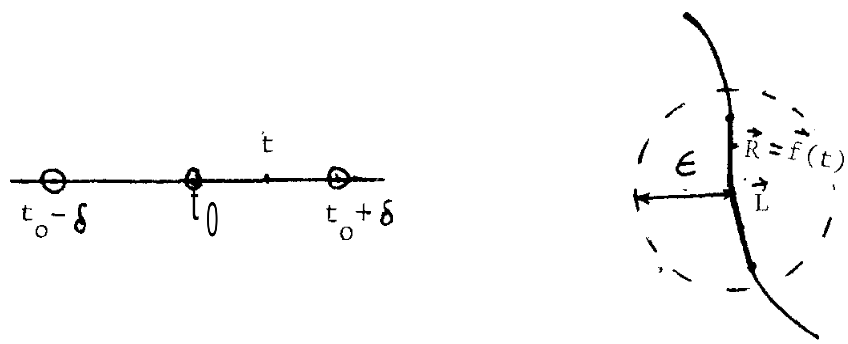
2.2 ลิมิต (Limits) และความต่อเนื่อง (Continuity)

$\vec{f}(t)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ฟังก์ชัน มีลิมิต เท่ากับ $\vec{L}$ ในขณะที่ t เข้าใกล้ t_o เขียนแทนด้วย

$$\lim_{t \to t_o} \vec{f}(t) = \vec{L}$$

หรือ $\vec{f}(t) \to \vec{L}$ ในขณะที่ $t \to t_o$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่ง δ ขึ้นอยู่กับค่า ϵ โดยที่ $\vec{f}(t)$ อยู่ใน ϵ – spherical neighborhood ของเวกเตอร์ $\vec{L}(S_\epsilon(\vec{L}))$ สำหรับ t อยู่ใน δ – deleted spherical neighborhood ของ $t_o(S'_\delta(t_o))$

จากรูป 2.2.1 จะเห็นว่า $\vec{R} = \vec{f}(t) \to \vec{L}$ ในขณะที่ $t \to t_o$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทรงกลมเปิด (open sphere) ทุกอัน $S_\epsilon(\vec{L})$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $\vec{L}$ เราสามารถหา $S'_\delta(t_o)$ ซึ่งจุด $\vec{R}$ อยู่ใน $S_\epsilon(\vec{L})$ สำหรับ t ที่อยู่ใน $S'_\delta(t_o)$



รูป 2.2.1

พิจารณาฟังก์ชันที่เป็น สเกลาร์ $g(t) \longrightarrow 0$ ในขณะที่ $t \to t_o$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|g(t)| < \epsilon$ สำหรับ t ใน $S'(t_o)$ ถ้าให้ $g(t) = |\vec{f}(t) - \vec{L}|$ แล้ว $|g(t)| = |\vec{f}(t) - \vec{L}| < \epsilon$ ก็ต่อเมื่อ

$\vec{f}(t)$ อยู่ใน $S_\epsilon(\vec{L})$ ดังนั้น จึงมีทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2.1 $\vec{f}(t) \longrightarrow \vec{L}$ ในขณะที่ $t \to t_o$ ก็ต่อเมื่อ $|\vec{f}(t)-\vec{L}| \to 0$ ในขณะที่ $t \to t_o$

ตัวอย่างที่ 2.2.1 $\lim_{t\to 1} (t^2\vec{i}-(t+1)\vec{j}) = \vec{i}-2\vec{j}$

เนื่องจาก

$$\lim_{t\to 1} |\vec{f}(t)-\vec{L}| = \lim_{t\to 1} |(t^2-1)\vec{i}-(t-1)\vec{j}|$$

$$= \lim_{t\to 1} \left[(t^2-1)^2+(t-1)^2\right]^{1/2}$$

$$= 0$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2.2 ถ้า $\vec{f}(t)$ มีลิมิต ในขณะที่ $t \to t_o$ แล้ว $\vec{f}(t)$ มีขอบเขต (bounded) ที่ t_o

คุณสมบัติของลิมิต

สมมติว่า $\lim_{t\to t_o} f_i(t) = L_i$, $i = 1,2,3$ แล้ว

$$\lim_{t\to t_o}\left[f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}\right] = L_1\vec{i}+L_2\vec{j}+L_3\vec{k}$$

ให้ $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ และ $\vec{L} = L_1\vec{i}+L_2\vec{j}+L_3\vec{k}$ แล้ว

$$\lim_{t\to t_o}|\vec{f}(t)-\vec{L}| = \lim_{t\to t_o}|f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k})-(L_1\vec{i}+L_2\vec{j}+L_3\vec{k})|$$

$$= \lim_{t\to t_o}\left[(f_1(t)-L_1)^2+(f_2(t)-L_2)^2+(f_3(t)-L_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2.3 ให้ $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ มีลิมิตในขณะที่ $t \to t_o$ ก็ต่อเมื่อ $f_i(t)$, $i = 1,2,3$ มีลิมิตในขณะที่ $t \to t_o$ และได้ว่า

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t) = (\lim_{t\to t_0} f_1(t))\vec{i}+(\lim_{t\to t_0} f_2(t))\vec{j}+(\lim_{t\to t_0} f_3(t))\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.2 $\lim_{t\to 0} (\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t\vec{k})$

$$= (\lim_{t\to 0}\sin t)\vec{i}+(\lim_{t\to 0}\cos t)\vec{j}+(\lim_{t\to 0} t)\vec{k}$$

$$= \vec{j}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.3 ให้ $\vec{f}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j}$ แล้ว

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(2+h)-\vec{f}(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{((2+h)^2\vec{i}+(2+h)\vec{j})-(4\vec{i}+2\vec{j})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{((2+h)^2 - 4)\vec{i}}{h} + \frac{h\vec{j}}{h}\right]$$

$$= 4\vec{i} + \vec{j}$$

ให้ $\vec{f}(t)\to\vec{L}$ ในขณะที่ $t\to t_0$ แล้ว $|\vec{f}(t)|\to|\vec{L}|$ ในขณะที่ $t\to t_0$

เนื่องจาก ถ้าให้ $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

และ $\vec{L} = L_1\vec{i}+L_2\vec{j}+L_3\vec{k}$

แล้ว $\lim_{t\to t_0}|\vec{f}(t)| = \lim_{t\to t_0}\left[f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)\right]^{1/2}$

$$= \left[(\lim_{t\to t_0} f_1(t))^2+(\lim_{t\to t_0} f_2(t))^2+(\lim_{t\to t_0} f_3(t))^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[L_1^2 + L_2^2 + L_3^2\right]^{1/2}$$

$$= |\vec{L}|$$

ในทางกลับกันของข้างบนไม่จริง เพราะว่า $|\vec{f}(t)|$ อาจมีลิมิต แม้ว่า $\vec{f}(t)$ ไม่มีลิมิต

ทฤษฎีบทที่ 2.2.4 ถ้า $\vec{f}(t) \to \vec{L}$ ในขณะที่ $t \to t_o$ แล้ว
$|\vec{f}(t)| \to |\vec{L}|$ ในขณะที่ $t \to t_o$

ถ้า $\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) = \vec{L}$, $\lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = \vec{M}$, $\lim_{t\to t_o} \vec{h}(t) = \vec{N}$

และ $\lim_{t\to t} i(t) = P$ แล้ว

1. $\lim_{t\to t_o} (\vec{f}(t)+\vec{g}(t)) = \lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) + \lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = \vec{L}+\vec{M}$

2. $\lim_{t\to t_o} (i(t)\vec{g}(t)) = \lim_{t\to t_o} i(t) \lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = P\vec{M}$

3. ถ้า $P \neq 0$ แล้ว

$\lim_{t\to t_o} (\vec{f}(t)/i(t)) = \lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) / \lim_{t\to t_o} i(t) = \vec{L}/P$

4. $\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t).\vec{g}(t) = \lim_{t\to t_o} \vec{f}(t).\lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = \vec{L}.\vec{M}$

5. $\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) \times \lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = \vec{L} \times \vec{M}$

6. $\lim_{t\to t_o} [\vec{f}(t)\vec{g}(t)\vec{h}(t)] = [\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) \lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) \lim_{t\to t_o} \vec{h}(t)]$

$$= [\vec{L}\,\vec{M}\,\vec{N}]$$

7. ถ้า $\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_o)$ และ $\lim_{\theta\to\theta_o} i(\theta) = t_o$ แล้ว

$$\lim_{\theta\to\theta_o} \vec{f}(i(\theta)) = \vec{f}(\lim_{\theta\to\theta_o} i(\theta)) = \vec{f}(t_o)$$

ตัวอย่างที่ 2.2.4 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{t\to t_o} [\vec{f}(t)\vec{g}(t)\vec{h}(t)]$

$$= [\vec{L}\vec{M}\vec{N}]$$

พิสูจน์ ให้ $\lim_{t\to t_o} \vec{f}(t) = \vec{L}$, $\lim_{t\to t_o} \vec{g}(t) = \vec{M}$ และ

$$\lim_{t\to t_o} \vec{h}(t) = \vec{N}$$

$$\lim_{t\to t_o}[\vec{f}(t)\vec{g}(t)\ \vec{h}(t)] = \lim_{t\to t_o}(\vec{f}(t).\vec{g}(t)\times\vec{h}(t))$$
$$= \lim_{t\to t_o}\vec{f}(t).\lim_{t\to t_o}(\vec{g}(t)\times\vec{h}(t))$$
$$= \lim_{t\to t_o}\vec{f}(t).\lim_{t\to t_o}\vec{g}(t)\times\lim_{t\to t_o}\vec{h}(t) = \vec{L}.\vec{M}\times\vec{N}$$
$$= [\vec{L}\vec{M}\vec{N}]$$

$\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ t_o ถ้าสำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งขึ้นอยู่กับ ϵ โดยที่ $\vec{f}(t)$ อยู่ใน $S_\epsilon(\vec{f}(t_o))$ สำหรับ t ทุก ๆ ค่าใน $S_\delta(t_o)$ หรือ $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ t_o ถ้า

$$\lim_{t\to t_o}\vec{f}(t) = \vec{f}(t_o) \quad ....(2.2.1)$$

$\vec{f}(t)$ กล่าวได้ว่ามีความต่อเนื่องบนช่วง I ถ้า $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ ค่า $t = t_o$ ในช่วง I

จากทฤษฎีบทที่ 2.2.3 $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ ส่วนประกอบของ $\vec{f}(t)$ คือ $f_i(t)$, $i = 1,2,3$ มีความต่อเนื่อง และตามทฤษฎีบทที่ 2.2.4 ผลบวก, ผลคูณ, ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย และฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชันต่อเนื่องจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

สมการ (2.2.1) มีความหมายเช่นเดียวกับ

$$\lim_{t\to t_o}(\vec{f}(t) - \vec{f}(t_o)) = \vec{0}$$

หรือให้ $h = t - t_o$ **จะได้**

$$\lim_{h\to 0}(\vec{f}(t_o+h) - \vec{f}(t_o)) = \vec{0}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ให้ $f(t) = a+bt+ct^2$, a,b,c เป็นค่าคงตัว

จงแสดงว่า $f(t)$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่า t

วิธีทำ

$$\lim_{t\to t_o} f(t) = \lim_{t\to t_o} (a+bt+ct^2)$$
$$= a+bt_o+ct_o^2$$
$$= f(t_o)$$

นั่นคือ $f(t)$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ ค่า t

เนื่องจากเวกเตอร์ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ t_o ก็ต่อเมื่อ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่จุดนี้

ให้ $\vec{f}(t)$ หรือ $\vec{g}(t)$ เวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งมีขอบเขต ในย่านของจุด t_o (neighborhood of the point t_o อีกเวกเตอร์หนึ่งมีลิมิตเท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ที่ t_o แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{t\to t_o} (\vec{f}(t).\vec{g}(t)) = 0$$

และ
$$\lim_{t\to t_o} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)) = \vec{0}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $h(t)$, $\vec{f}(t)$ ฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งมีขอบเขต และอีกฟังก์ชันหนึ่งเข้าใกล้ศูนย์ในขณะที่ $t\to t_o$ จะได้ว่า

$$\lim_{t\to t_o} (h(t)\vec{f}(t)) = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.2.6 ให้ $\vec{f}(t) = \frac{\sin t}{t}\vec{i} + \cos t\vec{j}$ หาค่าได้ที่ $t=0$

ดังนั้น $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ $t=0$

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\vec{i} + \cos t\vec{j}\right)$$
$$= \vec{i} + \vec{j}$$

ดังนั้น ถ้าให้ $\vec{f}(o) = \vec{i}+\vec{j}$ แล้ว

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t) = \vec{f}(o)$$

และ $\vec{f}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ $t = o$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหา $\lim_{t\to 2} \left[(3t^2+1)\vec{i}-t^3\vec{j}+\vec{k}\right]$

2. ให้ $\vec{f}(t) = \sin t\vec{i}+t\vec{k}$ และ $\vec{g}(t) = (t^2+1)\vec{i}+e^t\vec{j}$

จงหา a) $\lim_{t\to 0} (\vec{f}(t).\vec{g}(t))$

b) $\lim_{t\to 0} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))$

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$ และ $\vec{h}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ t_0 แล้ว $\left[\vec{f}(t)\vec{g}(t)\vec{h}(t)\right]$ จะมีความต่อเนื่องที่ t_0 ด้วย

4. จงหา $\lim_{t\to -1} \left[(t^2+1)\vec{i}+e^t\vec{j}+\left[(t^2-1)/(t+1)\right] \vec{k}\right]$

5. ให้ $\vec{f}(t) = (t^2-1)\vec{j}+\cos t\vec{k}$ และ $\vec{g}(t) = \sin t\vec{i}+e^t\vec{j}$

จงหา a) $\lim_{t\to 0} (\vec{f}(t).\vec{g}(t))$

b) $\lim_{t\to 0} (\vec{f}(t)\times \vec{g}(t))$

2.3 อนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน (The Derivative of a Vector Function)

เนื่องจากเวกเตอร์ฟังก์ชันมีส่วนประกอบเป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน ดังนั้น นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ในแคลคูลัสที่เกี่ยวกับลิมิต อนุพันธ์และอินทิกรัลจึงสามารถนำมาใช้กับเวกเตอร์ฟังก์ชันได้

ให้ $f(t)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน แล้ว อนุพันธ์ของ $f(t)$ ที่ $t = t_0$ คือ

$$f'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} \quad \text{ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้}$$

ถ้า $t = t_o + \Delta t$,

$$f'(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_o+\Delta t) - f(t_o)}{\Delta t}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ให้ $f(t) = a + bt + ct^2$, a, b, c เป็นค่าคงตัว

$$f'(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_o + \Delta t) - f(t_o)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[a+b(t_o+\Delta t)+c(t_o+\Delta t)^2] - (a+bt_o+ct_o^2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b\Delta t + 2ct_o\Delta t + c(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (b+2ct_o + c\Delta t)$$

$$= b+2ct_o$$

ดังนั้น $f(t)$ หาอนุพันธ์ที่ t_0 ได้

นิยาม 2.3.1

ถ้า $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$

แล้ว $$f'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_o)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \left[\frac{f_1(t)-f_1(t_o)}{t-t_o}\vec{i} + \frac{f_2(t)-f_2(t_o)}{t-t_o}\vec{j} + \frac{f_3(t)-f_3(t_o)}{t-t_o}\vec{k} \right]$$

$$= \left[\lim_{t\to t_o} \frac{f_1(t)-f_1(t_o)}{t-t_o}\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to t_o} \frac{f_2(t)-f_2(t_o)}{t-t_o}\right]\vec{j}$$

$$+ \left[\lim_{t\to t_o} \frac{f_3(t)-f_3(t_o)}{t-t_o}\right]\vec{k}$$

$$= f_1'(t_o)\vec{i} + f_2'(t_o)\vec{j} + f_3'(t_o)\vec{k}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.3.1 $\vec{f}(t) = f_i(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

หาอนุพันธ์ที่ t_0 ได้ ก็ต่อเมื่อ ส่วนประกอบ

$\vec{f}(t)$ คือ $f_i(t)$, $i = 1,2,3$

หาอนุพันธ์ได้ที่ t_0 นั่นคือ

$$\vec{f}'(t_o) = f_1'(t_o)\vec{i}+ f_2'(t_o)\vec{j} +f_3'(t_o)\vec{k}$$

ถ้า $\vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I แล้ว $\vec{f}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันบนช่วง I ซึ่งอาจจะหา อนุพันธ์ได้อีก และให้อนุพันธ์อันดับที่ 2 (second order derivative) ของ $\vec{f}(t)$ แทนด้วย $\vec{f}''(t)$ อนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไปอีกก็กำหนดได้ในทำนองเดียวกันนี้

เช่นเดียวกับสเกลาร์ฟังก์ชัน ถ้าให้ $\vec{u} = \vec{f}(t)$ และใช้สัญลักษณ์

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}'(t)$$

$$\vec{u}'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{f}''(t), \text{ etc}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.2

$$\vec{u} = (t^3+2t)\vec{i}+\sin t\vec{j}+e^t\vec{k}$$

$$\vec{u}' = (3t^2+2)\vec{i}+ \cos t\vec{j}+e^t\vec{k}$$

$$\vec{u}'' = 6t\vec{i} - \sin t\vec{j} +e^t\vec{k}$$

$$\vec{u}''' = 6\vec{i}-\cos t\vec{j} +e^t\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 $\vec{f}(t) = \sin^{-1}t\vec{i} + \cos^{-1}t\vec{j}$

$$\vec{f}'(t) = (1/\sqrt{1-t^2})\vec{i} - (1/\sqrt{1-t^2})\vec{j}$$

$$\vec{f}''(t) = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\vec{i} - \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\vec{j}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 ถ้า $\vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t_0 แล้ว $\vec{f}(t)$ จะมีความต่อเนื่องที่ t_0

ทฤษฎีบทที่ 2.3.3 ให้ $\vec{u},\vec{v},\vec{w},h$ เป็นฟังก์ชันของ t ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I แล้วจะได้ว่า

$\vec{u}+\vec{v}$, $h\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I ด้วย นั่นคือ

1. $\frac{d(\vec{u}+\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$

2. $\frac{d}{dt}(h\vec{u}) = h\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dh}{dt}\vec{u}$

3. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}$

4. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$

5. $\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V}\times\vec{W}) = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\cdot\vec{V}\times\vec{W} + \vec{U}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\times\vec{W} + \vec{u}\cdot\vec{v}\times\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)$

6. กฎลูกโซ่ (chain rule)

ถ้า $\vec{u} = \vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I_t และ $t = h(\theta)$ ก็หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I_θ เมื่อภาพ $h(\theta)$ อยู่ในช่วง I_t แล้ว

$$\vec{u} = \vec{f}(h(\theta)) = \vec{g}(\theta) \quad \text{หาอนุพันธ์ได้บนช่วง } I_\theta$$

และ

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d\vec{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

พิสูจน์ 1. ให้

$$\vec{u} = \vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}) + (g_1(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}+g_3(t)\vec{k})$$

$$= \left[f_1(t)+g_1(t)\right]\vec{i}+\left[f_2(t)+g_2(t)\right]\vec{j}+\left[f_3(t)+g_3(t)\right]\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d}{dt}(f_1(t)+g_1(t))\vec{i}+\frac{d}{dt}(f_2(t)+g_2(t))\vec{j}$$

$$+\frac{d}{dt}(f_3(t)+g_3(t))\vec{k}$$

$$= \frac{d}{dt}f_1(t)\vec{i}+\frac{d}{dt}g_1(t)\vec{i}+\frac{d}{dt}f_2(t)\vec{j}+\frac{d}{dt}g_2(t)\vec{j}$$

$$+\frac{d}{dt}f_3(t)\vec{k}+\frac{d}{dt}g_3(t)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}f_1(t)\vec{i}+\frac{d}{dt}f_2(t)\vec{j}+\frac{d}{dt}f_3(t)\vec{k}\right) + \left(\frac{d}{dt}g_1(t)\vec{i}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}g_2(t)\vec{j}+\frac{d}{dt}g_3(t)\vec{k}\right)$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ช.ต.พ.

เช่นเดียวกับสเกลาร์ฟังก์ชัน ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีขนาดคงตัวบนช่วง (a,b) ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ของ $\vec{u}$ เท่ากับศูนย์ ที่ทุก ๆ จุดบนช่วงนี้

ตัวอย่างที่ 2.3.4 ให้ $\vec{e}(t)$ เป็นเวกเตอร์หน่วย ซึ่ง

$$\vec{e}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

โดยที่ $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 0$

หาอนุพันธ์ของ $\vec{e}(t)$

วิธีทำ

$$\frac{d\,\vec{e}(t)}{dt} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \cos(t+\pi/2)\vec{i} + \sin(t+\pi/2)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$= \vec{e}\,(t+\pi/2)$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ให้

$$\vec{u} = a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j}$$

$$\theta = (1+t^2)^{1/2}, \quad t > 0$$

จงหา $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$

วิธีทำ

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d\vec{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt} \Big/ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= (-a\sin t\vec{i} - a\cos t\vec{j}) \Big/ \left[t(1+t^2)^{-1/2}\right]$$

$$= -\frac{a}{t}(1+t^2)^{1/2}(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j})$$

จาก $\theta = h(t)$ ซึ่ง $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$

จะได้ $\frac{dt}{d\theta} = 1 \Big/ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$

ตัวอย่างที่ 2.3.6

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) + \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \vec{u}\cdot\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|^2$$

ตัวอย่างที่ 2.3.7

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}\ \frac{d\vec{u}}{dt}\ \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)$$

$$= \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)+\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)$$

$$= \vec{u}\cdot\left[\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right)+\left(\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)\right]+0$$

$$= \vec{u}\ \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right)$$

$$= \left[\vec{u}\ \frac{d\vec{u}}{dt}\ \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right]$$

ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชัน ที่มีขนาดเท่ากับค่าคงตัว นั่นคือ ถ้า

$|\vec{u}|$ = ค่าคงตัว แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{u}$ = ค่าคงตัว และเมื่อหาอนุพันธ์จะได้

$$\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} = 0$$

$$2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

$$\therefore\ \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

นั่นคือ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{u}}{dt}$

ทฤษฎีบทที่ 2.3.4 ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยฟังก์ชันแล้ว $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ $\vec{u} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a,b \neq 0$ จงหา

   a. $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$

   b. $\left|\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|$

   c. $\dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$ d. $\left|\dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right|$

2. ให้ $\vec{u} = (t^2+1)\vec{i} - te^t\vec{j} + \ln t\vec{k}, \quad t > 0$ จงหา

   a. $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$

   b. $\dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

3. ถ้า $\vec{u} = (3t^2+1)\vec{i} + \sin t\vec{j}$ และ $\vec{v} = \cos t\vec{i} + e^t\vec{k}$ จงหา

   a. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v})$

   b. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v})$

   c. $\dfrac{d|\vec{u}|}{dt}$

4. ให้ $\vec{u} = (2+t)\vec{j} + (\ln t)\vec{k}$ และ $\vec{v} = \sin t\vec{i} - \cos t\vec{j}, \ t > 0$ จงหา

   a. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v})$

   b. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v})$

5. ให้ $\vec{u} = \sin t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + t\vec{k}, \quad t > 0$ และ $t = \ln \theta$ จงหา

$\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ ในพจน์ของ

a) ฟังก์ชันของ θ

b) ฟังก์ชันของ t

6. ให้ $\vec{u} = e^t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}$ และ $t = \theta^2+2,\ t \geq 2$

จงหา $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ และ $\frac{d^2\vec{u}}{d\theta^2}$ ในพจน์ของ t

7. ใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ แสดงว่า

a) ถ้า $\vec{f}(t) = \vec{a}$, $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว แล้ว $\vec{f}'(t) = \vec{0}$

b) ถ้า $\vec{f}(t) = \vec{a}h(t)$, $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว แล้ว

$\vec{f}'(t) = \vec{a}h'(t)$

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 : ถ้า $\vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t_0 แล้ว $\vec{f}(t)$ จะมีความต่อเนื่องที่ t_0

9. ถ้า $\vec{u},\vec{v},h$ เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว จงใช้นิยามของการหาอนุพันธ์แสดงว่า

a. $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$

b. $\frac{d}{dt}(h\vec{u}) = h\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dh}{dt}\vec{u}$

c. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}$

d. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$

10. ถ้า $\vec{u} = \cos kt\vec{i} + \sin kt\vec{j}$ จงหา $\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

11. จงแสดงว่า $\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = |\vec{u}|\frac{d|\vec{u}|}{dt}$

12. ถ้า $\vec{f}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ ที่ t_0 จงพิสูจน์ว่า

$$\vec{f}(t_o+\Delta t) = \vec{f}(t_o)+\vec{f}'(t_o)\Delta t+\vec{R}(t_o,\Delta t)$$

เมื่อ $\frac{\vec{R}(t_0,\Delta t)}{\Delta t} \longrightarrow \vec{0}$ ในขณะที่ $\Delta t \longrightarrow 0$

13. จงแสดงว่า $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\cdot\vec{v}$.

14. ให้ $\vec{u} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$ และ $\vec{v} = -\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$

จงพิสูจน์ว่า $\vec{u}' = \vec{v}$, $\vec{v}' = -\vec{u}$

15. จงแสดงว่า อนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{v}(t)$ จะคล้องตาม

$$2\vec{v}'(t) = \vec{i}\times(\vec{v}'\times\vec{i})+\vec{j}\times(\vec{v}'\times\vec{j}) + \vec{k}\times(\vec{v}'\times\vec{k})$$

16. ให้ $\vec{f}(t) = 3\cos t\vec{i}+4\cos t\vec{j}+5\sin t\vec{k}$ จงแสดงว่า

$\vec{f}(t)\cdot\vec{f}'(t) = 0$ สำหรับ t ทุก ๆ ค่า

2.4 ฟังก์ชันของชั้น C^m (Functions of class C^m)

โดยทั่วไปฟังก์ชันสามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 ได้ หรือบางทีก็หาอนุพันธ์อันดับสูงกว่า 1 ได้

จะกล่าวว่า สเกลาร์ฟังก์ชัน หรือเวกเตอร์ฟังก์ชันอยู่ในชั้น C^m บนช่วง I ถ้า $\vec{f}$ หาอนุพันธ์อันดับที่ m ได้ และอนุพันธ์อันดับที่ m มีความต่อเนื่องบนช่วง I

ชั้นของฟังก์ชันต่อเนื่องแทนด้วย C^0

และชั้นของฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับแทนด้วย C^∞

นิยาม 2.4.1 เวกเตอร์ฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง หรือมีอนุพันธ์ ก็ต่อเมื่อส่วนประกอบทุกตัวของเวกเตอร์ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องหรือมีอนุพันธ์จากนิยาม 2.4.1 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 . 4 . 1 เวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ อยู่ในชั้น C^m บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ $f_1(t)$, $f_2(t)$และ $f_3(t)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I

ข้อสังเกต เนื่องจากฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น ถ้าฟังก์ชันอยู่ในชั้น C^m แล้วฟังก์ชันนั้นก็จะอยู่ใน ชั้น C^j ด้วย สำหรับทุก ๆ $j \leq m$

ตัวอย่างที่ 2.4.1

$$\vec{f}(t) = t^3\vec{i}+\sin t\vec{j}+t^{8/3}\vec{k}, -\infty<t<\infty$$

$$\vec{f}'(t) = 3t^2\vec{i} + \cos t\vec{j} + \frac{8}{3}t^{5/3}\vec{k}$$

$$\vec{f}''(t) = 6t\vec{i}-\sin t\vec{j}+\frac{40}{9}t^{2/3}\vec{k}$$

$\vec{f}(t)$, $\vec{f}'(t)$และ$\vec{f}''(t)$ มีความต่อเนื่องสำหรับ t ทุก ๆ ค่า

แต่ $\vec{f}'''(t) = 6\vec{i}-\cos t\vec{j}+\frac{80}{27}t^{-1/3}\vec{k}$

หาค่าไม่ได้เมื่อ $t = o$ เนื่องจาก $t^{1/3}$ เป็นตัวหาร

นั่นคือ $\vec{f}(t)$ อยู่ใน ชั้น C^2 บนช่วง $-\infty<t<\infty$ แต่ไม่อยู่ใน ชั้น C^3

ถ้าพิจารณาในช่วงใด ๆ ที่ไม่รวมจุดกำเนิดแล้ว $\vec{f}$ จะมีอนุพันธ์ทุก ๆ อันดับ นั่นคือ $\vec{f}$ อยู่ใน ชั้น C^∞

ทฤษฎีบทที่ 2.4.2 ถ้า $\vec{f},\vec{g},h$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I แล้ว

$h\vec{f}$, $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}\cdot\vec{g}$และ$\vec{f} \times \vec{g}$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I ด้วย

ทฤษฎีบทที่ 2.4.3 ถ้า $\vec{f}(t)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I_t และ ถ้า $t(\theta)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I_θ เมื่อ $t(I_\theta)$ อยู่ในช่วง I_t แล้ว พังก์ชันประกอบ (composite function) คือ

$$\vec{g}(\theta) = \vec{f}(t(\theta))$$

จะอยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I_θ

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่ง คือ function of class C^m of a function of class C^m is a function of class C^m

ตัวอย่างที่ 2.4.2 พังก์ชัน $f(t) = e^{-1/t^2}$ มีความต่อเนื่อง สำหรับทุก ๆ ค่า t ยกเว้น $t = 0$

แต่ถ้ากำหนดว่า $f(0) = 0$ แล้ว $f(t)$ จะมีความต่อเนื่อง และ $f(t)$ จะอยู่ใน ชั้น C^∞ สำหรับค่า t อยู่ในช่วง $-\infty < t < \infty$

2.5 ทฤษฎีบทของเทเลอร์ (Taylor's Theorem)

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของเทเลอร์ จะพิจารณาอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

นิยาม 2.5.1

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^n}{n!} \qquad (2.5.1)$$

ทางขวามือของสมการ (2.5.1) เรียกว่า Taylor series for f about the point a หรือ the expansion of f into a power series about a

ในกรณีที่ $a=o$ อนุกรมเทเลอร์ คือ

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(o)}{n!} t^n \qquad \ldots\ldots \qquad (2.5.2)$$

ทางขวามือ ของสมการ (2.5.2) เรียกว่า the maclaurin series for f

ตัวอย่างที่ 2.5.1 ให้ $f(t) = \sin t$ จงเขียน $f(t)$ ให้อยู่ในรูป maclaurin series

วิธีทำ

$$f(t) = \sin t, \quad f(0) = 0$$

$$f'(t) = \cos t, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -\sin t, \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(t) = -\cos t, \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(t) = \sin t, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

จะเห็นว่า $f^{(5)} = f', \quad f^{(6)} = f'', \ldots$

ดังนั้น จะได้ลำดับ (sequence) $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

นั่นคือ
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ตัวอย่างที่ 2.5.2 จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = 1/x$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ ที่ $x = 1$

วิธีทำ

$$f(x) = x^{-1}, \qquad f(1) = 1$$
$$f'(x) = (-1)x^{-2}, \qquad f'(1) = -1$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}, \qquad f''(1) = (-1)^2 2!$$
$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}, \qquad f^{(3)}(1) = (-1)^3 3!$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-n-1}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

ดังนั้นจากสมการ (2.5.1) จะได้ว่า

$$f(x) = 1/x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

ทฤษฎีบทที่ 2.5.1 (Taylor's Theorem with Derivative Form of Remainder) สมมติให้ $f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ มีความต่อเนื่อง ในช่วง (a,b) แล้วจะมี ξ ซึ่งอยู่ระหว่าง a และ b ซึ่ง

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

เมื่อ R_n คือ เศษเหลือ (remainder) ซึ่งถูก กำหนดโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ข้อสังเกต 1. จะเห็นว่า R_n ขึ้นอยู่กับค่า a และ ค่า b R_n สามารถเขียนได้ว่า

$$R_n = R_n(a,b)$$

2. ถ้าให้ n = o จะได้

$$f(b) = f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

ตัวอย่างที่ 2.5.3 จงหาค่า $(1.1)^{1/5}$ ให้มีทศนิยม 4 ตำแหน่ง

วิธีทำ ใช้ ทฤษฎีบทของเทเลอร์ โดยให้

$$f(t) = (1+t)^{1/5}, \quad a = 0, \quad b = 0.1$$

$$f(t) = (1+t)^{1/5}$$

$$f'(t) = (1/5)(1+t)^{-4/5}$$

$$f''(t) = (-4/25)(1+t)^{-9/5}$$

$$f'''(t) = (36/125)(1+t)^{-14/5}$$

$$f(a) = 1 = 1.0000$$

$$f'(a)(b-a) = (1/5)(0.1) = 0.0200$$

$$\frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} = (-2/25)(0.1)^2 = -0.0008$$

$$\frac{f'''(a)(b-a)^3}{3!} = (6/125)(0.1)^3 = 0.000048$$

สำหรับทุก ๆ ค่า t ที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 จะได้ว่า

$$0 < (1+t)^{-14/5} < 1$$

ดังนั้น เราสามารถประมาณค่า R_n สำหรับ = 2

$$0 < R_2 = (36/125)(1+\xi)^{-14/5}\frac{(b-a)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0.1)^3 = 0.000048$$

เอาพจน์ที่เกิดจากการกระจายของเทเลอร์ โดยที่ $n = 2$ มาบวกกันจะได้ว่า

$(1.1)^{1/5}$ **มีค่าประมาณ** 1.0192

ข้อสังเกต ในตัวอย่างที่ 2.5.3 สามารถให้

$f(t) = t^{1/2}$, $a = 1$ และ $b = 1.1$

จะได้ผลลัพธ์เหมือนกัน

ให้ $f(t)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I แล้ว จากสูตรเทเลอร์สำหรับ t ทุก ๆ ค่า และ t_0 ที่อยู่ในช่วง I จะได้

$$f(t) = f(t_o)+\frac{f'(t_o)}{1!}(t-t_o)+\ldots+\frac{f^{(m)}(t_o)}{m!}(t-t_o)^m$$
$$+R_m(t, t_o)$$

เมื่อ $R_m(t,t_o)$ คือเศษเหลือซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\frac{R_m(t,t_o)}{(t-t_o)^m} \longrightarrow 0 \quad \text{ในขณะที่} \quad t\to t_o$$

ทฤษฎีบทที่ 2.5.2 สูตรเทเลอร์ (Taylor's Formula)

ให้ $\vec{f}(t)$ อยู่ใน ชั้น C^m บนช่วง I แล้ว **สำหรับ** t ทุก ๆ ค่า และ t_0 ที่อยู่ใน ช่วง I จะได้ว่า

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_o)+\frac{\vec{f}'(t_o)}{1!}(t-t_o)+\ldots$$
$$+\frac{\vec{f}^{(m)}(t_o)}{m!}(t-t_o)^m+\vec{R}_m(t,t_o)$$

เมื่อ $\dfrac{\vec{R}_m(t,t_0)}{(t-t_0)^m} \longrightarrow \vec{0}$ **ในขณะที่** $t \longrightarrow t_o$

ตัวอย่างที่ 2.5.4 ให้

$$\vec{f}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$$
$$\vec{f}(0) = \vec{i}$$
$$\vec{f}'(0) = \vec{j}$$
$$\vec{f}''(0) = -\vec{i}$$
$$f^{(3)}(0) = -\vec{j}$$
$$f^{(4)}(0) = \vec{i}$$

นั่นคือ เมื่อ $t_o = 0$ จะได้ว่า

$$\vec{f}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$$
$$= \vec{i} + t\vec{j} - \frac{\vec{i}}{2!}t^2 - \frac{\vec{j}}{3!}t^3 + \frac{\vec{i}}{4!}t^4 + \vec{R}_4(t)$$

เมื่อ $\vec{R}_4(t)/t^4 \longrightarrow \vec{0}$ ในขณะที่ $t \rightarrow 0$

ตอบ

ให้ $\vec{f}(t)$ อยู่ใน ชั้น C^∞ บนช่วง I แล้วสำหรับ m แต่ละตัว และ ทุก ๆ t, t_o ซึ่งอยู่ในช่วง I จะได้ว่า

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_o) + \frac{\vec{f}'(t_o)}{1!} + \ldots + \frac{\vec{f}^{(m)}(t_o)}{m!}(t-t_o)^m + \vec{R}_m(t, t_o)$$

ถ้า $\lim_{m\to\infty} \vec{R}_m(t, t_o) \longrightarrow \vec{0}$ แล้ว $\vec{f}(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

อนุกรมกำลัง (power series) คือ

$$\vec{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{f}^{(n)}(t_o)}{n!}(t-t_o)^n$$

ในกรณีนี้ เรากล่าวว่า $\vec{f}(t)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ในช่วง I

โดยทั่ว ๆ ไป $\vec{f}(t)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในช่วง I ถ้าสำหรับ t_o แต่ละตัว ในช่วง I

จะมี ย่าน $(S_\delta(t_o))$ ซึ่ง $\vec{f}(t)$ มีการกระจายแบบ อนุกรมกำลัง คือ

$$\vec{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n (t_o - t_o)^n$$

ชั้นของฟังก์ชันวิเคราะห์บนช่วง I แทนด้วย C^A

ข้อสังเกต 1. ฟังก์ชันที่อยู่ใน ชั้น C^∞ ไม่จำเป็นว่า จะต้องเป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์ แต่ ฟังก์ชันวิเคราะห์ ทุก ๆ ฟังก์ชันอยู่ในชั้น C^∞ ยิ่งไปกว่านั้น

$$\vec{f}^{(n)}(t_o) = \vec{a}_n n!$$

2. ผลบวก, ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของฟังก์ชันวิเคราะห์ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และฟังก์ชันวิเคราะห์ของฟังก์ชันวิเคราะห์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

3. ฟังก์ชันพหุนาม, ฟังก์ชันตรรกยะ (rational functions), ฟังก์ชันตรีโกนมิติ (trigonometric funcions) และฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential functions) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในช่วงใด ๆ ซึ่งฟังก์ชันเหล่านี้มีความต่อเนื่อง และตัวผกผัน (inverse) ของฟังก์ชันเหล่านี้ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในช่วงใด ๆ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่างที่ 2.5.5 $f(t) = e^{-1/t^2}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง สำหรับทุก ๆ ค่า t ยกเว้น $t = o$

ถ้ากำหนดให้ $f(0) = 0$ แล้ว $f(t)$ จะมีความต่อเนื่อง และอยู่ ชั้น C^∞ สำหรับ ทุก ๆ ค่า t ที่อยู่ในช่วง $(-\infty, \infty)$

อย่างไรก็ตาม $f(t)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในช่วงที่ประกอบด้วย $t = 0$

เนื่องจาก

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \ldots$$

ดังนั้น ถ้า $f(t)$ มีการกระจายแบบอนุกรมกำลังในบางย่าน ($S_\delta(0)$) อนุกรมจะเข้าใกล้ศูนย์สำหรับทุก ๆ ค่า t ที่อยู่ใน $S_\delta(0)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $f(t)$ ไม่เท่ากับศูนย์ใน $S_\delta(0)$ ใด ๆ

ตอบ

แบบฝึกหัด 2.4

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาอนุกรมเทเลอร์ สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ และจุดที่กำหนดให้

1. $f(x) = \tan x, \quad a = 0$
2. $f(t) = e^{t}, \quad a = 0$
3. $f(t) = \ln(1+t), \quad a = 0$
4. $f(t) = \ln t, \quad a = 3$
5. $f(t) = \cos t, \quad a = \pi/3$
6. จงหาค่า $\sqrt[3]{7}$ ให้มีทศนิยม 4 ตำแหน่ง
7. จงแสดงว่า

$$\sin t\vec{i}+(t^2+1)\vec{j} = \vec{i}+\frac{1}{4}(\pi^2+4)\vec{j}+\pi\vec{j}(t-\pi/2)+\frac{1}{2}(-\vec{i}+2\vec{j})(t-\pi/2)^2+\vec{R}$$

เมื่อ $\lim\limits_{t\to\pi/2} \vec{R}\Big/(t-\pi/2)^2 = \vec{0}$

8. จงหา 3 พจน์แรกของการกระจายเทเลอร์ของ

$$\vec{f}(t) = \cos t\vec{i}+(t^2+2t+1)\vec{j} \qquad \text{ที่} \quad t = 0$$