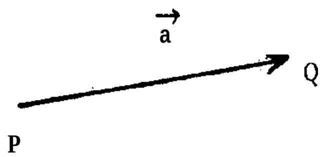
บทที่ 1
เวกเตอร์
(Vectors)

1.1 เวกเตอร์ในปริภูมิแบบยุคลิด (Vector in Euclidean space E^3)

เวกเตอร์ในปริภูมิแบบยุคลิด หมายถึง สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (ordered triple) $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ โดยที่ a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริง เวกเตอร์เป็นจุดใน E^3 และโดยทั่วไปเวกเตอร์แทนด้วย $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{X}, \vec{Y}, \ldots$ หรือตัวพิมพ์หนา

โดยวิธีกราฟ $\vec{a}$ แทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง (directed line segment $\overrightarrow{PQ}$ ดังรูป 1.1.1 $\vec{a}$ มีทิศทาง จาก P ไปยัง Q จุด P เรียกว่า จุดเริ่มต้น (initial point) และ Q เรียกว่า จุดสิ้นสุด (terminal point) ของ $\vec{a}$



รูป 1.1.1

ถ้าจุด P และจุด Q ทับกันสนิท (coincide) เวกเตอร์ที่ได้ เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector หรือ null vector) แทนด้วย $\vec{0} = (0,0,0)$ มีทิศทางไม่จำกัด (arbitrary direction)

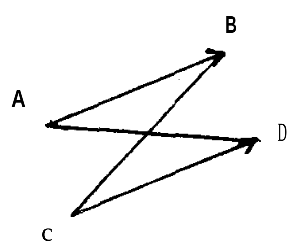
ความยาวหรือขนาด (length or magnitude) ของ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ คือ $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ดังนั้น $|\vec{A}| \geq 0$ และ $|\vec{A}| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

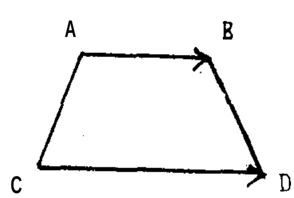
2) $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ขนานกันกับเส้นตรงเดียวกันหรืออยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และมีทิศทางเหมือนกัน

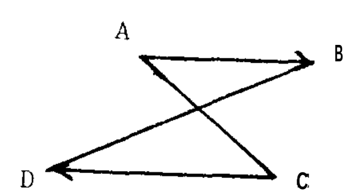
การเท่ากัน หมายถึง จุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ AD และจุดกึ่งกลางของเซกเมนต์ BC อยู่ที่จุดเดียวกัน ยกเว้น A, B, C, D อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน หรือหมายความว่า ABDC เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป 1.1.2



รูป 1.1.2

$\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ จะขนานกัน และมีทิศทางเดียวกัน ถ้า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน เซกเมนต์ AC และเซกเมนต์ BD ไม่มีจุดตัด แต่ถ้ามีจุดตัดกัน เรากล่าวว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศตรงข้าม ดังรูป 1.1.3





รูป 1.1.3

นิยาม 1.1.1 ให้ $\vec{V}$ แทน $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A และ B มีพิกัด คือ (a_1, a_2, a_3) และ (b_1, b_2, b_3) ตามลำดับ แล้ว

$$\vec{V} = (\text{bl-al} \quad , \quad b_2-a_2 \quad , \quad b_3-a_3 \quad)$$

ตัวอย่างที่ 1.1.1 ให้ $\vec{w}$ แทน $\overrightarrow{AB}$ ถ้า A และ B มีพิกัด คือ (3,-2,4) และ (2,1,5) ตามลำดับ จงหา $\vec{w}$

วิธีทำ

$$\vec{w} = (2-3, \quad 1+2, \quad 5-4)$$
$$= (-1,3,1)$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.1.2 ให้ $\overset{3}{U} = (2, \quad -3, \quad 1)$ จงหา $|\vec{U_I}$

94

วิธีทำ

$$|\vec{U}| = \sqrt{4+9+1}$$
$$= \sqrt{14}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ให้ $\vec{v} = (2,4,-3)$ แทน $\overrightarrow{AB}$ ถ้า A มีพิกัด คือ (2, 1, −5) จงหาพิกัดของ B

วิธีทำ ให้ B มีพิกัดคือ $(b_1 \ ,b_2 \ , \ b_3 \ )$

จากนิยาม 1.1.1 จะได้ว่า

$$b_1-2 = 2$$
$$b_2-1 = 4$$
$$b_3+5 = -3$$

ดังนั้น

$$b1 = 4$$
$$b_2 = 5$$
$$b_3 = -8$$

นั่นคือ B มีพิกัดคือ (4,5,-8)

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.1

จากข้อ 1 ถึงข้อ 6 กำหนด จุด P และ Q ให้จงหา $\vec{v}$ ซึ่งแทน $\overrightarrow{PQ}$

1. P(2,0,3), Q(1,4,-3)
2. P(1,1,0), Q(-1,2,0)
3. P(-4,-2,1), Q(1,-3,4)
4. P(3,2,1), Q(3,3,3)
5. P(2,0,0), Q(0,0,-3)
6. P(4,-5,-1), Q(-2,1,-3)

จากข้อ 7 ถึงข้อ 10 จงหาขนาดของ $\vec{A}$

7. $\vec{A} = (3,2,-4)$
8. $\vec{A} = (1,-1,1)$
9. $\vec{A} = (2,-4,-1)$
10. $\vec{A} = (-2,3,5)$

จากข้อ 11 ถึง ข้อ 14 ให้ $\vec{V}$ แทน $\overrightarrow{PQ}$ จงหาพิกัดของ Q

11. $\vec{V} = (2,1,-3)$, P(1,2,-1)
12. $\vec{V} = (-1,3,-2)$, P(2,0,4)
13. $\vec{V} = (3,2,-4)$, P(2,0,-4)
14. $\vec{V} = (-2,4,1)$, P(0,0,-5)

1.2 การบวกและการลบเวกเตอร์ (Addition and Subtraction of Vectors)

กำหนดเวกเตอร์ใน E^3 ให้ 2 เวกเตอร์คือ

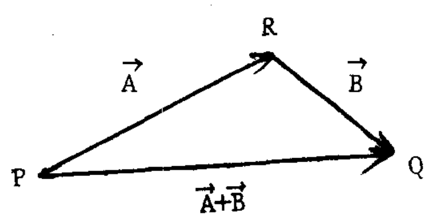
$$\vec{A} = (a_1 , a_2 , a_3)$$

และ $$\vec{B} = (b_1 , b_2 , b_3)$$

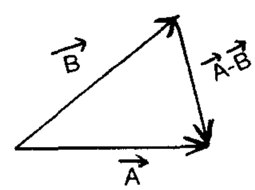
ผลบวกของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แทนด้วย $\vec{A}+\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งกำหนดโดย

$$\vec{A}+\vec{B} = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$$

ในแง่เรขาคณิต ผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ เขียนได้ดังรูป 1.2.1



รูป 1.2.1



รูป 1.2.2

ผลต่างของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ คือ $\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B})$ ดังรูป 1.2.2

ทฤษฎีบทที่ 1.2.1 การบวกเวกเตอร์คล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ กฎการสลับที่ (Commutative law)
2. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative law)
3. $\vec{0}+\vec{A} = \vec{A}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{A}$ (Identity)
4. $\vec{A}+(-\vec{A}) = \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{A}$ (Inverse)

พิสูจน์

1. $$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\\ &= (b_1+a_1, b_2+a_2, b_3+a_3)\\ &= \vec{B} + \vec{A}\end{aligned}$$

2. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = ((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,(a_3+b_3)+c_3)$

$= (a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2),\ a_3+(b_3+c_3))$

$= \vec{A} + (\vec{B}+\vec{C})$

3. $\vec{A}+\vec{0} = (a_1+0,\ a_2+0,\ a_3+0)$

$= (a_1,\ a_2,\ a_3)$

$= \vec{A}$

4. $\vec{A}+(-\vec{A}) = (a_1-a_1,\ a_2-a_2,\ a_3-a_3)$

$= (0,0,0)$

$= \vec{0}$ **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 1.2.1 ให้ $\vec{A} = (1,-2,0)$, $\vec{B} = (0,1,1)$

$\vec{A}+\vec{B} = (1,-1,1)$

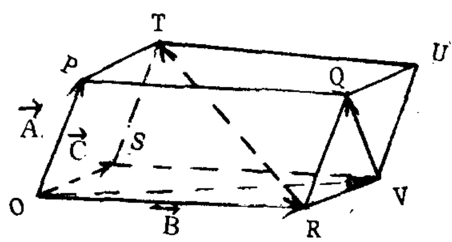
$-\vec{A} = (-1,2,0)$

$\vec{B}-\vec{A} = (-1,3,1)$

$|\vec{A}| = \sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 จากรูป 1.2.3 ให้ $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{B} = \overrightarrow{OR}$, $\vec{C} = \overrightarrow{OS}$

จงหา $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{VQ}$ และ $\overrightarrow{RT}$ ในพจน์ของ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$



รูป 1.2.3

วิธีทำ

$$\vec{OV} = \vec{OR} + \vec{RV}$$
$$= \vec{OR} + \vec{OS}$$
$$= \vec{B} + \vec{C}$$
$$\vec{VQ} = \vec{VR} + \vec{RQ}$$
$$= -\vec{RV} + \vec{RQ}$$
$$= -\vec{OS} + \vec{OP}$$
$$= -\vec{C} + \vec{A}$$
$$\vec{RT} = \vec{RS} + \vec{ST}$$
$$= \vec{RO} + \vec{OS} + \vec{ST}$$
$$= -\vec{B} + \vec{C} + \vec{A}$$

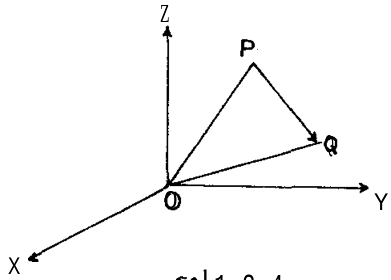
ตัวอย่างที่ 1.2.3 $\vec{A} + (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + (\vec{B} + (-\vec{A}))$
$$= \vec{A} + (-\vec{A}) + \vec{B}$$
$$= \vec{O} + \vec{B}$$
$$= \vec{B}$$

ดังนั้น $\vec{A} + \vec{X} = \vec{B}$ มีรากเพียงค่าเดียวคือ
$$\vec{X} = \vec{B} - \vec{A}$$

เนื่องจาก ถ้า $\vec{A} + \vec{Y} = \vec{B}$ แล้ว
$$(-\vec{A}) + \vec{A} + \vec{Y} = (-\vec{A}) + \vec{B}$$
$$= \vec{B} - \vec{A}$$

หรือ
$$\vec{O} + \vec{Y} = \vec{B} - \vec{A}$$
$$\vec{Y} = \vec{B} - \vec{A}$$

กำหนดจุด 2 จุด คือ P และ Q ใน E^3 นั่นคือเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$) ใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทน $\vec{Q}-\vec{P}$ ดังรูป 1.2.4 ($\vec{Q}=\overrightarrow{OQ}$ และ $\vec{P}=\overrightarrow{OP}$)



รูป 1.2.4

ระยะทางจาก P ไปยัง Q คือความยาวของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เทนด้วย $|\overrightarrow{PQ}|$

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}|$$

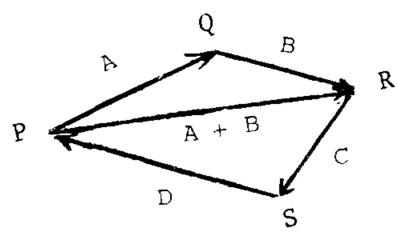
$$\overrightarrow{PQ} \quad \overrightarrow{P'Q'} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \vec{Q}-\vec{P} = \vec{Q'}-\vec{P'}$$

และ $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{P}$

ตัวอย่างที่ 1.2.4 ให้ $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{B} = \overrightarrow{QR}$, $\vec{C} = \overrightarrow{RS}$, และ $\vec{D} = \overrightarrow{SP}$ ดังรูป 1.2.5 แล้ว

$$\begin{aligned}
\vec{A}+\vec{B} &= \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} \\
&= \vec{Q}-\vec{P}+\vec{R}-\vec{Q} \\
&= \vec{R}-\vec{P} \\
&= \overrightarrow{PR} \\
\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} &= \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS} \\
&= \vec{R}-\vec{P}+\vec{S}-\vec{R} \\
&= \vec{S}-\vec{P} \\
&= \overrightarrow{PS} \\
&= -\vec{D}
\end{aligned}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SP}$$
$$= \vec{S} - \vec{P} + \vec{P} - \vec{S}$$
$$= \vec{0}$$



รูป 1.2.5 **ตอบ**

อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (Triangle inequality)

$$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$$

$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีทิศทางเดียวกัน

แบบฝึกหัด 1.2

1. ให้ $\vec{A} = (-3,7,-4)$, $\vec{B} = (2,1,-6)$ จงหา

   ก. $\vec{A} + \vec{B}$

   ข. $\vec{A} - \vec{B}$

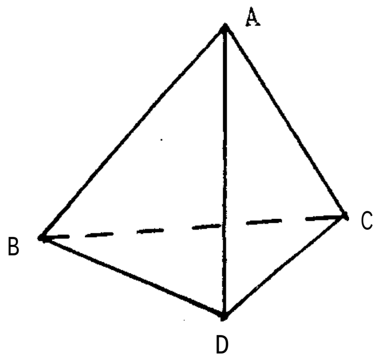
   ค. $\vec{B} - \vec{A}$

   ง. $|\vec{A}|$

   จ. $|\vec{B}|$

2. ใช้ผลจากตัวอย่างที่ 1.2.3 แสดงว่า $-(-\vec{A}) = \vec{A}$ สำหรับทุก ๆ $\vec{A}$

3. ให้ A,B,C,D เป็นจุดยอดของทรงสี่หน้า (tetrahedron) (ทรงสี่หน้า คือ พีระมิดที่มีหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมดูรูป 1.2.6) และให้ $\vec{b}$ แทน $\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$ แทน $\overrightarrow{AC}$ และ $\vec{d}$ แทน $\overrightarrow{AD}$ จงเขียน $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ในพจน์ของ $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$



รูป 1.2.6

4. ให้ $\vec{A} = (1,-1,2,0)$ และ $\vec{B} = (2,6,4,-3)$ เป็นเวกเตอร์ ใน E^4 จงหา $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$

1.3 การคูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนจริง (Multiplication of a Vector by a Real Number)

ถ้า k เป็นจำนวนจริง และ เวกเตอร์ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$

แล้ว

$$k\vec{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$k\vec{A}$ คือเวกเตอร์ซึ่งมีความยาว

$$\begin{aligned} &= |k\vec{A}| \\ &= \sqrt{(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \\ &= |k|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = |k||\vec{A}| \end{aligned}$$

ดังนั้น $|k\vec{A}| = |k||\vec{A}|$ .... (1.3.1)

ถ้า $k > 0$ แล้ว $k\vec{A}$ จะขนานกับ $\vec{A}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

ถ้า $k < 0$ แล้ว $k\vec{A}$ จะขนานกับ $\vec{A}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$

ถ้า $k = 0$ หรือ $\vec{A} = 0$ แล้ว $k\vec{A} = 0$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.1 การคูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนจริงมีคุณสมบัติ ดังนี้

1. $k_1(k_2\vec{A}) = (k_1k_2)\vec{A} = k_1k_2\vec{A}$
2. $\left.\begin{aligned} (k_1+k_2)\vec{A} &= k_1\vec{A} + k_2\vec{A} \\ k(\vec{A}+\vec{B}) &= k\vec{A} + k\vec{B} \end{aligned}\right\}$ กฎการกระจาย (Distributive laws)
3. $1\vec{A} = \vec{A}$, $(-1)\vec{A} = -\vec{A}$
4. $0\vec{A} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$

พิสูจน์ 1. $k_1(k_2\vec{A}) = (k_1(k_2a_1), k_1(k_2a_2), k_1(k_2a_3))$

$$= ((k_1k_2)a_1, (k_1k_2)a_2, (k_1k_2)a_3)$$

$$= (k_1 k_2)\vec{A}$$

2. $(k_1+k_2)\vec{A} = ((k_1+k_2)a_1\ , (k_1+k_2)a_2\ , (k_1+k_2)a_3\ )$

$$= (k_1a_1+k_2a_1\ ,\ k_1a_2+k_2a_2,\ k_1a_3+k_2a_3\ )$$

$$= k_1A + k_2\vec{A}$$

3. $1\vec{A} = (1a_1\ ,\ 1a_2\ ,\ 1a_3\ )$

$$= (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ )$$

$$= \vec{A}$$

$(-1)\vec{A} = (-1a_1\ ,\ -1a_2\ ,\ -1a_3\ )$

$$= (-a_1,\ -a_2,\ -a_3\ )$$

$$= -\vec{A}$$

4. $0\vec{A} = (0a_1,\ 0a_2,\ 0a_3\ )$

$$= (0,0,0)$$

$$= \vec{0}$$

$k\vec{0} = (k0,\ k0,\ k0)$

$$= (\ 0,0,0)$$

$$= \vec{0}$$

ป.ศ.พ.

ตัวอย่างที่ 1.3.1 ให้ $\vec{A} = (1, \pi, 0)$ $\vec{B} = (0,2,-1)$

$2\vec{A} = (2,\ 2\pi\ ,\ 0)$

$(-1)\vec{A} = (-1,\ -\pi\ ,\ 0)$

$= -\vec{A}$

และ $\vec{A} - 3\vec{B} = (1, \pi -6,\ 3)$

ตัวอย่างที่ 1.3.2 ให้ $\vec{A} = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $\vec{B} = -\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ และ $\vec{C} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

$$\begin{aligned}\vec{A} - 2\vec{B} - \vec{C} &= (\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) - 2(-\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3) - (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \\ &= \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_2 - 4\vec{u}_3 - \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ &= -\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3\end{aligned}$$

$\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{B} \neq \vec{0}$ เรียกว่าขนานกัน (parallel) เขียนแทนด้วย $\vec{A} // \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ มี k_1, k_2 ซึ่ง $\vec{B} = k_1\vec{A}$ หรือ $\vec{A} = k_2\vec{B}$ โดยที่ k_1, k_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $\vec{A} // \vec{B}$ แล้ว $\vec{B} // \vec{A}$

ถ้า $\vec{A} // \vec{B}$ และ $\vec{B} // \vec{C}$ แล้ว $\vec{A} // \vec{C}$

ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $k = 1/|\vec{A}|$ จะได้เวกเตอร์หน่วย (unit vector) แทนด้วย

$$\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

ตัวอย่างที่ 1.3.3 ให้ $\vec{A} = (1,-1,3)$, $\vec{B} = (2,-2,6)$ และ $\vec{C} = (-3,3,-9)$

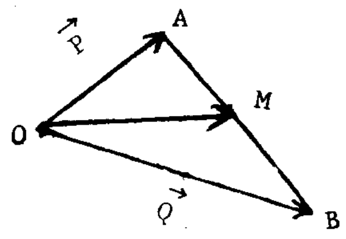
เนื่องจาก $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}$ ดังนั้น $\vec{A} // \vec{B}$ และมีทิศทาง เดียวกัน

และเนื่องจาก $\vec{B} = \frac{-2}{3}\vec{C}$ ดังนั้น $\vec{B} // \vec{C}$ และ มีทิศทางตรงข้ามกัน

เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ $\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$= (1/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11})$$

ตัวอย่างที่ 1.3.4 สามเหลี่ยม OAB ดังรูป 1.3.1 ให้ $\vec{P} = \overrightarrow{OA}$ และ $\vec{Q} = \overrightarrow{OB}$ และให้ M เป็นจุดกึ่งกลาง ของด้าน AB แล้ว $\overrightarrow{OM}$ สามารถเขียนในพจน์ของ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ ดังนี้



รูป 1.3.1

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \vec{P} + \overrightarrow{AM} \\
&= \vec{P} + (1/2)\overrightarrow{AB} \\
&= \vec{P} + (1/2)(\vec{Q} - \vec{P}) \\
&= \vec{P} + (1/2)\vec{Q} - (1/2)\vec{P} \\
&= (1/2)\vec{P} + (1/2)\vec{Q}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1.3.5 ให้ $\vec{A} = (1,-1,2,0)$ และ $\vec{B} = (2,6,4,-3)$ เป็นเวกเตอร์ใน E^4 จงหา $3\vec{A} - (t+1)\vec{B}$

วิธีทำ

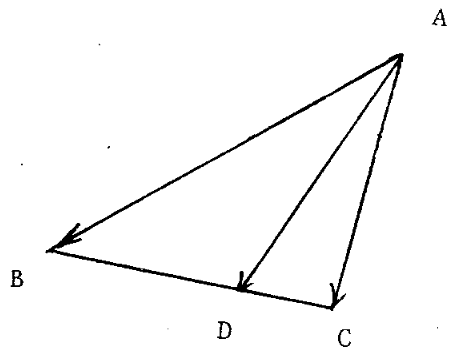
$$
\begin{aligned}
3\vec{A} &= (3,-3,6,0) \\
(t+1)\vec{B} &= (2t+2\ ,\ 6t+6,\ 4t+4,\ -3t-3) \\
-(t+1)\vec{B} &= (-2t-2,\ -6t-6,\ -4t-4, 3t+3) \\
3\vec{A}-(t+1)\vec{B} &= (1-2t,\ -9-6t, 2-4t, 3+3t)
\end{aligned}
$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.3.6 จงพิสูจน์ว่า ถ้า D เป็นจุดบนด้าน BC ของสามเหลี่ยม ABC ดังรูป 1.3.2 และ λ, μ เป็นสเกลาร์ซึ่ง

$$\lambda\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{DC}$$

แล้ว $$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{AD}$$



รูป 1.3.2

พิสูจน์ $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \mu(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

$$= \lambda\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{DB} + \mu\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{DC}$$

$$= (\lambda + \mu)\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{BD} + \mu\overrightarrow{DC}$$

$$= (\lambda + \mu)\overrightarrow{AD} \qquad (\because \lambda\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{DC})$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.3.7 ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน ซึ่ง

$$\vec{C} = (m+n-1)\vec{A} + (m+n)\vec{B}$$

$$\vec{D} = (m-n)\vec{A} + (2m-n+1)\vec{B}$$

จงหา m และ n ซึ่ง $\vec{C} = 3\vec{D}$

วิธีทำ $\vec{C} = 3\vec{D}$

$$(m+n-1)\vec{A} + (m+n)\vec{B} = 3\left[(m-n)\vec{A} + (2m-n+1)\vec{B}\right]$$

$$= 3(m-n)\vec{A} + 3(2m-n+1)\vec{B}$$

$$= (3m-3n)\vec{A} + (6m-3n+3)\vec{B}$$

$$m + n - 1 = 3m - 3n \quad \text{———— (1)}$$

$$m+n = 6m-3n+3 \quad \text{———— (2)}$$

จาก (1), $2m-4n = -1$ ———— (3)

จาก (2), $5m-4n = -3$ ———— (4)

(4)-(3) , $3m = -2$

$$m = \frac{-2}{3}$$

แทนค่า m ใน (1),

$$2(-2/3)-4n = -1$$

$$-4/3-4n = -1$$

$$4n = -4/3 + 1$$

$$= \frac{-4+3}{3}$$

$$= \frac{-1}{3}$$

$$n = \frac{-1}{12}$$

$\therefore m = \frac{-2}{3}$ และ $n = \frac{-1}{12}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.3

1. ถ้า $\vec{A} = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$, $\vec{B} = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ และ $\vec{C} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$

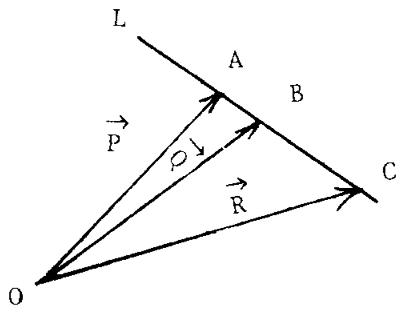
   จงหา $2\vec{A} - 3(\vec{B} - \vec{C})$ ในพจน์ของ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$

2. ถ้า $\vec{A} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3$, $\vec{B} = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{C} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3$

   จงหา $3\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{c}$ ในพจน์ของ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$

3. จงพิสูจน์ว่า เส้นที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่ 3 และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่ 3

4. ให้ $\vec{P} = \vec{OA}$, $\vec{Q} = \vec{OB}$, $\vec{Q} \neq \vec{P}$ และ $\vec{R} = \vec{OC}$ ดังรูป 1.3.3



รูป 1.3.3

   จงแสดงว่า C อยู่บนเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ

$$\vec{R} = k_1\vec{P} + k_2\vec{Q} \text{ เมื่อ } k_1 + k_2 = 1$$

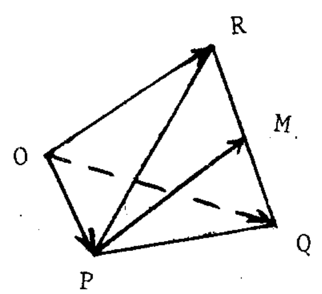
5. จงแสดงว่า $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ เมื่อ M เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

6. จงแสดงว่า $\vec{AB} + \vec{CD} = 2\vec{MN}$ เมื่อ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

และ BD ตามลำดับ

7. ถ้า A,B,C,D เป็นจุด 4 จุดใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{PQ}$ เมื่อ P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ BD ตามลำดับ

8. ทรงสี่หน้า OPQR ดังรูป 1.3.4 ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OR}$ และให้ M เป็น จุดกึ่งกลางของ RQ จงหา $\overrightarrow{PM}$ ในพจน์ของ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$



รูป 1.3.4

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a_i , b_i , c_i เป็นส่วนประกอบของ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ เทียบกับมูลฐานแล้ว

ก. $\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i$

ข. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $c_i = a_i + b_i$

ค. $\vec{B} = \lambda\vec{A}$ ก็ต่อเมื่อ $b_i = \lambda a_i$

10. จงหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{v} = 3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

1.4 อิสระเชิงเส้นและไม่อิสระเชิงเส้น (Linearly independent and linearly dependent)

เวกเตอร์ $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ถ้ามี

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ ซึ่งเป็นสเกลาร์ โดยที่มี k_i อย่างน้อยที่สุดหนึ่งตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้

$$k_1\vec{A}_1 + k_2\vec{A}_2 + \ldots + k_n\vec{A}_n = \vec{0}$$

ในทางตรงข้าม ถ้า $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ จะเรียกเวกเตอร์

$\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ ว่า อิสระเชิงเส้น

ข้อสังเกต เซตของเวกเตอร์ซึ่งรวมเวกเตอร์ศูนย์เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก สามารถเขียนว่า

$$1\vec{0} + 0\vec{A}_1 + 0\vec{A}_2 + \ldots + 0\vec{A}_n = \vec{0}$$

เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้ง 2 มีจุดกำเนิดเดียวกัน

เวกเตอร์เหล่านี้ เรียกว่าร่วมเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

เวกเตอร์ 3 เวกเตอร์เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้ง 3 มีจุดกำเนิดเดียวกัน

เวกเตอร์เหล่านี้ เรียกว่าอยู่ร่วมระนาบ (coplanar)

ตัวอย่างที่ 1.4.1 $\vec{A} = (1,-1,0)$, $\vec{B} = (0,2,-1)$, $\vec{C} = (2,0,-1)$

เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $2\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = \vec{0}$ ดังนั้น $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1.4.2 สมมติว่า $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ แล้ว $\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$ **หรือ**

$\vec{A} = k\vec{B}$ นั่นคือ $\vec{A} - k\vec{B} = \vec{0}$

ดังนั้น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ในทางกลับกัน สมมติว่า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น แล้ว

$$k_1\vec{A} + k_2\vec{B} = \vec{0} \quad \text{ให้} \quad k_1 \neq 0$$

$$\vec{A} = (-k_2/k_1)\ \vec{B}$$

ดังนั้น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน

นั่นคือเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้ง 2 ขนานกัน

ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ถ้า $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ เป็น อิสระเชิงเส้น และถ้า

$$\vec{U} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n$$

$$= k_1'\vec{u}_1 + k_2'\vec{u}_2 + \ldots + k_n'\vec{u}_n$$

แล้ว $k_1 = k_1', \quad k_2 = k_2', \ldots, k_n = k_n'$

พิสูจน์ สมมติว่ามี k_j และ k_j' บางตัวซึ่ง $k_j \neq k_j'$ แล้ว

$$(k_1-k_1')\vec{u}_1 + (k_2-k_2')\vec{u}_2 + \ldots + (k_j-k_j')\vec{u}_j + \ldots + (k_n-k_n')\vec{u}_n = \vec{0}$$

เมื่อ $k_j \neq k_j'$ หรือ $k_j - k_j' \neq 0$ ทำให้ได้ว่า

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ซึ่งเกิดความขัดแย้งกัน (contradiction)

ดังนั้น $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ เป็น อิสระเชิงเส้น และถ้า

$$\vec{U} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n = k_1'\vec{u}_1 + k_2'\vec{u}_2 + \ldots + k_n'\vec{u}_n$$

แล้ว $k_1 = k_1', \quad k_2 = k_2', \ldots, k_n = k_n'$ **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 1.4.3 จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อมีหนึ่งในเวกเตอร์เหล่านี้เป็น ผลบวกเชิงเส้น (linear conbination) ของเวกเตอร์อื่น ๆ ที่เหลือ

วิธีทำ สมมติให้ $\vec{u}_1$ เป็น ผลบวกเชิงเส้น ของ $\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ นั่นคือ

$$\vec{u}_1 = k_2\vec{u}_2+\ldots+k_n\vec{u}_n$$
$$\vec{u}_1-k_2\vec{u}_2-\ldots-k_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

จะเห็นว่ามีสัมประสิทธิ์ของ $\vec{u}_1$ ไม่เท่ากับศูนย์

ดังนั้น $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ในทางกลับกัน ถ้า $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น แล้วจะมี

$k_1,\ldots,k_n$ ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์หมดทุกตัว ซึ่ง

$$k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\ldots+k_n\vec{u}_n = 0$$

ให้ $k_1 \neq 0$ ดังนั้น

$$\vec{u}_1 = \frac{-k_2}{k_1}\vec{u}_2-\ldots-\frac{k_n}{k_1}\vec{u}_n$$

นั่นคือ $\vec{u}_1$ เป็น ผลบวกเชิงเส้น ของ $\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ **ช.ต.พ.**

ใน 3 มิติจะมีเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ที่เป็น อิสระเชิงเส้น คือ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ โดยที่

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$

เนื่องจาก $k_1\vec{i}+k_2\vec{j}+k_3\vec{k} = (k_1,k_2,k_3)$

และถ้า $k_1\vec{i}+k_2\vec{j}+k_3\vec{k} = \vec{0}$ แล้ว $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$\vec{A} = (a_1,a_2,a_3)$ สามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

ซึ่งเป็น ผลบวกเชิงเส้น ของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

โดยทั่วไปจะเรียก S ซึ่งเป็นเซตของ เวกเตอร์ว่าเป็นมูลฐาน (basis) ใน E^3 ถ้า

1. ทุก ๆ เวกเตอร์ใน E^3 สามารถเขียนในรูป ผลบวกเชิงเส้น ของเวกเตอร์ในเซต S
2. S เป็นเซตของเวกเตอร์ซึ่งเวกเตอร์เหล่านี้เป็น อิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบทที่ 1.4.2 เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น 3 เวกเตอร์จะทำให้เกิดมูลฐานใน E^3 ในท กลับกัน ทุก ๆ มูลฐานใน E^3 จะประกอบด้วย เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น 3 เวกเตอร์

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ เรียกว่ามูลฐานใน E^3 และอยู่ในระบบ มือขวา (right handed)

ตัวอย่างที่ 1.4.4 ให้ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ เป็นมูลฐาน และให้

$$\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{j} - 2\vec{k}$$

และ $$\vec{C} = 3\vec{i} + \vec{k}$$

จงแสดงว่า $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็น อิสระเชิงเส้น และ $\left\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right\}$ ก็เป็นมูลฐาน

วิธีทำ ให้

$$k_1\vec{A}+k_2\vec{B}+k_3\vec{C} = \vec{0}$$

$$k_1(2\vec{i}-\vec{j})+k_2(\vec{j}-2\vec{k})+k_3(3\vec{i}+\vec{k}) = \vec{0}$$

$$2k_1\vec{i}-k_1\vec{j}+k_2\vec{j}-2k_2\vec{k}+3k_3\vec{i}+k_3\vec{k} = \vec{0}$$

$$(2k_1+3k_3)\vec{i}+(-k_1+k_2)\vec{j}+(-2k_2+k_3)\vec{k} = \vec{0}$$

เนื่องจาก $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ เป็น อิสระเชิงเส้น ดังนั้น

$$2k_1+3k_3 = 0, \quad -k_1+k_2 = 0, \quad -2k_2+k_3 = 0$$

ตัวกำหนด (determinant) ของสัมประสิทธิ์ของ k_1, k_2, k_3 คือ

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

ดังนั้น $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

นั่นคือ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็น อิสระเชิงเส้น

จะเห็นว่าส่วนประกอบของ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ จะอยู่ในสดมภ์ (column) ของตัวกำหนด

ทฤษฎีบทที่ 1.4.3 ให้

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ เป็นมูลฐาน

$\Delta = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ถ้า $\Delta > 0$ กล่าวว่า $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ มีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $\Delta < 0$ กล่าวว่า $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ตัวอย่างที่ 1.4.5 ให้ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นมูลฐาน และให้

$$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{B} = \vec{i} - \vec{k}$$

$\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ จงพิจารณาว่า $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ และ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ มีทิศทางเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0+1)-1(3+2)+0$$

$$= 1-5 = -4 < 0$$

$\therefore$ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ และ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 1.4.4 ถ้า $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็น อิสระเชิงเส้น และ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้วจะมี A_1, A_2, A_3 ซึ่ง

$$\vec{A} = A_1\vec{u} + A_2\vec{v} + A_3\vec{w} \quad \ldots\ldots\ldots(1.4.1)$$

โดยที่ A_1, A_2, A_3 เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ ให้

$$\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\vec{w} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

$$\vec{A} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$$

แทนค่า $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ในสมการ (1.4.1) จะได้

$$\vec{A} = A_1(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})+A_2(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})+A_3(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$= (A_1a_1+A_2b_1+A_3c_1)\vec{i}+(A_1a_2+A_2b_2+A_3c_2)\vec{j}+(A_1a_3+A_2b_3+A_3c_3)\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore A_1a_1+A_2b_1+A_3c_1 &= d_1 \\ A_1a_2+A_2b_2+A_3c_2 &= d_2 \\ A_1a_3+A_2b_3+A_3c_3 &= d_3 \end{aligned}\right\} (1.4.2)$$

จากสมการ (1.4.2) สามารถหาค่า A_1 ,A_2 ,A_3 ได้ ดังนั้นจึงเขียน

$$\vec{A} = A_1\vec{u}+A_2\vec{v}+A_3\vec{w}$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.4.6 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$,

$\vec{A} = \vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$

จงแสดงว่า $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็น อิสระเชิงเส้น และเขียน $\vec{A}$ ให้อยู่ในพจน์ของ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \triangle &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(3+2)-3(-3-6)+1(1-3) \\ &= 10+27-2 \\ &= 35 \neq 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็น อิสระเชิงเส้น

จากทฤษฎีบทที่ 1.4.3

$$\begin{aligned} 2A_1 - A_2 + 3A_3 &= 1 \\ 3A_1 + A_2 - A_3 &= 2 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1(3+2)+1(6-6)+3(4+6)}{2(3+2)+1(9+1)+3(6-1)}$$

$$= \frac{5+30}{10+10+15}$$

$$= \frac{35}{35} \qquad = \quad 1$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & 3 \end{vmatrix}}{35}$$

$$= \frac{2(6-6)-1(9+1)+3(-18-2)}{35}$$

$$= \frac{0-10-60}{35}$$

$$= \frac{-70}{35} \qquad = \quad -2$$

$$A_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{35}$$

$$= \frac{2(-6-4)+1(-18-2)+1(6-1)}{35}$$

$$= \frac{-20-20+5}{35}$$

$$= -\frac{35}{35} \qquad = \quad -1$$

ดังนั้น $\vec{A} = \vec{u}-2\vec{v}-\vec{w}$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงพิสูจน์ว่า เซตของเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยเซตย่อย (subset) ของเซตที่ไม่อิสระเชิงเส้น จะเป็นเซตที่ไม่อิสระเชิงเส้น

จากข้อ 2 ถึงข้อ 8 จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้นั้นเป็น ไม่อิสระเชิงเส้น หรือ อิสระเชิงเส้น

2. $\vec{A} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{j}-\vec{k}$, $\vec{C} = 2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$

3. $\vec{P} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{Q} = -2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{R} = 2\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$

4. $\vec{A} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{C} = -\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

5. $\vec{A} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{C} = 3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

6. $\vec{A} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{C} = 2\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$

7. $\vec{A} = 2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{C} = \vec{i}+2\vec{j}$

8. $\vec{A} = \vec{i}+\vec{j}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{C} = -\vec{i}+\vec{j}$

จากข้อ 9 ถึงข้อ 12 จงแสดงว่า $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็น อิสระเชิงเส้น และเขียน $\vec{A}$ ให้อยู่ในพจน์ของ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

9. $\vec{u} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$,

   $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

10. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$,

    $\vec{A} = 2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

11. $\vec{u} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}$, $\vec{w} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$,

    $\vec{A} = 2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

12. $\vec{u} = 2\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{w} = -2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

    $\vec{A} = -\vec{i}+20\vec{j}+3\vec{k}$

13. ให้ $\vec{u}_1 = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{u}_2 = \vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{u}_3 = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

จงแสดงว่า $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ และ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ มีทิศทางเดียวกัน

14. ให้ $\vec{A} = 3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{C} = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

จงพิจารณาว่า $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ และ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ มีทิศทางเดียวกันหรือไม่

15. จงพิจารณาว่า $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ และ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ มีทิศทางเดียวกันหรือไม่

โดยที่ $\vec{A} = \vec{i}+\vec{j}$

$\vec{B} = 2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{C} = \vec{i}-\vec{k}$

1.5 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ (Scalar Product of Vectors หรือ Dot Product of Vectors)

นิยาม 1.5.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \text{ ....(1.5.1)}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ เวกเตอร์ $\vec{B}$, $0 \le \theta \le \pi$

$\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

ถ้า $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ แล้ว

$$\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \text{ ....(1.5.2)}$$

ถ้า $\vec{A} = \vec{B}$ จะได้

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$$

ทฤษฎีบทที่ 1.5.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ กฎสมมาตร (Symmetric Law)
2. $(k\vec{A}).\vec{B} = k(\vec{A}.\vec{B})$ (k เป็นสเกลาร์)
3. $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ กฎการกระจาย
4. การคูณแบบสเกลาร์ (Scalar multiplication) เป็นบวก (positive definite) นั่นคือ

   i) $\vec{A}.\vec{A} \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{A}$

   ii) $\vec{A}.\vec{A} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} = \vec{0}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$

1) $$\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 = \vec{B}.\vec{A}$$

2) $$(k\vec{A}).\vec{B} = ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3 = k(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) = k(\vec{A}.\vec{B})$$

3) $$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3) = (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$$

4) $\vec{A}.\vec{A} = a_1^2+a_2^2+a_3^2 \geq 0$

และ $\vec{A}.\vec{A} = a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2=a_3 = 0$

ช.ต.พ.

จากนิยาม 1.5.1 จะได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{0} = 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{A}$ และ ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ และ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ แล้ว $\vec{B} = \vec{0}$ และ $\vec{B}\cdot\vec{B} = 0$

นั่นคือ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ 1 เวกเตอร์เป็นศูนย์ หรือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากกัน (orthogonal หรือ perpendicular)

ถ้าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์มีทิศทางเดียวกัน มุม θ จะเท่ากับ 0 จะได้ว่า

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$$

และ $\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right| = |\vec{A}||\vec{B}|$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1.5.1 ให้ $\vec{A} = (-2,1,0)$ และ $\vec{B} = (2,1,1)$ แล้ว จงหา $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{A}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= -4 + 1 + 0 \\ &= -3 \\ \vec{A}\cdot\vec{A} &= 4 + 1 + 0 \\ &= 5 \\ &= |\vec{A}|^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5.2 ให้ $\vec{A} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ และ $\vec{B} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ แล้ว จงหา $\vec{A}\cdot\vec{B}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\cdot(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \\ &= 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 - 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 - \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2 \\ &= 2|\vec{u}_1|^2 - \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 - |\vec{u}_2|^2\end{aligned}$$

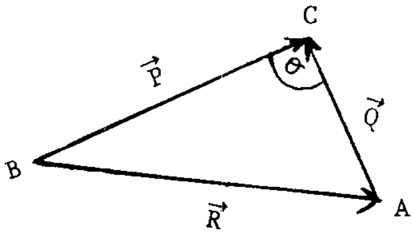
ตัวอย่างที่ 1.5.3 กฎของโคไซน์ (Law of Cosines) สามเหลี่ยม ABC ดังรูป 1.5.1 ให้

$$\vec{P} = \vec{BC}, \quad \vec{Q} = \vec{AC}, \quad \vec{R} = \vec{BA} = \vec{P} - \vec{Q}$$

และ θ = มุม ACB แล้ว

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{P}|^2 - 2|\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta + |\vec{Q}|^2$$

วิธีทำ จากรูป 1.5.1 จะได้ว่า



รูป 1.5.1

$$
\begin{aligned}
|\vec{R}|^2 &= |\vec{P}-\vec{Q}|^2 \\
&= (\vec{P}-\vec{Q})\cdot(\vec{P}-\vec{Q}) \\
&= \vec{P}\cdot\vec{P} - 2\vec{P}\cdot\vec{Q} + \vec{Q}\cdot\vec{Q} \\
&= |\vec{P}|^2 - 2|\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta + |\vec{Q}|^2
\end{aligned}
$$

ตอบ

ให้ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ สเกลาร์โพรเจกชัน (scalar projection) ของ $\vec{A}$ บน (on to) $\vec{B}$ แทนด้วย $P_{\vec{B}}(\vec{A})$ **ซึ่งเป็นสเกลาร์**

$$P_{\vec{B}}(\vec{A}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) \,/\, |\vec{B}|$$

ให้ $\vec{U}_{\vec{B}}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{B}$ เรียก $P_{\vec{B}}(\vec{A})\vec{U}_{\vec{B}}$ ว่า เวกเตอร์โพรเจกชัน (vector projection) ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ และแทนด้วย $\vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A}) &= P_{\vec{B}}(\vec{A})\vec{U}_{\vec{B}} \\
&= \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\left(\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}\right) \\
&= \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \qquad (1.5.3)
\end{aligned}
$$

ถ้า $\vec{A} = \vec{0}$ **จะได้ว่า**

$$P_{\vec{B}}(\vec{0}) = 0 \quad \text{และ} \quad \vec{P}_{\vec{B}}(\vec{0}) = \vec{0}$$

ถ้า $\vec{A} \neq \vec{0}$ จากสมการ (1.5.1) **จะได้ว่า**

$$P_{\vec{B}}(\vec{A}) = |\vec{A}|\cos\theta$$

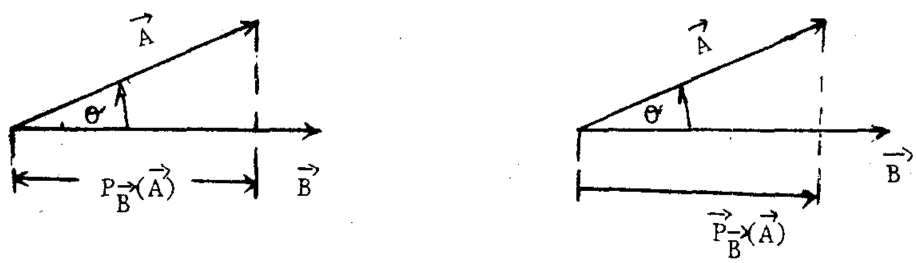
$$\vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A}) = |\vec{A}|\cos\theta\,\vec{U}_{\vec{B}}$$ **เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$**

$P_{\vec{B}}(\vec{A})$ และ $\vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$ ไม่ได้ขึ้นกับความยาวของ $\vec{B}$ แต่ขึ้นอยู่กับทิศทางของ $\vec{B}$ เท่านั้น

ดังรูป 1.5.2

เนื่องจาก
$$\vec{P}_{-\vec{B}}(\vec{A}) = \frac{\vec{A}\cdot(-\vec{B})}{|-\vec{B}|^2}(-\vec{B})$$
$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}(\vec{B})$$
$$= \vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$$

ดังนั้น
$$\vec{P}_{-\vec{B}}(\vec{A}) = \vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$$



รูป1.5.2

ตัวอย่างที่ 1.5.4 ให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น อิสระเชิงเส้น และให้ $\vec{C} = \vec{A} - \vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$ แล้ว $\vec{C}$ **จะเป็น**เวกเตอร์**ที่ไม่ใช่** เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{B}$

วิธีทำ เนื่องจาก ถ้า $\vec{C} = \vec{0}$ แล้วจากสมการ (1.5.3)

$$\vec{0} = 1\vec{A} - \vec{P}_{\vec{B}}(\vec{A})$$
$$= 1\vec{A} - k\vec{B} \text{ เมื่อ } k = (\vec{A}\cdot\vec{B})/|\vec{B}|^2$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น อิสระเชิงเส้น ถ้า $\vec{C} \neq \vec{0}$
จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\vec{C}\cdot\vec{B} &= (\vec{A} - P_{\vec{B}}(\vec{A}))\cdot\vec{B} \\
&= \left(\vec{A} - \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)\cdot\vec{B} \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} - \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{B}\cdot\vec{B})}{|\vec{B}|^2} \\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{B} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ให้ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังรูป 1.5.3

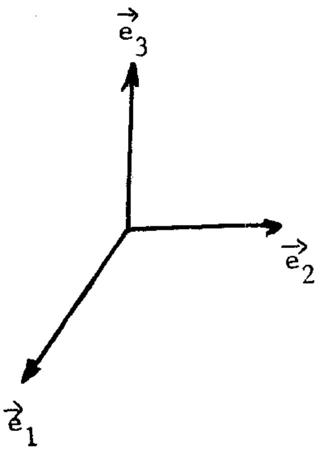
เวกเตอร์เหล่านี้ เป็น อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก ถ้า

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 = \overset{3}{0}$$

แล้ว $0 = \vec{e}_i\cdot\vec{0} = \vec{e}_i\cdot(k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3) = \vec{e}_1\cdot k_i\vec{e}_i = k_i$

หรือ $k_i = 0$ สำหรับ i แต่ละตัว

ดังนั้น $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ทำให้เกิดมูลฐานซึ่งเรียกว่ามูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis)



จะเห็นว่า $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ ก็ต่อเมื่อ

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1$ เวกเตอร์หน่วย

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = 0$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

(Mutually orthogonal)

หรือเขียนสั้น ๆ ว่า

รูป 1.5.3

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i = j \\ 0 & \text{ถ้า } i \neq j \end{cases} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

เรียก δ_{ij} ว่าสัญลักษณ์โครเนกแคร์ (Kronecker symbol)

ให้ $\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}$

ทฤษฎีบทที่ 1.5.2 ให้ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ และให้

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \text{และ}$$

$$\vec{B} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \qquad \text{แล้ว}$$

1. $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$

2. $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

3. $a_i = \vec{A}\cdot\vec{e}_i \qquad (i = 1,2,3)$

พิสูจน์ 1. $\vec{A}\cdot\vec{B} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

$$= a_1b_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + a_2b_1(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)$$

$$+ a_2b_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) + a_3b_1(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2)$$

$$+ a_3b_3(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3)$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

หรือ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\vec{e}_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_ib_j\,\delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

2. $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$

3. $\vec{A}.\vec{e}_i = (\sum_j a_j \vec{e}_j).\vec{e}_i$

$= \sum_j a_j (\vec{e}_j . \vec{e}_i)$

$= \sum_j a_j \delta_{ji}$

$= a_i$ **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 1.5.5 ให้ $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}+\vec{j}- 2\vec{k}$ และ $\vec{C} = -2\vec{j} + \vec{k}$

แล้ว a. $\vec{A}.\vec{B} = 2+0+(-4)$

$= -2$

b. $(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} = (0+0+2)(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$

$= 4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

c. $|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

d. $\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$

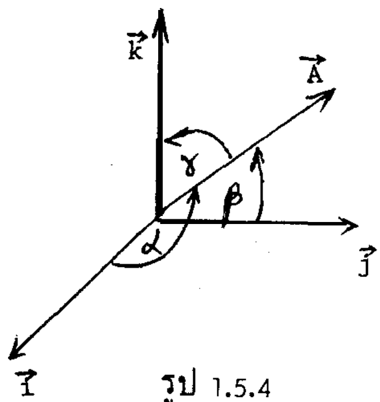
e. $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$

ให้ $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ให้ α, β, γ เป็นมุมดังรูป 1.5.4

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ เรียกว่า โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\vec{A}$

เนื่องจาก $\vec{A}.\vec{i} = |\vec{A}| \cos\alpha$

$= a_1$



$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{A}|}$$
$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{A}|}$$
$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{A}|}$$

รูป 1.5.4

และ $$\vec{U}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{a_1}{|\vec{A}|}\vec{i} + \frac{a_2}{|\vec{A}|}\vec{j} + \frac{a_3}{|\vec{A}|}\vec{k}$$
$$= \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

นั่นคือโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{A}$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{A}$

ทฤษฎีบทที่ 1.5.3 ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะมี c ซึ่งเป็นค่าคงตัวเพียงค่าเดียวเท่านั้น ซึ่งทำให้

$$\vec{B} - c\vec{A} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{A}$$

และ $$c = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}$$

พิสูจน์ $(\vec{B} - c\vec{A})$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ ก็ต่อเมื่อ

$$\vec{A}\cdot(\vec{B} - c\vec{A}) = 0$$

แต่ $$\vec{A}\cdot(\vec{B} - c\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{B} - c\vec{A}\cdot\vec{A}$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{B} - c|\vec{A}|^2 = 0$$

ดังนั้น $$c = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}$$

ข.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.5.6 จงหาเวกเตอร์ที่เป็นผลบวกเชิงเส้นของ

$\vec{A} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{B} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{A}$

วิธีทำ

$$c = \frac{2+6-1}{4+9+1}$$

$$= \frac{7}{14}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ที่ต้องการคือ

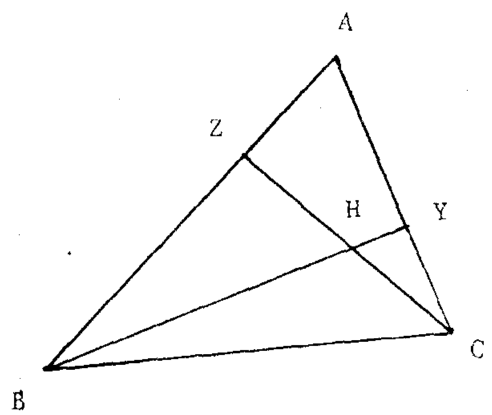
$$\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{2}(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.5.7 จงพิสูจน์ว่า เส้นที่แสดงความสูงของสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ทั้งสามเส้นตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง

พิสูจน์



ในสามเหลี่ยม ABC ลากเส้น BY และ CZ ตั้งฉากกับด้าน AC และ ด้าน AB ตามลำดับ

ให้ $\vec{HA} = \vec{a}$

$\vec{HB} = \vec{b}$

$\vec{HC} = \vec{c}$

เนื่องจาก $\vec{HB}$ ตั้งฉากกับ $\vec{AC}$

ดังนั้น $\vec{HB}.\vec{AC} = 0$

แต่ $\vec{AC} = \vec{HC} - \vec{HA}$

$= \vec{c} - \vec{a}$

$\therefore\ \vec{b}.(\vec{c} - \vec{a}) = 0$

$\vec{b}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{a} = 0$

$\vec{b}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{a}$

และ $\vec{HC}$ ตั้งฉากกับ $\vec{AB}$

ดังนั้น $\vec{c}.\vec{a} = \vec{c}.\vec{b}$

$= \vec{b}.\vec{c}$

$= \vec{b}.\vec{a}$

$\vec{b}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{a} = 0, \quad \vec{a}.(\vec{b} - \vec{c}) = 0$

ดังนั้น $\vec{HA}.\vec{CB} = 0$ **ป.ต.พ.**

หมายเหตุ ถ้า $\vec{c} \neq \vec{0}$ ในสมการ

$$\vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}$$

หรือ $(\vec{a} - \vec{b}).\vec{c} = 0$

สามารถสรุปว่า $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $(\vec{a} - \vec{b})$ ตั้งฉากกับ $\vec{c}$

ไม่สามารถตัด (cancel) $\vec{c}$ ทิ้งไป เพื่อให้ได้ว่า $\vec{a} = \vec{b}$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยที่ $\vec{A} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ และ $\vec{B} = 4\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$

2. จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u} = 3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ และ $\vec{v} = -2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$

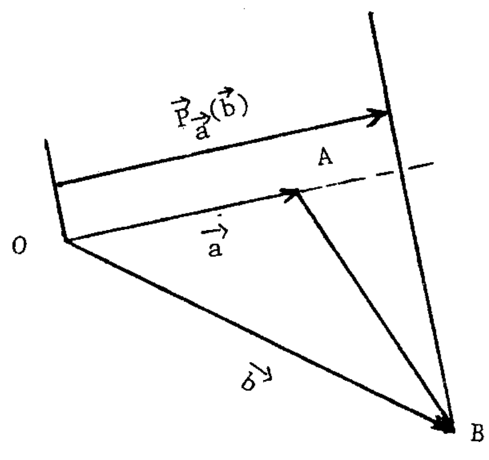
จากข้อ 3 ถึง ข้อ 6 จงหาโคไซน์ของมุมระหว่างเวกเตอร์ A และ B ที่กำหนดให้ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

3. $\vec{A} = 2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$
4. $\vec{A} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$
5. $\vec{A} = 4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$
6. $\vec{A} = -2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$
7. จงเขียน $|3\vec{A}+5\vec{B}|^2$ ในพจน์ของ $|\vec{A}|^2$, $|\vec{B}|^2$ และ $\vec{A}.\vec{B}$
8. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในครึ่งวงกลมเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก
9. จากสามเหลี่ยม OAB ดังรูป ให้ $\vec{a} = \vec{OA}$ และ $\vec{b} = \vec{OB}$ ถ้า $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = 3$ และมุม AOB $= 30^\circ$ จงหา

   ก. $\vec{a}.\vec{b}$

   ข. $P_{\vec{a}}(\vec{b})$

   ค. $\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b})$



10. ให้ $\vec{A} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ และ $\vec{B} = \vec{j}-\vec{k}$ จงหา

ก. $\vec{A}\cdot\vec{B}$

ข. $|\vec{A}|$

ค. $\vec{U}_{\vec{A}}$

ง. $P_{\vec{A}}(\vec{B})$

จ. $\vec{P}_{\vec{A}}(\vec{B})$

ฉ. $\vec{A}\cdot\vec{i}$, $\vec{A}\cdot\vec{j}$, $\vec{A}\cdot\vec{k}$

ช. โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{A}$

จากข้อ 11 ถึงข้อ 14 จงหา $P_{\vec{B}}(\vec{A})$ เมื่อกำหนด $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ให้

11. $\vec{A} = \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$

12. $\vec{A} = -\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{B} = 6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

13. $\vec{A} = 4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$

14. $\vec{A} = -\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$

จากข้อ 15 ถึงข้อ 17 จงหาค่า c ซึ่ง $\vec{B}-c\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และหาค่า h ซึ่ง $\vec{A}-h\vec{B}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

15. $\vec{A} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

16. $\vec{A} = 2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{B} = 7\vec{i}+14\vec{k}$

17. $\vec{A} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{B} = 6\vec{i}+10\vec{j}-3\vec{k}$

18. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว

$|\vec{v}|\,\vec{u} + |\vec{u}|\,\vec{v}$ และ $|\vec{v}|\,\vec{u} - |\vec{u}|\,\vec{v}$ ตั้งฉากกัน

19. ให้ $\vec{A} = x\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{B} = 2\vec{i}-x\vec{j}+\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน จงหาค่า x

20. จงหาค่าของ $(\alpha\vec{A}-\beta\vec{B})\cdot(\gamma\vec{A}-\delta\vec{B})$

1.6 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ (Vector Product of Vectors หรือ Cross Product of Vectors)

ให้
$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ แทนด้วย $\vec{A}\times\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เวกเตอร์ $\vec{n}$ มีทิศทางไปตามระบบมือขวา

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 1.6.1 ให้ $\vec{A} = \vec{i}-\vec{j}$, $\vec{B} = \vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{C} = -2\vec{i}-\vec{k}$ แล้ว

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

ทฤษฎีบทที่ 1.6.1

1. $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

2. ก.) $(\vec{A}\times\vec{B})$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $(\vec{A}\times\vec{B})$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ข.) ถ้า $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{0}$ แล้ว $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A}\times\vec{B})$ เป็น อิสระเชิงเส้น ในระบบมือขวา

พิสูจน์

1. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = (\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})$

$$= \left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]\left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_2b_2a_3b_3-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_2b_2$$

และ $|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-|\vec{A}.\vec{B}|^2 = (\vec{A}.\vec{A})(\vec{B}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{B})$

$$= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$= a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}|\vec{A}\times\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-|\vec{A}.\vec{B}|^2\\ &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\theta\\ &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\sin^2\theta\\ &= (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)^2\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin\theta \geq 0$ สำหรับ $0 \leq \theta \leq \pi$

ดังนั้น $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

2. ก.) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A} = \left[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a$

$$= a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1$$

$$= 0$$

ในทำนองเดียวกัน $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B} = 0$

ดังนั้น $(\vec{A}\times\vec{B})$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $(\vec{A}\times\vec{B})$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ข.) ตัวกำหนด ของ ส่วนประกอบของ $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A}\times\vec{B})$ คือ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$= |\vec{A}\times\vec{B}|^2$$

ถ้า $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{0}$ แล้ว $|\vec{A}\times\vec{B}| > 0$ และ $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A}\times\vec{B})$

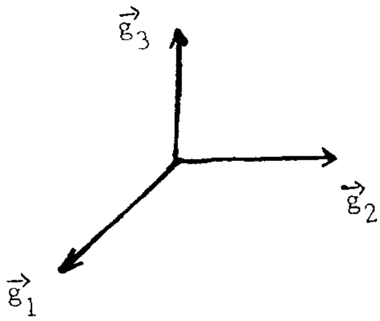
จะเป็น อิสระเชิงเส้น ในระบบมือขวา **ช.ต.พ.**

$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = 0$ **ก็ต่อเมื่อ** $|\vec{A}| = 0$, $|\vec{B}| = 0$, $\theta = 0$ **หรือ** π

ทฤษฎีบทที่ 1.6.2 $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ **ก็ต่อเมื่อ** $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1.6.2 มูลฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ **ดังรูป** 1.6.1 จะได้ว่า

$$\begin{array}{lll}
\vec{g}_1 \times \vec{g}_1 = \vec{0} & \vec{g}_2 \times \vec{g}_1 = -\vec{g}_3 & \vec{g}_3 \times \vec{g}_1 = \vec{g}_2 \\
\vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = \vec{g}_3 & \vec{g}_2 \times \vec{g}_2 = \vec{0} & \vec{g}_3 \times \vec{g}_2 = -\vec{g}_1 \\
\vec{g}_1 \times \vec{g}_3 = -\vec{g}_2 & \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 = \vec{g}_1 & \vec{g}_3 \times \vec{g}_3 = \vec{0}
\end{array}$$



รูป 1.6.1

ทฤษฎีบทที่ 1.6.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ คล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ (Anticommutative law)
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ กฎการกระจาย
3. $(k\vec{A}) \times \vec{B} = k(\vec{A} \times \vec{B})$ (k เป็นสเกลาร์)
4. $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{B} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{C} = c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= -(\vec{B} \times \vec{A})$$

2. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = [a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)]\vec{i}+[a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)]\vec{j}$
$+[a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)]\vec{k}$

$= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}+(a_2c_3-$
$a_3c_2)\vec{i}+(a_3c_1-a_1c_3)\vec{j}+(a_1c_2-a_2c_1)\vec{k}$

$= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

3. $(k\vec{A}) \times \vec{B} = (ka_2b_3-ka_3b_2)\vec{i}+(ka_3b_1-ka_1b_3)\vec{j}+(ka_1b_2-ka_2b_1)\vec{k}$

$= k[(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}]$

$= k(\vec{A} \times \vec{B})$

4.
$$\vec{A} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$= o\vec{i}+o\vec{j}+o\vec{k}$

$= \vec{o}$ **ช.ต.พ.**

ข้อสังเกต ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ไม่เพียงแต่ไม่คล้องตามกฎการสลับที่เท่านั้น ยังไม่คล้องตามกฎการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ

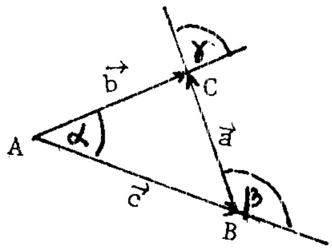
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

จากตัวอย่างที่ 1.6.2 จะเห็นว่า

$$\vec{g}_1\times(\vec{g}_1\times\vec{g}_2) = \vec{g}_1 \times \vec{g}_3$$
$$= -\vec{g}_2$$
$$(\vec{g}_1\times\vec{g}_1) \times \vec{g}_2 = \vec{o} \times \vec{g}_2$$
$$= \vec{o}$$
$$\therefore \vec{g}_1\times(\vec{g}_1\times \vec{g}_2) \neq (\vec{g}_1\times\vec{g}_1) \times \vec{g}_2$$

ตัวอย่างที่ 1.6.3 จากสามเหลี่ยม ABC ดังรูป 1.6.2

ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



รูป 1.6.2

α เป็นมุมระหว่าง $\vec{b}$ และ $\vec{c}$

β เป็นมุมระหว่าง $\vec{c}$ และ $\vec{a}$

γ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

$$\vec{o} = \vec{c} \times \vec{c} = \vec{c} \times (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \vec{c} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\vec{c} \times \vec{b} = (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{b}$$

$$= \vec{b} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}$$

$$= \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{c} \times \vec{b}| = |\vec{c} \times \vec{a}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

$$|\vec{c}||\vec{b}| \sin\alpha = |\vec{c}||\vec{a}| \sin\beta = |\vec{b}||\vec{a}| \sin\gamma$$

ทำให้ได้กฎของไซน์ (sine)

$$\sin\alpha / |\vec{a}| = \sin\beta / |\vec{b}| = \sin\gamma / |\vec{c}|$$

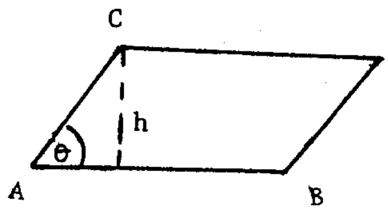
ทฤษฎีบทที่ 1.6.4 สี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี AB และ AC เป็นด้านประชิด

จะมีพื้นที่ $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ และ

พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right|$

พิสูจน์ จากรูป 1.6.3 จะเห็นว่าพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานคือ

$$|\overrightarrow{AB}|\ h = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \sin\theta$$
$$= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$



รูป 1.6.3

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = ครึ่งหนึ่งของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$= \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$ **ช.ต.พ.**

ตัวอย่างที่ 1.6.4 จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ซึ่ง A,B,C มีพิกัดดังนี้

A(−2,1,3), B(1,−1,1), C(3,−2,4)

วิธีทำ

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

จากทฤษฎีบทที่ 1.6.4 จะได้ว่า

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2-6)-\vec{j}(3+10)+\vec{k}(-9+10)$$

$$= -8\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{64 + 169 + 1}$$

$$= \sqrt{234}$$

$$= 3\sqrt{26}$$

$\therefore$ พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = \frac{3}{2}\sqrt{26}$ **ตอบ**

หมายเหตุ ถ้า $\vec{c} \neq \vec{0}$ ในสมการ

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$$

หรือ $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$

สามารถสรุปว่า $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $(\vec{a} - \vec{b})$ ขนานกับ $\vec{c}$

ไม่สามารถตัด $\vec{c}$ ทิ้งไปเพื่อให้ได้ว่า $\vec{a} = \vec{b}$

ตัวอย่างที่ 1.6.5 จงแสดงว่า $\vec{A} /\!/ \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

วิธีทำ ถ้า $\vec{A} /\!/ \vec{B}$ จะมี k ซึ่ง $\vec{B} = k\vec{A}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times k\vec{A}$$

$$= k\vec{A} \times \vec{A}$$

$$= k\,\vec{0}$$

$$= \vec{0}$$

$\therefore$ ถ้า $\vec{A} /\!/ \vec{B}$ แล้ว $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

ถ้า $\vec{A}$ ไม่ขนานกับ $\vec{B}$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$, $0 < \theta < \pi$

แล้ว $|\vec{A}| \neq 0$, $|\vec{B}| \neq 0$ และ $\sin\theta \neq 0$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{n} \\ &\neq \vec{0}\end{aligned}$$

$\because$ ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{A} /\!/ \vec{B}$

ดังนั้น $\vec{A} /\!/ \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ **ตอบ**

1.7 ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3 ชั้น และเวกเตอร์เอกลักษณ์ (Triple Products หรือ Triple Scalar Product หรือ Mixed Product and Vector Identities)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3 ชั้น แทนด้วย

$$\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}$$

หมายถึง ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B} \times \vec{C}$

$$\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(c_3b_1-c_1b_3)+a_3\,(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

จากคุณสมบัติของตัวกำหนด จะได้ว่า

$$\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C} = \vec{C}.\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B}.\vec{C} \times \vec{A} = -(\vec{B}.\vec{A} \times \vec{C})$$

$$= -(\vec{C}.\vec{B} \times \vec{A}) = -(\vec{A}.\vec{C} \times \vec{B})$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}.\vec{C}$$

ดังนั้น จะใช้สัญลักษณ์ $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$ **แทน** ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3 ชั้น นั่นคือ

$$[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = \vec{A}.\vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}.\vec{C}$$

ทฤษฎีบทที่ 1.7.1 $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ **เป็น** ไม่อิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบทที่ 1.7.2

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}).(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\,\vec{C} - [\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\,\vec{D}$$

ตัวอย่างที่ 1.7.1 ให้ $\vec{U} = \vec{C} \times \vec{D}$ แล้ว

$$\vec{A} \times \vec{B}.\vec{U} = \vec{A}.\vec{B} \times \vec{U}$$

$$= \vec{A}.\left[\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})\right]$$

$$= \vec{A}.\left[(\vec{B}.\vec{D})\vec{c} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{D}\right]$$

$$\therefore\ (\vec{A} \times \vec{B}).(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

ตัวอย่างที่ 1.7.2 ให้ $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{C} = -\vec{j} + 2\vec{k}$
จงหา $\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}$

วิธีทำ

$$\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.7.3 จงแสดงว่า $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$

วิธีทำ

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

$$= \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$$

ตัวอย่างที่ 1.7.4 จงพิสูจน์ว่า $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{C} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}) \times \left[(b_2c_3-b_3c_2)\vec{i}+(b_3c_1-c_3b_1)\vec{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\vec{k}\right]$$

$$= (a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3)\vec{i}+(a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2 +a_1b_2c_1)\vec{j}+(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)\vec{k}$$

$$(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} = (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$= (a_1b_1c_1+a_2b_1c_2+a_3b_1c_3)\vec{i}+(a_1b_2c_1+a_2b_2c_2+a_3b_2c_3)\vec{j}$$

$$+(a_1b_3c_1+a_2b_3c_2+a_3b_3c_3)\vec{k}$$

$$(\vec{A}.\vec{B})\vec{C} = (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$= (a_1b_1c_1+a_2b_2c_1+a_3b_3c_1)\vec{i}+(a_1b_1c_2+a_2b_2c_2+a_3b_3c_2)\vec{j}$$

$$+(a_1b_1c_3+a_2b_2c_3+a_3b_3c_3)\vec{k}$$

$$(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C} = (a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_2b_2c_1+a_3b_3c_1)\vec{i}+(a_1b_2c_1+a_3b_2c_3$$

$$-a_1b_1c_2-a_3b_3c_2)\vec{j}+(a_1b_3c_1+a_2b_3c_2-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3)\vec{k}$$

$$= \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

ข.ต.พ.

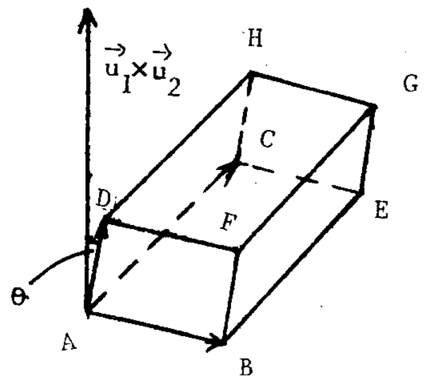
ทฤษฎีบทที่ 1.7.3 สมมติว่า $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ เป็นเวกเตอร์ และจุด A,B,C,D เป็นจุดที่กำหนดให้ โดยที่

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{u}_2, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{u}_3$$

แล้ว

$|(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2).\vec{u}_3|$ คือปริมาตรของ ทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน (parallelepiped)

(ทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน คือ รูปทรงหลายเหลี่ยมซึ่งมี 6 หน้า ซึ่ง หน้าตรงข้ามเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เท่ากัน) ซึ่งมีจุดมุมจุดหนึ่งอยู่ที่ A ดูรูป 1.7.1



รูป 1.7.1

ปริมาตรนี้เท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อจุด A,B,C,D อยู่ในระนาบเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.7.5 ให้ A(3,-1,2), B(1,2,-2), C(2,1,-2) และ D(-1,3,2) จงหาปริมาตรของ ทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมี AB, AC และ AD เป็นขอบ

วิธีทำ

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} = -2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{AC} = -\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{u}_3 = \overrightarrow{AD} = -4\vec{i}+4\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(16)-\vec{j}(-16)+\vec{k}(-4+8)$$

$$= 16\vec{i}+16\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\left| \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) \right| = \left| -32+48-16 \right| = 0$$

นั่นคือ จุด A,B,C,D อยู่บนระนาบเดียวกัน **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.7.6 กำหนดจุด A (3,2,1), B (2,3,−1) และ C (−1,2,3) จงหา

ก. พื้นที่สามเหลี่ยม ABC

ข. ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมี OA, OB และ OC เป็นขอบ

ค. ปริมาตรของทรงสี่หน้า OABC

วิธีทำ ก.

$$\overrightarrow{AB} = (2-3)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(-1-1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-3)\vec{i}+(2-2)\vec{j}+(3-1)\vec{k}$$

$$= -4\vec{i}+2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2)-\vec{j}(-2-8)+\vec{k}(4)$$

$$= 2\vec{i}+10\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+100+16}$$

$$= \sqrt{120}$$

$$= 2\sqrt{30}$$

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{30}$$

$$= \sqrt{30}$$

ตอบ

ข.

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\vec{OA}.\vec{OB} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9+2)-2(6-1)+1(4+3)$$

$$= 33-10+7$$

$$= 30$$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมี OA, OB และ OC เป็นขอบ

คือ $\left|\vec{OA}.\vec{OB} \times \vec{OC}\right| = 30$ **ตอบ**

ค. ปริมาตรของทรงสี่หน้า OABC =(1/6) ของปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

ซึ่งมี OA, OB และ OC เป็นขอบ $= \frac{1}{6} \times 30 = 5$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด 1.6

1. ให้ $\vec{A} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{C} = \vec{j}+2\vec{k}$ จงหา

   ก. $\vec{A} \times \vec{B}$

   ข. $\vec{B} \times \vec{A}$

   ค. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

   ง. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

   จ. $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$

   ฉ. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) - \vec{A} \times \vec{B} - \vec{A} \times \vec{C}$

2. ให้ $\vec{A} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{C} = \vec{j}+\vec{k}$ จงหา

   ก. $\vec{A} \times \vec{B}$

   ข. $\vec{B} \times \vec{A}$

   ค. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

3. จงหาเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{A} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{B} = -\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

4. จากข้อ 2 จงหา $\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}$

จากข้อ 5 ถึงข้อ 7 จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

5. A(1,-2,3), B(3,1,2), C(2,3,-1)

6. A(3,2,- 2), B(4,1,2), C(1,2,3)

7. A(1,-2,3), B(2,-1,1), C(4,2,-1)

จากข้อ 8 ถึงข้อ 10 จงหา $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ โดยตรง และโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1.7.2

8. $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}, \quad \vec{w} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

9. $\vec{u} = \vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}, \quad \vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}, \quad \vec{w} = 3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

10. $\vec{u} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}, \quad \vec{w} = 3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

จากข้อ 11 ถึง ข้อ 14 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมี AB, AC และ AD เป็นขอบ โดยกำหนดพิกัดของจุด A,B,C,D ให้

11. A(2,-1,3), B(-1,2,2), C(1,0,1), D(4,1,-1)

12. A(3,1,-2), B(1,2,1), C(2,-1,3), D(4,3,-7)

13. A(1,2,-3), B(3,1,-2), C(-1,3,1), D(-3,4,3)

14. A(-1,-2,2), B(2,-1,1), C(0,1,3), D(3,2,-1)

15. จงแสดงว่า สำหรับ $\vec{v}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะคล้องตามเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\vec{i} \times (\vec{v}\times\vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{v}\times\vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{v} \times\vec{k}) = 2\vec{v}$$

16. ถ้า $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงแสดงว่า

$$\left[\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\right] + \left[\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u})\right] + \left[\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})\right] = \vec{0}$$

17. จงแสดงว่าสำหรับ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะได้ว่า

ก. $(\vec{u} \pm \vec{v}) . \left[(\vec{u}+\vec{v}) \times (\vec{u}-\vec{v})\right] = 0$

ข. $(\vec{u} + \vec{v}) . \left[(\vec{u} \times \vec{w}) \times (\vec{u} + \vec{v})\right] = 0$

18. จงพิสูจน์ว่า

$$(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{B} \times \vec{C}) . (\vec{A} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{A}) . (\vec{B} \times \vec{D}) = 0$$

19. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ อยู่บนระนาบที่ตั้งฉากกับ ระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{C}$ และ $\vec{D}$ แล้ว

$$(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$$

20. จงพิสูจน์ว่า $[\vec{a} \times \vec{b}] . ([\vec{b} \times \vec{c}] \times [\vec{c} \times \vec{a}]) = (\vec{a} . \vec{b} \times \vec{c})^2$

21. จงแสดงว่า $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น และเขียน $\vec{d}$ ในพจน์ของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ซึ่งเป็น อิสระเชิงเส้น โดยการ กระจาย $[\vec{a} \times \vec{b}] \times [\vec{c} \times \vec{d}]$ ออกเป็น 2 แบบ

22. จงพิสูจน์ว่า

$$\vec{p}(\vec{q} . \vec{r} \times \vec{s}) - \vec{q}(\vec{r} . \vec{s} \times \vec{p}) + \vec{r}(\vec{s} . \vec{p} \times \vec{q}) - \vec{s}(\vec{p} . \vec{q} \times \vec{r}) = \vec{0}$$

23. จงพิสูจน์ว่า

$$\vec{p} \times \left[(\vec{a} \times \vec{q}) \times (\vec{b} \times \vec{r})\right] + \vec{q} \times \left[(\vec{a} \times \vec{r}) \times (\vec{b} \times \vec{p})\right] +$$
$$\vec{r} \times \left[(\vec{a} \times \vec{p}) \times (\vec{b} \times \vec{q})\right] = \vec{0}$$

24. จงแสดงว่า

$$[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = [\vec{B}\vec{C}\vec{A}] = [\vec{C}\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{A}\vec{C}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}\vec{C}] = -[\vec{C}\vec{B}\vec{A}]$$

1.8 สูตรบางสูตรทางเรขาคณิตวิเคราะห์ในรูปแบบเวกเตอร์ (Some Formulas of Analytic Geometry in Vectorial Form)

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector) คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด

เลือกจุดกำเนิด O จุด P จะสมนัยกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

สูตรต่าง ๆ ทางเรขาคณิตวิเคราะห์ สามารถเขียนในพจน์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง

1.8.1 สูตรระยะทาง d ระหว่างจุด P และ Q ซึ่งมี $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของ P และ Q ตามลำดับ

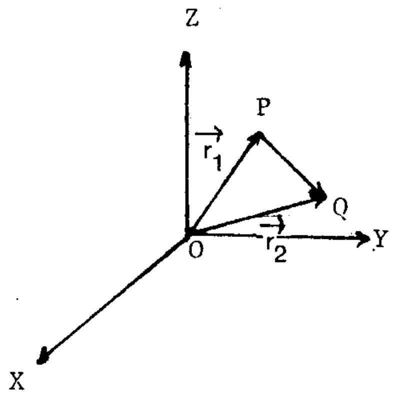
$$d = \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|$$

โดยมี

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OQ}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{PQ}$$



1.8.2 สมการระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$ และผ่านจุด P_o ซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}_o$ คือ

$$(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{N} = 0$$

เมื่อ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P ใด ๆ บนระนาบ

สมการ $(\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{N} = 0$ ได้จากความจริงที่ว่า เซกเมนต์ $\vec{P_oP}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$

1.8.3. สมการระนาบที่ผ่านจุด P_o และขนานกับ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ซึ่งเป็น เวกเตอร์อิสระเชิงเส้น

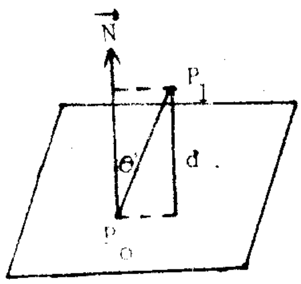
คือ

$$(\vec{r}-\vec{r}_o).(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

$\because$ $\vec{a}\times\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ

1.8.4. ระยะทางระหว่างจุด P_1 กับระนาบที่มีสมการเป็น $(\vec{r}-\vec{r}_o).\vec{N} = 0$ คือ

$$d = \frac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_o).\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$



จากผลคูณเชิงสเกลาร์ จะได้ว่า

$(\vec{r}_1-\vec{r}_o).\vec{N} = |\overrightarrow{P_oP_1}||\vec{N}|\cos\theta$,

θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{P_oP_1}$ กับ $\vec{N}$,

$\overrightarrow{P_oP_1} = \vec{r}_1-\vec{r}_o$

$\because$ $\cos\theta = d/|\overrightarrow{P_oP_1}|$

$\therefore$ $d = |\overrightarrow{P_oP_1}|\cos\theta$

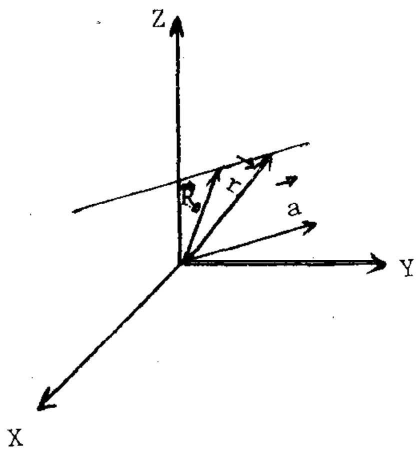
$= \dfrac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_o).\vec{N}|}{|\vec{N}|}$

1.8:5. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{a}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$ คือ

$$(\vec{r}-\vec{r}_o)\times\vec{a} = \vec{0}$$

หรือสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{a}$

$\because$ $(\vec{r}-\vec{r}_o) // \vec{a}$ จะได้ว่า



$$\vec{r}-\vec{r}_o = t\vec{a}, \quad t \text{ เป็นสเกลาร์}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{a}$$

ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_o และขนานกับ $\vec{a}$ คือ

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{a}$$

1.8.6. สมการของทรงกลมซึ่งมีรัศมียาวเท่ากับ a และจุดศูนย์กลางที่ P_0 คือ

$$|\vec{r}-\vec{r}_o| = a$$

หรือ $$(\vec{r}-\vec{r}_o)^2 = a^2$$

เมื่อ a เป็นสเกลาร์ และ $\vec{r}_o$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของ P_o

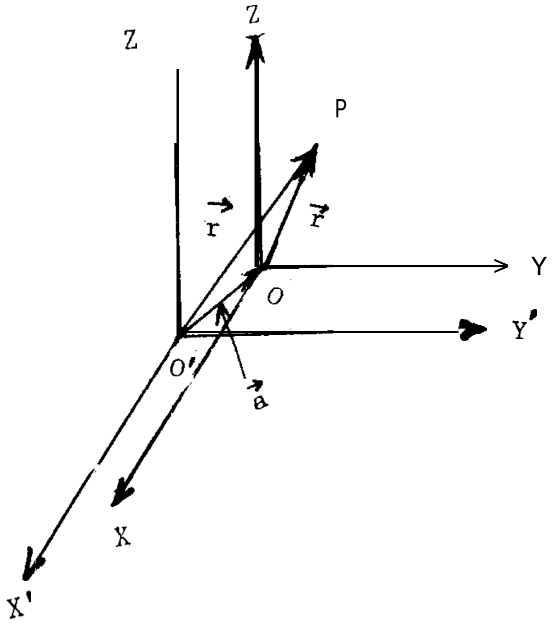
การเปลี่ยนจุดกำเนิดจาก o เป็น o' ทำให้เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดต่าง ๆ เปลี่ยนไปด้วย

ถ้าให้ $\overrightarrow{O'O} = \vec{a}$

จะได้ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งใหม่ $(\vec{r}')$ กับเวกเตอร์บอกตำแหน่งเดิม $(\vec{r})$ ของจุด P ดังนี้

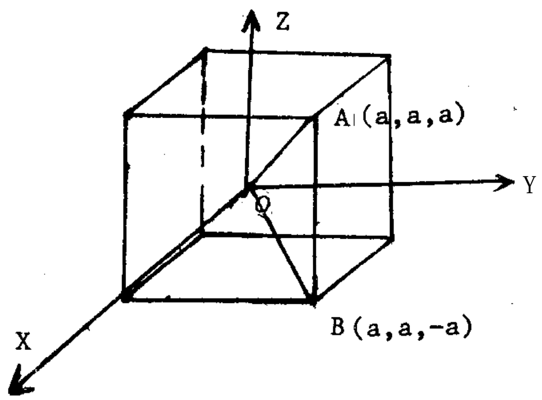
$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

หรือ $$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{a}$$



ตัวอย่างที่ 1.8.1 จงพิสูจน์ว่า มุมαซึ่งเป็นมุมระหว่างเส้นทแยงมุม 2 สองเส้นใด ๆ ของลูกบาศก์ลูกหนึ่ง ถูกกำหนดโดย $\cos\alpha = 1/3$

พิสูจน์ ถ้าจุดศูนย์กลางของลูกบาศก์ อยู่ที่จุดกำหนดและขอบของลูกบาศก์ขนานกับแกนพิกัด ให้ A,B เป็นจุดมุม 2 จุด ของลูกบาศก์ ซึ่งมีพิกัดคือ A(a,a,a) และ B(a,a,-a) โดยที่ความยาวของขอบลูกบาศก์นี้ยาว = 2a ดังรูป



$$\vec{OA} = a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}$$

$$\vec{OB} = a\vec{i}+a\vec{j}-a\vec{k}$$

$$\vec{OA}.\vec{OA} = a^2+a^2+a^2 = 3a^2$$

$$\vec{OB}.\vec{OB} = a^2+a^2+(-a)^2 = 3a^2$$

$$\vec{OA}.\vec{OB} = |\vec{OA}|\,|\vec{OB}|\cos\alpha$$

$$= 3a^2\cos\alpha$$

และ $\vec{OA}.\vec{OB} = a^2+a^2-a^2$

$$= a^2$$

ดังนั้น $3a^2\cos\alpha = a^2$

$$\cos\alpha = \frac{}{3}$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.8.2 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(2,3,-5)$, $P_2(3,4,7)$ กับ ระนาบ $x+2y-2z = 9$

วิธีทำ จากสมการระนาบ $x+2y-2z = 9$ จะเห็นว่าจุด $(9,0,0)$ อยู่บนระนาบ

ดังนั้น

$$\vec{r}_o = 9\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$$

$$\vec{r}_1-\vec{r}_o = -7\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$$

$$\vec{N} = \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

จากสูตร

$$d = \frac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_o).\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่าง จุด $P_1(2,3,-5)$ กับระนาบที่กำหนดให้

คือ $$\frac{|(-7\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}).(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})|}{3}$$

$$= \frac{|-7+6+10|}{3} = 3$$

$$\vec{r}_2 = 3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\vec{r}_2-\vec{r}_o = -6\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_2(3,4,7)$ กับระนาบที่กำหนดให้

คือ $$\frac{|(-6\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}).(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})|}{3}$$

$$= \frac{|-6+8-14|}{3}$$

4 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.8.3 จงหาระยะทางระหว่างจุด P(2,-1,3) กับเส้นที่เชื่อมจุด A(-7,-2,7) และ B(1,2,5)

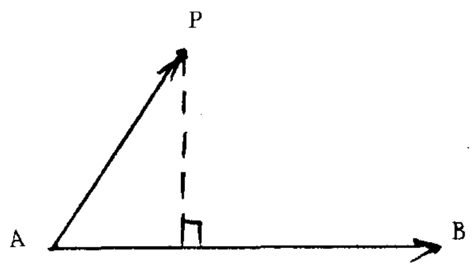
วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 1.6.4 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ

$$|\vec{AB}|\ h = |\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta$$

$$= |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$h = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$$

ในที่นี้สมมติว่าเขียนรูปได้ดังนี้



$$\vec{AP} = (2+7)\vec{i}+(-1+2)\vec{j}+(3-7)\vec{k}$$
$$= 9\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$$
$$\vec{AB} = (1+7)\vec{i}+(2+2)\vec{j}+(5-7)\vec{k}$$
$$= 8\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{64+16+4}$$
$$= \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่าง P และเส้นที่เชื่อมจุด A และ B คือ

$$h = \frac{|\vec{AP} \times \vec{AB}|}{|\vec{AB}|}$$

$$\vec{AP} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 3 & \vec{k} \\ 9 & 1 & -4 \\ 8 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(-2+16)-\vec{j}(-18+32)+\vec{k}(36-8)$$
$$= 14\vec{i}-14\vec{j}+28\vec{k}$$
$$= 14(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$$
$$|\vec{AP} \times \vec{AB}| = 14\sqrt{1+1+4}$$
$$= 14\sqrt{6}$$
$$h = 14\sqrt{6}/2\sqrt{21}$$
$$= \sqrt{14}$$

ตอบ

1.8.7 ระยะทางระหว่างเส้นตรง 2 เส้น

ถ้าเส้นตรง 2 เส้นที่ไม่ขนานกัน ซึ่งถูกกำหนดโดย A, B, C, D เราสามารถหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้ง 2 นี้ได้ดังนี้

$\vec{AB} \times \vec{CD}$ ตั้งฉากกับเส้นตรงทั้ง 2

ให้ $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{CD}$

ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จากเส้นหนึ่งไปยังอีกเส้นหนึ่ง เช่น $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ หรือ $\vec{BD}$

จะได้ว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้ง 2 คือ d โดยที่

$$d = \frac{|\vec{N}\cdot\vec{u}|}{|\vec{N}|}$$

ตัวอย่างที่ 1.8.4 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรง 2 เส้น คือ AB และ CD โดยที่พิกัดของ A,B,C และ D คือ (-16,6,4), (-1,2,3) , (1,-1,3) และ (4,9,7) ตามลำดับ

วิธีทำ

$$\vec{AB} = (-1+16)\vec{i}+(2-6)\vec{j}+(-3-4)\vec{k}$$
$$= 15\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$$
$$\vec{CD} = (4-1)\vec{i}+(9+1)\vec{j}+(7-3)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i}+10\vec{j}+4\vec{k}$$
$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 15 & -4 & -7 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(-16+70)-\vec{j}(60+21)+\vec{k}(150+12)$$
$$= 54\vec{i}-81\vec{j}+162\vec{k}$$
$$= 27(2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})$$
$$|\vec{N}| = 27\sqrt{4+9+36}$$
$$= 189$$

$$\overrightarrow{AC} = 17\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = 20\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = 5\vec{i}+7\vec{j}+10\vec{k}$$

ระยะทางที่ต้องการคือ $$d = \frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{N}|}$$

$$= \frac{27}{189}(34+21-6)$$

$$= 7$$

หรือ $$d = \frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\vec{N}|}$$

$$= \frac{27}{189}(40 - 9 + 18)$$

$$= 7$$

หรือ $$d = \frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\vec{N}|}$$

$$= \frac{27}{189}(4+9+36)$$

$$= 7$$

หรือ $$d = \frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\vec{N}|}$$

$$= \frac{27}{189}(10-21+60)$$

$$= 7$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.7

1. ให้ $\vec{A} = (2,1,-3)$, $\vec{B} = (1,0,1)$, $\vec{C} = (0,-1,3)$ จงหา

   ก. เส้นที่ผ่านจุด A และ ขนานกับ $\vec{B}$

   ข. เส้นที่ผ่านจุด B และจุด C

   ค. ระนาบที่ผ่านจุด B และตั้งฉากกับ $\vec{A}$

   ง. ระนาบที่ผ่านจุด C และขนานกับ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

   จ. ทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A และรัศมี = 2

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด P(2,1,-3) และขนานกับ $\vec{v} = 3\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$

3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A(1,-4,0) และตั้งฉากกับระนาบที่เกิดจากการตัดกันของเวกเตอร์ $\vec{v} = \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w} = 3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

จากข้อ 4 ถึงข้อ 7 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุดที่กำหนดให้โดยใช้วิธีการของเวกเตอร์

4. A(1,-2,3), B(3,1,2), C(2,3,-1)

5 A(-1 ,1,2), B(1,-2,1), C(2,2,4)

6 A(2,-1,1), B(3,2,-1), C(-1,3,2)

7. A(-2,3,1), B(4,2,-2), C(2,0,1)

8. สมมติให้

$$\vec{A} = p\vec{i} + q\vec{j}$$
$$\vec{B} = s\vec{i} + t\vec{j}$$
$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{R}_o = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}$$
$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

จงคำนวณสูตรต่อไปนี้

ก. $\vec{R} - \vec{R}_o = \vec{A}$

ข. $(\vec{R} - \vec{R}_o)^2$

ค. $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = (|\vec{A}||\vec{B}|)^2$

ง. $\vec{R}.\vec{N} = -D$

9. จงหาระยะทางระหว่างจุด P(2,5,2) กับระนาบที่เกิดจากจุด A(1,0,-2), B(2,8,1) และ C(-1,4,7)

10. จงหาระยะทางจากจุด P(1,-2,1) ไปยังระนาบที่ผ่านจุด A(2,4,1), B(-1,0,1) และ C(-1,4,2)

11. จงหาระยะทางระหว่างจุด P(3,1,-1) กับเส้นที่เชื่อมจุด A(2,3,0) และ B(-1,2,4)

12. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรง 2 เส้น คือ AB และ CD โดยที่ A,B,C,D มีพิกัดดังนี้ A(1,-2,-1), B(4,0,-3), C(1,2,-1) , D(2,-4,-5)

13. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้น AB, CD โดยที่ A(1,2,3), B(-1,0,2), C(0,1,7) และ D(2,0,5)

14. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด A(1,-1,0) และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 1 - t, \quad y = 1+t, \quad z = 3$

15. จงหาสมการของเส้นซึ่งเกิดจากการตัดกันของระนาบ

$3x-2y+z = 5$ และ $2x+3y-z = -1$