บทที่ 9
ปริภูมิเวกเตอร์
Vector spaces

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาปริภูมิเวกเตอร์เพียงย่อ ๆ เฉพาะในส่วนที่จำเป็นจะต้องนำมาใช้กับทฤษฎีเกี่ยวกับสนาม

9.1 นิยามและคุณสมบัติเบื้องต้น

(Definition and elementary properties)

นักศึกษาคงคุ้นเคยกับพจน์ เวกเตอร์ และสเกลาซ์ (scalar) จากวิชาแคลคูลัสมาแล้ว ในที่นี้เราจะให้สเกลาร์เป็นสมาชิกของสนามใด ๆ ไม่ใช่เป็นเพียงจำนวนจริงใด ๆ และสร้างทฤษฎีจากสัจจพจน์ (axiom)

นิยาม

ปริภูมิเวกเตอร์ประกอบด้วยกลุ่มอาบีเลียน V ภายใต้การบวก และสนาม F พร้อมด้วยการดำเนินการของการคูณสเกลาร์ของแต่ละสมาชิกของ V ด้วยแต่ละสมาชิกของ F (คูณทางซ้าย) ซึ่งสำหรับทุก $a, b \in F$ และ $\alpha, \beta \in V$ เงื่อนไขต่อไปนี้สอดคล้อง

1. $a\alpha \in V$
2. $a(b\alpha) = (ab)\alpha$
3. $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$
4. $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$
5. $1\alpha = \alpha$

สมาชิกของ V คือ เวกเตอร์ และสมาชิกของ F คือ สเกลาร์

เราอาจจะกล่าวอย่างไม่ถูกต้องนักว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือ F (V is a vector space over F)

ขอให้สังเกตว่า การคูณสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต มันค่อนข้างหรือน่าจะเป็น กฎ (rule) ซึ่งแสดงการเกี่ยวข้อง (จับคู่) สมาชิก $a\alpha \in V$ กับแต่ละคู่อันดับ (a, α) ซึ่ง $a \in F$ และ $\alpha \in V$ เราอาจพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันจาก $F \times V$ ไปยัง V

ทั้งเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ V คือ เวกเตอร์ 0 และเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ F คือ สเกลาร์ 0 เราจะเขียนแทนด้วย 0 ทั้งคู่

ตัวอย่าง 9.1.1 พิจารณากลุ่มอาบีเลียน $(R^n, +) = R \times R \times \times R$ ทั้งหมด n แฟคเตอร์ (นั่นคือ R^n เป็นเซตของ ordered n typles)

กำหนดการบวกบน R^n โดย

$(a_1, a_2, \ldots . a_n) + (b_1 > b_2, \ldots . b_n) = (a_1 + b_1 + \ldots + a_n + b_n)$

$\forall (a_1, a_2, \ldots . a_n), (b_1, b_2, \ldots . b_n) \in R^n$

และกำหนดการคูณสเกลาร์ใน R โดย

$r\alpha = (ra_1, ra_2, \ldots ra_n)$ สำหรับ $r \in R$, และ $a = (a_1, a_2, \ldots . a,) \in R''$

แล้ว R^n เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือ R

ตัวอย่าง 9.1.2 สำหรับสนาม F, F[x] ใด ๆ สามารถจะเป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือ F ได้ โดยที่การบวกของเวกเตอร์ คือ การบวกพหุนามธรรมดา ใน F[x] และการคูณสเกลาร์กับสมาชิก F[x] คือ การคูณธรรมดา

ตัวอย่าง 9.1.3 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F แล้ว E เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือ F โดยที่การบวกเวกเตอร์ คือ การบวกทั่ว ๆ ไปใน E และการคูณสเกลาร์ คือ การคูณของสนามใน E โดยที่ $a \in F$ และ $\alpha \in E$

ทฤษฎี 9.1.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือ F แล้ว $0\alpha = 0$, $a0 = 0$ และ $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$ สำหรับทุก ๆ $a \in F$, $\alpha \in V$

พิสูจน์

สมการ $0\alpha = 0$ อ่านว่า "(สเกลาร์ 0)α = เวกเตอร์ 0"

และสมการ $a0 = 0$ อ่านว่า "a (เวกเตอร์ 0) = เวกเตอร์ 0"

$$(0\alpha) = (0 + 0)\alpha = (0\alpha) + (0\alpha)$$

โดยกฎการตัดออก ซึ่งเป็นจริงในกลุ่มอาบีเลียน (V, +) เราได้

$$0 = 0\alpha$$

และจาก $a0 = a(0 + 0)$

$= a0 + a0$

$\therefore \quad a0 = 0$

$\therefore \quad 0 = 0\alpha$

$= (a + (-a))\alpha$

$= a\alpha + (-a)\alpha$

$\therefore \quad (-a)\alpha = -(a\alpha)$

และ $0 = a0 = a(\alpha + (-\alpha))$

$$= a\alpha + a(\ -a)$$

$$a(-\alpha) = \quad (a\alpha)$$

$$\therefore (-a)\alpha = a(-a) = -(a\alpha)$$ #

9.2 อิสระต่อกันในตัวเองและฐาน

(Linear independence and bases)

นิยาม

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F, เวกเตอร์ในเซตย่อย

$S = \{\alpha_i | i \in I\}$ ของ V ก่อกำเนิด (span or generate) V

ถ้า สำหรับทุก ๆ $\beta \in V$ เรามี

$$\beta = a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \dots + a_n\alpha_{i_n}$$

สำหรับบาง $a_j \in F$ และ $\alpha_{ij} \in S_j = 1, 2, \dots, n$

เวกเตอร์ $\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{i_j}$ เรียกว่า ผลบวกเชิงเส้น (linear combination of the) ของ α_{i_j}

ตัวอย่าง 9.2.1 ในปริภูมิเวกเตอร์ R^n เหนือ R ของตัวอย่าง 9.1.1

เวกเตอร์ $(1,0,\dots.0),(0,1,0,\dots.0),\dots.(0,0,\dots.1)$

ก่อกำเนิด (span) R^n สำหรับ

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1(1, 0, 0, \dots. 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1)$$

ตัวอย่าง 9.2.2 **จากตัวอย่าง 9.1.2** เอกนาม x^m สำหรับ $m \geqslant 0$ ก่อกำเนิด (span) $F[x]$ เหนือ F

ตัวอย่าง 9.2.3 ให้ F เป็นสนาม และ E เป็นสนามภาคยืดขยายของ F
ให้ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F แล้ว $F(\alpha)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F
และโดยทฤษฎี 8.4.1 $F(\alpha)$ ก่อกำเนิดโดยเวกเตอร์ใน $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$
โดยที่ $n = \deg(\alpha, F)$

นิยาม

ปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือสนาม F จะเรียกว่า มิติจำกัด (finite dimensional) ถ้ามีเซตย่อยที่เป็นเซตจำกัดของ V ซึ่งเวกเตอร์ของมันก่อกำเนิด (span) V

ตัวอย่าง 9.2.4 จากตัวอย่าง 9.2.1 แสดงว่า R^n เป็นมิติจำกัด

ตัวอย่าง 9.2.5 จากตัวอย่าง 9.2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ $F[x]$ เหนือ F ไม่ใช่มิติจำกัด เพราะพหุนามลำดับขั้นมาก ๆ ไม่สามารถจะเป็นผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของสมาชิกของเซตจำกัดใด ๆ ของพหุนาม

ตัวอย่าง 9.2.6 ถ้า $F \leqslant E$ และ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือสนาม F จากตัวอย่าง 9.2.3 แสดงว่า $F(\alpha)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด เหนือ F

นิยาม เวกเตอร์ในเซตย่อย $S = \{\alpha_i | i \in I\}$ ของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือสนาม F เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent) เหนือ F

ดังนั้น เวกเตอร์ใน $\{\alpha_i | i \in I\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเองเหนือ F ถ้าวิธีที่เวกเตอร์ 0 สามารถเขียน (จัดรูป) ได้เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ α_i คือ มีสเกลาร์สัมประสิทธิ์ทั้งหมดเท่ากับ 0 วิธีเดียว

ถ้าเวกเตอร์เป็นอิสระต่อกันในตัวเองเหนือ F แล้วจะมี $\alpha_j \in F$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ $\ni \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_{i_j} = 0$ โดยที่ไม่ใช่ทั้งหมด $a_j = 0$

ตัวอย่าง 9.2.7 เป็นที่กระจ่างชัดว่า เวกเตอร์ของเซตของเวกเตอร์ที่ก่อกำเนิดปริภูมิ R^n ตามตัวอย่าง 9.2.1 เป็นอิสระต่อกันในตัวเองเหนือ R ทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ใน $\{x^m | m \geqslant 0\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเองของ $F[x]$ เหนือ F
ขอให้สังเกต $(1, -1) + (2, 1) + 3(-3, 2) = (0, 0) = 0$

ตัวอย่าง 9.2.8 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และให้ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F ถ้า $\deg(\alpha, F) = n$ แล้ว ทุก ๆ สมาชิกของ $F(\alpha)$ สามารถเขียนได้ (อย่าง unique) ในรูป $b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$ สำหรับ $b_i \in F$ ในกรณีเฉพาะ, $0 = 0 + 0\alpha + \ldots + 0\alpha^{n-1}$ จะต้อง (unique) มีรูปแบบเดียวสำหรับ 0ดังนั้นสมาชิก $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ อิสระต่อกันในตัวเอง ใน $F(\alpha)$ เหนือสนาม F และเวกเตอร์เหล่านั้นก่อกำเนิด (span) $F(\alpha)$

นิยาม ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม F, เวกเตอร์ในเซตย่อย $B = \{\beta_i | i \in I\}$ ของ V จะเป็นฐาน (Basis) สำหรับ V เหนือ F ถ้า B ก่อกำเนิด (span) V และเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

ตัวอย่าง 9.2.9 $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ ตามตัวอย่าง 9.2.8 เป็นฐาน (basis) ของ $F(\alpha)$ เหนือ F เพราะ $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และขณะเดียวกันมันก่อกำเนิด (span) $F(\alpha)$

9.3 มิติ

(Dimension)

หัวข้อต่อไปที่เราจะดูกัน คือ เราต้องการจะพิสูจน์ว่า ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์ที่เป็นมิติจำกัดมีฐาน และสำหรับฐาน 2 ฐานใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด จะต้องมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

ทฤษฎี 9.3.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือสนาม F และให้ $\alpha \in V$ ถ้า α เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ β_i สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ และแต่ละ β_i ผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ γ_j สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว α เป็นผลบวกเชิงเส้นของ γ_j

พิสูจน์

ให้ $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i\beta_i$ และให้ $\beta_i = \sum_{i=1}^{n} b_{i_j}\gamma_i$ โดยที่ $a_i, b_{i_j} \in F$

$$\therefore \quad \alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{i_j}\gamma_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_{i_j} \right) \gamma_j$$

และ $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_{i_j} \right) \in F$ #

ทฤษฎี 9.3.2 ในปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด ทุก ๆ เซตจำกัดของเวกเตอร์ที่ก่อกำเนิดปริภูมิ ประกอบด้วยเซตย่อยซึ่งเป็นฐาน

พิสูจน์

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด เหนือ F

ให้เวกเตอร์ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ ก่อกำเนิด (span) V

เราจะจัด α_i ให้เป็นแถว เริ่มจากทางซ้ายมือด้วย $i = 1$ และปลด α_j ตัวแรก ซึ่งเป็นผลบวกเชิงเส้นของ α_i สำหรับ $i < j$

ทำเช่นนี้ต่อไปอีกโดยเริ่มที่ α_{j+1} และปลด α_k ซึ่งเป็นผลบวกเชิงเส้นของ α_i ตัวที่เหลือ ทำไปเรื่อยจนกระทั่งถึง α_n (หลังจากทำไปเป็นจำนวนจำกัดขั้น (finite steps))

α_i เหล่านั้นซึ่งอยู่ในบัญชี (list) ของเราจะไม่มีตัวไหนเป็นผลบวกเชิงเส้นของ α_i ตัวที่มาก่อนในบัญชี (reduced list) ของเรา

โดยทฤษฎี 9.3.1 แสดงว่า เวกเตอร์ซึ่งเป็นผลบวกเชิงเส้นของเซตดั้งเดิมของ α_i ยังคงเป็นผลบวกเชิงเส้นของเซตที่ลดทอนและเป็นไปได้ที่จะเล็กกว่า ซึ่งไม่มี α_i ผลบวกเชิงเส้นของตัวที่มาก่อนมัน

ดังนั้นเวกเตอร์ในเซตลดทอนของ α_i ก่อกำเนิด (span) V อีกครั้ง

สำหรับเซตลดทอนนั้น ถ้า

$$a_1\alpha_{i_1} + \ldots - a_r a_{i_r} = 0$$

สำหรับ $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ และสำหรับบาง $a_j \neq 0$ เราอาจสมมติจากทฤษฎี 9.1.1 ว่า $a_r \neq 0$ หรือเราอาจทิ้ง (drop) $a_r a_{i_r}$ จากด้านซ้ายของสมการแล้วใช้ทฤษฎี 9.1.1 อีกครั้งเราจะได้

$$\alpha_{i_r} = \left(-\frac{a_1}{a_r}\right)\alpha_{i_1} + \ldots + \left(-\frac{a_{r-1}}{a_r}\right)\alpha_{i_{r-1}}$$

ซึ่งแสดงว่า α_{i_r} เป็นผลบวกเชิงเส้นของ α ตัวก่อนมัน ซึ่งขัดแย้งกับการสร้าง α_i

ดังนั้น เวกเตอร์ α_i ในเซตลดทอนต้องทั้งก่อกำเนิด V และอิสระต่อกันในตัวเองด้วย

ดังนั้น α_i เป็นฐานของ V เหนือ F #

บทแทรก **ปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด มีฐานจำนวนจำกัด**

พิสูจน์

โดยนิยาม ปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด มีเซตของเวกเตอร์ที่ก่อกำเนิดปริภูมิเป็นจำนวนจำกัด โดยทฤษฎี 9.3.2 ทำให้ได้ว่า ปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด ต้องมีฐานจำนวนจำกัด #

ทฤษฎี 9.3.3 ให้ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ เป็นเซตจำกัดของปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด และอิสระต่อกันในตัวเอง เหนือสนาม F แล้ว สามารถขยาย S ออกเป็นฐานสำหรับ V เหนือ F และถ้า $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ เป็นฐานใด ๆ สำหรับ V เหนือ F แล้ว $r \leqslant n$

พิสูจน์

โดยบทแทรกของทฤษฎี 9.3.2 ได้ว่า

มีฐาน $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ สำหรับ V เหนือ F

พิจารณาลำดับจำกัดของเวกเตอร์

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_n$

เวกเตอร์เหล่านี้ก่อกำเนิด V เนื่องจาก B เป็นฐาน

ใช้เทคนิคเดียวกับที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎี 9.3.2 ในการปลดแต่ละเวกเตอร์ ซึ่งเป็นผลบวกของเวกเตอร์ตัวที่มาก่อนมัน โดยทำจากซ้ายไปขวา เราจะได้ (มาถึง) ฐานของ V

แน่นอนว่าไม่มี α_i ถูกทิ้ง เนื่องจาก α_i เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

ดังนั้น สามารถขยาย S ขึ้นไปเป็นฐานสำหรับ V เหนือ F

สำหรับส่วนที่สองของผลสรุป พิจารณาลำดับ

$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$

เวกเตอร์เหล่านี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เหนือ F, เพราะว่า α_1 เป็นผลบวกเชิงเส้น

$\therefore\ \alpha_1 = b_1\beta_1 + \ldots + b_n\beta_n$

เนื่องจาก β_i เป็นฐาน

ดังนั้น $\alpha_1 + (-b_1)\beta_1 + \ldots + (-b_n)\beta_n = 0$

เวกเตอร์ในลำดับ (sequence) ก่อกำเนิด V

และถ้าเราสร้างฐานโดยเทคนิคของการทำจากซ้ายไปขวา และทิ้งแต่ละเวกเตอร์ซึ่งเป็นผลบวกเชิงเส้นของตัวที่มาก่อนมัน อย่างน้อยที่สุดหนึ่ง β_i จะต้องถูกทิ้งและให้ฐาน

$\{\alpha_1, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_m^{(1)}\}$ โดยที่ $m \leqslant n - 1$

ใช้วิธีการเดียวกันกับลำดับของเวกเตอร์

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_m^{(1)},$

เราจะได้ฐานใหม่

$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_t^{(r)}\}$

โดยที่ $0 \leqslant t \leqslant n - r$ ดังนั้น $r \leqslant n$ #

บทแทรก

ฐาน 2 ฐานใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด V เหนือ F มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

พิสูจน์

ให้ $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ และ $B' = \{\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'\}$เป็นฐาน 2 ฐาน แล้วโดยทฤษฎี 9.3.3

B เป็นเซตอิสระของเวกเตอร์ และ B′ เป็นฐาน

$\therefore\ n \leqslant m$

โดยทำนองเดียวกัน จะได้ (แต่กลับ β และ β')

$m \leqslant n$

$m = n$ #

นิยาม

ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด เหนือสนาม F, จำนวนสมาชิกในฐานเป็นมิติของ V เหนือ F

ตัวอย่าง Q.3.1 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F.และให้ $\alpha \in E$

ตัวอย่าง 9.2.8 แสดงให้เห็นว่า ถ้า α เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F และ $\deg(\alpha, F) = n$ แล้ว มิติของ $f(\alpha)$ (ซึ่งเป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F) คือ n

ทฤษฎี 9.3.4 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F, ให้ $\alpha \in F$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F ถ้า $\deg(\alpha, F) = n$ แล้ว $F(\alpha)$ เป็น ปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเวกเตอร์หนึ่ง เหนือ F โดยมีฐาน $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ และ ทุก ๆ สมาชิก β ของ $F(\alpha)$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F และ $\deg(\beta, F) \leqslant \deg(\alpha, F)$

พิสูจน์

เราได้แสดงทุก ๆ สิงแล้วในตัวอย่าง 9.3.1 เว้นแต่เหตุผลที่สำคัญ ซึ่งพูดไว้ในประโยคสุดท้ายของทฤษฎี

ให้ $\beta \in F(\alpha)$ โดยที่ α เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F และ $\deg(\alpha) = n$

พิจารณา

$1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n$

มีสมาชิก n + 1 ตัว ของ $F(\alpha)$ และไม่สามารถจะเป็นอิสระต่อกันในตัวเองเหนือ F โดยทฤษฎี 9.3.3

ฐานใด ๆ ของ $F(\alpha)$ เหนือ F จะต้องประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อยที่สุดมากเท่าเซตของเวกเตอร์อิสระต่อกันในตัวเอง เหนือ F

อย่างไรก็ตาม ฐาน $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ มีสมาชิกเพียง n ตัว

ด้วยเหตุนี้ มี $b_i \in F \ni$

$b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \ldots + b_n\beta^n = 0$

โดยที่ไม่ทั้งหมด $b_i = 0$ แล้ว

$f(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ เป็นสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ $F[x] \ni f(\beta) = 0$

ดังนั้น β เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F และ $\deg(\beta, F)$ มากที่สุดเป็นได้แค่ n #

แบบฝึกหัดที่ ๑

1) จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

..............ก) ผลบวกของ 2 เวกเตอร์ใด ๆ เป็นเวกเตอร์

..............ข) ผลบวกของ 2 สเกลาร์ใด ๆ เป็นเวกเตอร์

..............ค) ผลคูณของ 2 สเกลาร์ใด ๆ เป็นสเกลาร์

..............ง) ผลคูณของสเกลาร์กับเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์

..............จ) ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์มีฐานจำนวนจำกัด

..............ฉ) เวกเตอร์ในฐานเป็น linearly dependent

..............ช) เวกเตอร์ 0 อาจเป็นส่วนหนึ่งของฐาน

..............ซ) ถ้า $F \leqslant E$ และ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือสนาม F แล้ว α^2 เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

..............ฌ) ถ้า $F \leqslant E$ และ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือสนาม F แล้ว $\alpha + \alpha^2$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

..............ญ) ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์มีฐาน

2) จงหาฐาน 3 ฐานสำหรับ R^2 เหนือ R โดยที่ไม่มีฐานคู่ใดมีเวกเตอร์ร่วมกัน

3) จงพิจารณาดูว่าเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้เป็นฐานสำหรับ R^3 เหนือ R หรือไม่

ก) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

ข) $\{(-1, 1, 2), (2, -3, 1), (10, -14, 0)\}$

4) จงบอกฐานสำหรับแต่ละปริภูมิเวกเตอร์ต่อไปนี้ เหนือสนามที่กำหนดให้

ก) $Q(\sqrt{2})$ เหนือ Q

ข) $R(\sqrt{2})$ เหนือ R

ค) $Q(\sqrt[3]{2})$ เหนือ Q

ง) C เหนือ R

จ) Q(i) เหนือ ∢

ฉ) $Q(4\sqrt{2})$ เหนือ Q

5) กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม F จงนิยามปริภูมิย่อย (subspace) ของปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F