บทที่ 8
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสนามภาคยืดขยาย
(Introduction to extension fields)

8.1 สนามภาคยืดขยาย
(Extension fields)

ในหัวข้อนี้เราจะมาดูกันว่า พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวจะมีศูนย์

นิยาม

สนาม E จะเป็นสนามภาคยืดขยาย (extension field) ของสนาม F เมื่อ $F \leqslant E$

ตัวอย่าง 8.1.1 สนาม R เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม Q

สนาม C เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม Q และสนาม R

ทฤษฎี 8.1.1 (Kronecker **หรือ** Basic Goal)

> **ให้ F เป็นสนาม ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนาม ค่าคงตัวใน $F[x]$ แล้วจะมีสนามภาคยืดขยาย E ของ F และ $\alpha \in E$ ซึ่ง $f(\alpha) = 0$**

พิสูจน์

โดยทฤษฎี 7.2.5

$f(x)$ มีตัวประกอบใน $F[x]$ ซึ่งเป็นพหุนามลดทอนไม่ได้เหนือ F

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ที่เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ ดังกล่าว โดยทฤษฎี 7.2.3

$<p(x)>$ เป็นกลุ่มอุดมคติใหญ่สุดของ $F[x]$

ดังนั้น $F[x]/<p(x)>$ เป็นสนาม

ให้ $\psi : F \to F[x]/<p(x)>$ กำหนดโดย $\psi(a) = a + <p(x)>$ สำหรับ $a \in F$

ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะ

ถ้า $\psi(a) = \psi(b)$ นั่นคือ

$a + <p(x)> = b + <p(x)>$ สำหรับ บาง $a, b \in F$ แล้ว

$a - b \in <p(x)>$

ดังนั้น $a - b$ จะต้องเป็นทวีคูณของพหุนาม $p(x)$ ซึ่งมีลำดับขั้น $\geqslant 1$

แต่ $a, b \in F \Rightarrow a - b \in F$

ดังนั้น เราต้องได้ $a - b = 0$

$\therefore\ a = b$

ให้ $a, b \in F$

$$\psi(a + b) = (a + b) + <p(x)>$$

$$= (a + <p(x)>) + (b + <p(x)>)$$

$$= \psi(a) + \psi(b)$$

$$\psi(ab) = (ab) + <p(x)>$$

$$= (a + <p(x)>)(b + <p(x)>)$$

$$= \psi(a)\,\psi(b)$$

ให้ $a + <p(x)> \in F[x]/<p(x)>$

จะมี $a \in F \ni \psi(a) = a + <p(x)>$

$\therefore$ ψ เป็นฟังก์ชันถอดแบบ

เราได้พิสูจน์ว่า F คือ สิ่งเดียวกับ $\{a + <p(x)> | a \in F\}$ โดยฟังก์ชันถอดแบบ ψ นี้

ดังนั้น $E = F[x]/<p(x)>$ เป็นสนามภาคยืดขยายของ F

ต่อไปเหลือแต่เพียงต้องแสดงว่า $p(x)$ มีศูนย์ใน E

ให้ $\alpha = x + <p(x)>$

ดังนั้น $\alpha \in E$

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายแบบมูลฐาน $\phi_\alpha F[x] \to E$

ถ้า $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ โดยที่ $a_i \in F$ แล้ว

$\phi_\alpha(p(x)) = a_0 + a_1(x + <p(x)>) + \ldots + a_n(x + <p(x)>)^n$ ใน $E = F[x]/<p(x)>$

แต่เราสามารถจะคำนวณใน $F[x]/<p(x)>$ ได้โดยการเลือกตัวแทน และ w เลือก x เป็นตัวแทนของโคเซต $\alpha = x + <p(x)>$ ดังนั้น

$$p(\alpha) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + <p(x)>$$

$$= p(x) + <p(x)>$$

$$= <p(x)>$$

$$= 0 \text{ ใน } F[x]/<p(x)>$$

แสดงว่า เราพบ $\alpha \in E = F[x]/<p(x)>$ ซึ่ง $p(\alpha) = 0$

$\therefore$ $f(\alpha) = 0$ #

ตัวอย่าง 8.1.2 ให้ $F = R$ และ $f(x) = x^2 + 1$

$f(x)$ ไม่มีศูนย์ใน R

$\therefore$ $f(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ เหนือ R

$\therefore$ $<x^2 + 1>$ เป็นกลุ่มอุดมคติใหญ่สุดของ $R[x]$

$\therefore$ $R[x]/<x^2 + 1>$ เป็นสนาม

identifying $r \in R$ ด้วย $r + <x^2 + 1>$ ใน $R[x]/<x^2 + 1>$

R เป็นสนามย่อยของ $E = R[x]/<x^2 + 1>$

ให้ $\alpha = x + <x^2 + 1>$

คำนวณใน $R[x]/<x^2 + 1>$ เราพบ

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 1 &= (x + <x^2 + 1>)^2 + (1 + <x^2 + 1>)\\ &= (x^2 + 1) + <x^2 + 1>\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น α เป็นศูนย์ของ $x^2 + 1$ #

8.2 สมาชิกพีชคณิต และสมาชิกอดิศัย

Algebraic and transcendental elements

นิยาม

> สมาชิก α ของสนามภาคยืดขยาย E ของสนาม F จะเรียกว่าสมาชิกพีชคณิต เหนือ F ถ้า $f(\alpha) = 0$
>
> สำหรับ $0 \neq f(x) \in F[x]$
>
> ถ้า α ไม่ใช่สมาชิกพีชคณิต เหนือ F แล้ว α เป็นสมาชิกอดิศัย

ตัวอย่าง 8.2.1 C เป็นสนามภาคยืดขยายของ Q

$\because$ $\sqrt{2}$ เป็นศูนย์ของ $x^2 - 2$ เหนือ Q

ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นสมาชิกพีชคณิต

และ i เป็นศูนย์ของ $x^2 + 1$ เหนือ Q

$\therefore$ i เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q #

ตัวอย่าง 8.2.2 จำนวนจริง $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q

เพราะว่า ถ้า $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 + \sqrt{3} \\ \alpha^2 - 1 &= \sqrt{3} \\ (\alpha^2 - 1)^2 &= 3 \\ \alpha^4 - 2\alpha^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ α เป็นศูนย์ของ $x^4 - 2x^2 - 2 \in Q[x]$ #

ตัวอย่าง 8.2.3 เป็นที่ทราบกันดี (แต่ไม่ง่ายนักที่จะพิสูจน์) ว่า จำนวนจริง π และ e เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ Q

แต่ π เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ R เพราะ π เป็นศูนย์ของ $(x - \pi) \in R[x]$

นิยาม

สมาชิกของ C (จำนวนเชิงซ้อน) ซึ่งเป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q เราเรียกว่า จำนวนพีชคณิต (algebraic number) จำนวนอดิศัย (transcendental number) คือ สมาชิกของ C ซึ่งเป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ Q

ทฤษฎี 8.2.1 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F ให้ $\alpha \in E$, ให้ $\phi_\alpha : F[x] \to E$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบมูลฐานของ $F[x]$ ไปใน $E \ni \phi_\alpha(a) = a$ สำหรับ $a \in F$ และ $\phi_\alpha(x) = \alpha$ แล้ว α เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ F ก็ต่อเมื่อ ϕ_α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์

เนื่องจาก α เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ F ก็ต่อเมื่อ

$f(\alpha) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $0 \neq f(x) \in F[x]$

ซึ่งข้อความนี้จะเป็นจริง (โดยนิยาม) ก็ต่อเมื่อ

$\phi_\alpha(f(x)) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $0 \neq f(x) \in F[x]$

ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\ker(\phi_\alpha) = \{0\}$

ซึ่งจะเป็นได้ก็ต่อเมื่อ ϕ_α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง #

8.3 พหุนามลดทอนไม่ได้สำหรับ a เหนือ F

(The irreducible polynomial for α over F)

พิจารณาสนามภาคยืดขยาย R ของ Q เราทราบว่า $\sqrt{2}$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q เพราะ $\sqrt{2}$ เป็นศูนย์ของ $x^2 - 2$ แต่ $\sqrt{2}$ เป็นศูนย์ของ $x^3 - 2x$ และเป็นศูนย์ของ $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$ ด้วยเหมือนกัน

ทฤษฎี 8.3.1 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของ F และให้ $\alpha \in E$ โดยที่ $\alpha \neq 0$ และ α เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F แล้วจะมีพหุนามลดทอนไม่ได้ $p(x) \in F[x]$ ซึ่ง $p(\alpha) = 0$ พหุนามลดทอนไม่ได้ p(x) จะเป็นตัวประกอบที่เป็นพหุนามค่าคงตัว (ซึ่งอยู่ใน F) ที่มีลำดับขั้น $\geqslant 1$ ใน F[x] และมี α เป็นศูนย์ ถ้า $f(\alpha) = 0$ สำหรับ $f(x) \in F[x]$ โดยที่ $f(x) \neq 0$ แล้ว p(x) หาร f(x) ลงตัว

พิสูจน์

ให้ ϕ_α เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบมูลฐานของ F[x] ไปใน E

$\therefore$ ker (ϕ_α) เป็นกลุ่มอุดมคติของ F[x]

ker (ϕ_α) จะต้องเป็นกลุ่มอุดมคติหลัก ก่อกำเนิดโดยบาง $p(x) \in F[x]$

$\therefore$ $<p(x)>$ ประกอบด้วยสมาชิกของ F[x] ที่มี α เป็นศูนย์

ดังนั้น ถ้า $f(\alpha) = 0$ สำหรับ $f(x) = 0$ แล้ว $f(x) \in\ <p(x)>$

$\therefore$ p(x) หาร f(x) ลงตัว

$\therefore$ p(x) เป็นพหุนามที่มีลำดับขั้น (ต่ำสุด) $\geqslant 1$ ที่มี α เป็นศูนย์

$\therefore$ พหุนามอื่น ๆ ที่จะมีลำดับขั้นเดียวกับ p(x) จะต้องอยู่ในรูป ap(x) โดยที่ $a \in F$

จึงเหลือแต่เพียงจะต้องแสดงว่า p(x) เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้

ถ้า $p(x) = r(x)\, s(x)$ โดยที่ลำดับขั้นของ r(x) และ s(x) น้อยกว่าลำดับขั้นของ p(x)

และ $p(\alpha) = 0$ จะได้ $r(\alpha)\, s(\alpha) = 0$

ดังนั้น $r(\alpha) = 0$ หรือมิฉะนั้นก็ $s(\alpha) = 0$

(เนื่องจาก E เป็นสนาม)

ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ว่า p(x) เป็นพหุนามที่มีลำดับขั้น $\geqslant 1$ ซึ่ง $p(\alpha) = 0$

ดังนั้น p(x) เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ #

โดยการคูณด้วยค่าคงตัวที่เหมาะสมใน F เราสามารถจะสมมติว่าสัมประสิทธิ์ของกำลังสูงสุดของ x ปรากฏใน p(x) ของทฤษฎี 8.3.1 คือ 1 พหุนามซึ่งสัมประสิทธิ์ของกำลังสูงสุดของ x ปรากฏเท่ากับ 1 เรียกว่า พหุนามโมนิก (monic polynomial)

นิยาม ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และให้ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F พหุนามโมนิก (หนึ่งเดียว) (unique monic polynomial) p(x) ตามทฤษฎี 8.3.1 เรียกว่า พหุนามลดทอนไม่ได้สำหรับ α เหนือ F เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ irr (α, F) ลำดับขั้นของ irr (α, F) เป็นลำดับขั้นของ α เหนือ F เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ deg (α, F)

ตัวอย่าง 8.3.1 irr $(\sqrt{2}, Q) = x^2 - 2$

จากตัวอย่าง 8.2.2 เราดูกันแล้วว่า $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ ใน R

เป็นศูนย์ของ $x^4 - 2x^2 - 2 \in Q[x]$

เนื่องจาก $x^4 - 2x^2 - 2$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ เหนือ Q

เราพบว่า irr $(\sqrt{1 + \sqrt{3}}, Q) = x^4 - 2x^2 - 2$

ดังนั้น $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ เป็นสมาชิกพีชคณิตมีลำดับขั้น 4 เหนือ Q #

8.4 ภาคยืดขยายอย่างง่าย

(Simple extensions)

ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสมการ F และให้ $\alpha \in E$

ให้ ϕ_α เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบมูลฐานของ $F[x]$ ไปใน E โดยที่ $\phi_\alpha(a) = a$ สำหรับ $a \in F$ และ $\phi_\alpha(x) = \alpha$

เราพิจารณา 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า α เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F แล้ว

จากทฤษฎี 8.3.1 เรารทราบมาแล้วว่า

$\ker(\phi_\alpha)$ คือ $<\mathrm{irr}(\alpha, F)>$

และโดยทฤษฎี 7.2.3 $<\mathrm{irr}(\alpha, F)>$ เป็นกลุ่มอุดมคติใหญ่สุดของ $F[x]$

ดังนั้น $F[x]/<\mathrm{irr}(\alpha, F)>$ เป็นสนามและถอดแบบกันกับ $\phi_\alpha(F[x])$ ใน E

สนามย่อย $\phi_\alpha(F[x])$ ของ E นี้ เป็นสนามย่อยเล็กสุดของ E ที่บรรจุ F และ α เราเขียนสัญลักษณ์แทนสนามนี้ด้วย $F(\alpha)$

กรณีที่ 2 ถ้า α เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ F

โดยทฤษฎี 8.2.1

ϕ_α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและถ่ายแบบจาก $F[x]$ ไปยัง E

ดังนั้น ในกรณีนี้ $\phi_\alpha(F[x])$ ไม่ใช่สนาม แต่เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $F[\alpha]$

โดยบทแทรกที่ 1 ของทฤษฎี 3.2.1

E บรรจุสนามของผลหารของ $F[\alpha]$ ซึ่งเป็นสนามย่อยที่เล็กที่สุดของ E ซึ่งบรรจุ F และ α

เช่นเดียวกับกรณีที่ 1 เราเขียนแทนสนามนี้ด้วย $F(\alpha)$

นิยาม

> **สนามภาคยืดขยาย E ของสนาม F จะเป็นภาคยืดขยายอย่างง่ายของ E** (Simple extension of E) **ถ้า** E = F(a) **สำหรับบาง** $\boldsymbol{a} \in E$

ทฤษฎี 8.4.1

> ให้ E เป็นภาคยืดขยายอย่างง่าย $F(\alpha)$ ของสนาม F และให้ α เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F ให้ลำดับขั้นของ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ เป็น $n \geqslant 1$ แล้วทุก ๆ $\beta \in E = F(\alpha)$ สามารถจะเขียนได้ (อย่าง unique) ในรูป
>
> $$\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$
>
> โดยที่ $b_i \in F$

พิสูจน์

สำหรับฟังก์ชันถ่ายแบบมูลฐาน ϕ_α โดยทั่วไป

$F(\alpha) = \phi_\alpha(F[x])$ จะอยู่ในรูป $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$

ซึ่งคือ พหุนามใน α ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นสมาชิกของ F

ให้ $\operatorname{irr}(\alpha, F) = p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

แล้ว $p(\alpha) = 0$ ดังนั้น

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_0$$

สมการนี้ใน $F(\alpha)$ สามารถจะแสดงทุก ๆ เอกนาม (monomial) α^m สำหรับ $m \geqslant n$ ในเทอมของกำลังของ α ซึ่งน้อยกว่า n ตัวอย่างเช่น

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n$$

$= \quad -a_{n-1}\alpha^{n} - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\alpha$

$= \quad -a_{n-1}(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \ldots - a_0\alpha$

ดังนั้น ถ้า $\beta \in F(\alpha)$ แล้ว β สามารถจะแสดงในรูปที่ต้องการ

$\beta \;=\; b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$

สำหรับ uniqueness

ถ้า $b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0' + b_1'\alpha + \ldots + b_{n-1}'\alpha^{n-1}$

สำหรับ $b_i' \in F$ แล้ว

$(b_0 - b_0') + (b_1 - b_1')x + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-1}')x^{n-1} = g(x) \in F[x]$ และ $g(\alpha) = 0$ และลำดับขั้นของ $g(x)$ น้อยกว่าลำดับขั้นของ irr (α, F)

เนื่องจาก irr (α, F) เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามศูนย์ที่มีลำดับขั้นน้อยที่สุดใน $F[x]$ ซึ่งมี α เป็นศูนย์

จึงได้ว่า $g(x) = 0$

ดังนั้น $b_i - b_i' = 0$

$\therefore \quad b_i = b_i'$ #

ตัวอย่าง 8.4.1 พหุนาม $p(x) = x^2 + x + 1 \in Z_2[x]$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ เหนือ Z_2 โดยทฤษฎี 7.2.1

เนื่องจาก ทั้งสมาชิก 0 และ $1 \in Z_2$ ไม่เป็นศูนย์ของ $p(x)$

โดยทฤษฎี 8.1.1 เราทราบว่า

มีสนามภาคยืดขยาย E ของ $Z_2[x]$ บรรจุศูนย์ α ของ $x^2 + x + 1$

โดยทฤษฎี 8.4.1 $Z_2(\alpha)$ มีสมาชิก $0 + 0\alpha$, $1 + 0\alpha$, $0 + 1\alpha$ และ $1 + 1\alpha$

นั่นคือ $0, 1, \alpha$ และ $1 + \alpha$ จะเป็นสมาชิกของสนามใหม่ ซึ่งเป็นสนามที่ประกอบ

ด้วยสมาชิกเพียง 4 ตัวนี้ และมีการดำเนินการ + และ . ตามตารางข้างล่างนี้

+	0	I	a	$1 + \alpha$
0	0	1	α	$1 + \alpha$
1	I	0	$1 + \alpha$	a
a	a	$1 + \alpha$	0	1
$1 + \alpha$	I + a	a	1	0

0	00	01	a0	$1+ \alpha 0$
1	0	1	a	$1 + \alpha$
a	0	a	1 t α	1
$1 + \alpha$	0	$1 + \alpha$	1	a

ขอยกตัวอย่างการคำนวณ $(1 + \alpha)(1 + \alpha) \in Z_2(\alpha)$

เนื่องจาก $p(a) = \alpha^2 + a + 1 = 0$

$$\alpha^2 = -\alpha - 1 = \alpha + 1$$

ดังนั้น $(1 + \alpha)(1 + a) = 1 + \alpha + \alpha + \alpha^2$

$$= 1 + \alpha^2$$

$$= 1 + \alpha + 1$$

$$= a$$ #

แบบฝึกหัดที่ 8

1) จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

.............ก) จำนวน π เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ Q

.............ข) C เป็นสนามภาคยืดขยายของ R

.............ค) สมาชิกทุก ๆ ตัวของสนาม F เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F

.............ง) R เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม Q

.............จ) Q เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม Z_2

.............ฉ) ให้ $\alpha \in C$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q, มีลำดับขั้น n ถ้า $f(\alpha) = 0$ สำหรับ $0 \neq f(x) \in Q[x]$ แล้ว $\deg(f(x)) \geqslant n$

.............ช) ให้ $\alpha \in C$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q, มีลำดับขั้น n ถ้า $f(\alpha) = 0$ สำหรับ $0 \neq f(x) \in R[x]$ แล้ว $\deg(f(x)) \geqslant n$

.............ซ) ทุก ๆ พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว ใน $F[x]$ มีศูนย์ในบางสนามภาคยืดขยายของ F

.............ฌ) ทุก ๆ พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว ใน $F[x]$ มีศูนย์ในทุก ๆ สนามภาคยืดขยายของ F

2) สำหรับแต่ละจำนวน $\alpha \in C$ ที่กำหนดให้ จงแสดงว่า α เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ Q โดยการหา $f(x) \in Q[x]$ ซึ่ง $f(\alpha) = 0$

ก) $1 + \sqrt{2}$

ข) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ค) $1 + i$

ง) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$

จ) $\sqrt{\sqrt[3]{2} - i}$

3) สำหรับแต่ละสมาชิกพีชคณิต $\alpha \in C$ ที่กำหนดให้ จงหา $\operatorname{irr}(\alpha, Q)$ และ $\deg(\alpha, Q)$

ก) $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$

ข) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right) + \sqrt{7}}$

ค) $\sqrt{2} + i$

4) จงพิจารณาว่า แต่ละ $\alpha \in C$ ที่กำหนดให้ ตัวใดเป็นสมาชิกพีชคณิต ตัวใดเป็นสมาชิกอดิศัย เหนือสนาม F ที่กำหนดให้ ถ้า α เป็นสมาชิกพีชคณิต จงหา deg (α, F) ด้วย

ก) $\alpha = i,\ F = Q$

ข) $\alpha = 1 + i,\ F = R$

ค) $\alpha = \sqrt{\pi},\ F = Q$

ง) $\alpha = \sqrt{\pi},\ F = R$

จ) $\alpha = \sqrt{\pi},\ F = Q(\pi)$

ฉ) $\alpha = \sqrt{\pi} + 1,\ F = Q(\pi^2)$

ช) $\alpha = \pi^2,\ F = Q$

ซ) $\alpha = \pi^2,\ F = Q(\pi)$

ฌ) $\alpha = \pi^2,\ F = Q(\pi^3)$

ญ) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\pi},\ F = Q(\pi)$

5) พหุนาม $x^2 + x + 1$ มี α เป็นศูนย์ใน $Z_2(\alpha)$ ดังนั้น พหุนามนี้จะต้องแยกตัวประกอบได้เป็นรูปผลคูณของพหุนามลำดับขั้นหนึ่ง (linear factors) ใน $(Z_2(\alpha)[x]$ จงหาตัวประกอบนี้

6) ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และให้ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F พหุนาม irr (α, F) บางครั้งเราเรียก "minimal polynomial for α over F" ทำไมจึงเรียกเช่นนั้น?

7) เราเคยกล่าวไว้โดยมิได้พิสูจน์ว่า π และ e เป็นสมาชิกอดิศัย เหนือ Q

ก) จงหาสนามย่อย F ของ R ซึ่ง π เป็นสมาชิกพีชคณิตลำดับขั้น 3 เหนือ F

ข) จงหาสนามย่อย E ของ R ซึ่ง $\alpha = e + \pi$ เป็นสมาชิกพีชคณิตลำดับขั้น 5 เหนือ E