บทที่ 4
วงปันส่วนและกลุ่มอุดมคติ
(Residue class ring and Ideals)

ในบทนี้เราจะได้ศึกษาถึงวงย่อยที่มีคุณสมบัติพิเศษกว่าวงย่อยธรรมดา และการสร้างวงปันส่วนซึ่งจำเป็นต้องใช้วงย่อยที่มีคุณสมบัติพิเศษนี้ที่เราจะเรียกว่า กลุ่มอุดมคติ

4.1 กลุ่มอุดมคติ (Ideals)

นิยาม

ให้ R เป็นวง และ I เป็นวงย่อยของ R แล้ว จะเรียก I ว่ากลุ่มอุดมคติของ R เมื่อสำหรับแต่ละ $r \in R$ และ $i \in I$

$r \cdot i \in I$ และ $i \cdot r \in I$ หรือ $rI \subseteq I$ และ $Ir \subseteq I$

ถ้า $rI \subseteq I$ เรียก I ว่า กลุ่มอุดมคติซ้าย (left ideal)

ถ้า $Ir \subseteq I$ เรียก I ว่า กลุ่มอุดมคติขวา (right ideal)

ตัวอย่าง 4.1.1 วงย่อย (E, +, .) ของ (Z, +, .) เป็นกลุ่มอุดมคติ

$(E = \{2n \mid n \in Z\})$

ตัวอย่าง 4.1.2 ให้ $A = \{0, 2, 4\} \subseteq Z_6$

$\therefore (A, +_6, \cdot_6) \leqslant (Z_6, +_6, \cdot_6)$

และ $(A, +_6, \cdot_6)$ เป็นกลุ่มอุดมคติของ $(Z_6, +_6, \cdot_6)$

ตรวจสอบ

$\because \quad 0 \cdot 0 = 0 \in A, 0 \cdot 1 = 0 \in A, \ldots, 0 \cdot 5 = 0 \in A$

$2 \cdot 0 = 0 \in A, 2 \cdot 1 = 2 \in A, \ldots, 2 \cdot 5 = 4 \in A$

$4 \cdot 0 = 0 \in A, 4 \cdot 1 = 4 \in A, \ldots, 4 \cdot 5 = 2 \in A$

$ir \in A \ \forall i \in A, \ r \in Z_6$

ตัวอย่าง 4.1.3 ให้ $N = \{0, 3\} \subseteq Z_6$

$(N, +_6, \cdot_6) \leqslant (Z_6, +_6, \cdot_6)$

และ $(N, +_6, \cdot_6)$ เป็นกลุ่มอุดมคติของ $(Z_6, +_6, \cdot_6)$

เพราะ

$0 \cdot N = \{0 \cdot 0, 0 \cdot 3\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$1 \cdot N = \{1 \cdot 0, 1 \cdot 3\} = \{0, 3\} \subseteq N$

$2 \cdot N = \{2 \cdot 0, 2 \cdot 3\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$3 \cdot N = \{3 \cdot 0, 3 \cdot 3\} = \{0, 3\} \subseteq N$

$4 \cdot N = \{4 \cdot 0, 4 \cdot 3\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$5 \cdot N = \{5 \cdot 0, 5 \cdot 3\} = \{0, 3\} \subseteq N$

หรือ $N \cdot 0 = \{0 \cdot 0, 3 \cdot 0\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$N \cdot 1 = \{0 \cdot 1, 3 \cdot 1\} = \{0, 3\} \subseteq N$

$N \cdot 2 = \{0 \cdot 2, 3 \cdot 2\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$N \cdot 3 = \{0 \cdot 3, 3 \cdot 3\} = \{0, 3\} \subseteq N$

$N \cdot 4 = \{0 \cdot 4, 3 \cdot 4\} = \{0, 0\} \subseteq N$

$N \cdot 5 = \{0 \cdot 5, 3 \cdot 5\} = \{0, 3\} \subseteq N$

$\therefore$ $rN \subseteq N$ และ $Nr \subseteq N \ \forall r \in Z_6$

นิยาม ถ้า R เป็นวง และ I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R แล้วจะเรียก I ว่า กลุ่มอุดมคติแท้ ถ้า $I \neq \{0\}$ และ $I \neq R$

ทฤษฎี 4.1.1 ถ้า R เป็นวงที่มี unity และ I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R ที่มี unit แล้ว R = I

พิสูจน์

I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R

$\therefore\ I \subseteq R$ ....(1)

ให้ $r \in R$

I เป็นกลุ่มอุดมคติที่มี 1 อยู่

$\therefore\ r1 \in I$

แต่ $r1 = r$

$\therefore\ r \in I$

$R \subseteq I$ ....(2)

จาก (1) & (2) ได้ว่า

$R = I$ #

ข้อสังเกต ทุก ๆ วง R จะมีกลุ่มอุดมคติอย่างน้อย 2 วง คือ R เอง และ {0} ซึ่งเรียกว่า กลุ่มอุดมคติไม่แท้ของ R

บทแทรก สนามจะไม่มีกลุ่มอุดมคติแท้

พิสูจน์

เนื่องจากสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ทุกตัวของสนามมี unit

ดังนั้น โดยทฤษฎี 4.1.1 กลุ่มอุดมคติของ F จะเป็น {0} หรือมิฉะนั้นก็ F

ทฤษฎี 4.1.2 ถ้า R เป็นวงการหารแล้ว R ไม่มีกลุ่มอุดมคติแท้

พิสูจน์

ให้ I เป็นกลุ่มอุดมคติแท้

ถ้า $I \neq \{0\}$ แล้ว

จะมี $x \in I$ โดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้น $x^{-1} \in R$ และ $x^{-1}x \in I$

$\therefore$ โดยทฤษฎี 4.1.1

$I = R$ #

นิยาม ให้ R เป็นวง, ถ้า I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R ที่ I ถูกก่อกำเนิดโดยสมาชิกตัวหนึ่งของ R นั่นคือ $I = \langle a \rangle$ สำหรับบาง $a \in R$ แล้วเรียก I ว่า กลุ่มอุดมคติหลัก (principal ideal) ของ R

ตัวอย่าง 4.1.4 $(2Z, +, .)$ เป็นกลุ่มอุดมคติหลักของ $(Z, +, .)$

เพราะ $2Z = \langle 2 \rangle$

ทฤษฎี 4.1.3 ทุก ๆ กลุ่มอุดมคติของวง Z เป็นกลุ่มอุดมคติหลัก

พิสูจน์

ให้ I เป็นกลุ่มอุดมคติของ Z

กรณีที่ 1 ถ้า $I = \{0\}$, ไม่มีอะไรต้องพิสูจน์

กรณีที่ 2 ถ้า $I \neq \{0\}$

$\exists m \in I$ โดยที่ $m \neq 0$

ดังนั้น $-m \in I$ และ m หรือ $-m$ เป็นจำนวนบวก

โดยคุณสมบัติของจำนวนเต็มที่ว่า :

ทุก ๆ เซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของเซตจำนวนเต็มบวกจะต้องมีสมาชิกตัวที่เล็กที่สุด

แสดงว่า จะต้องมีจำนวนเต็มบวกทีเล็กที่สุด k ใน I

$\therefore < k > \subseteq I$ ....(1)

ให้ $n \in I$

โดย Division algorithm จะได้ว่า

$\exists$ จำนวนเต็ม q และ $r \ni n = qk + r$ โดยที่ $0 \leqslant r < k$

แต่ $n \in I$ และ $k \in I$

$\therefore \ qk \in I$

$\therefore \ r = n - qk \in I$

ถ้า $r \neq 0$ r จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวก ใน I ที่เล็กกว่า k

แต่ $0 \leqslant r < k$

ดังนั้น $r = 0$ เพราะ $r \in I$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกตัวที่เล็กที่สุดใน I

$n \quad qh = 0$

$II = qk \in < k >$

$\therefore I \subseteq < h >$ ....(2)

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$I = < k >$ #

ทฤษฎี 4.1.4 $\boxed{\text{ให้ R เป็นวงการหาร แล้ว R จะไม่มีตัวหารของศูนย์}}$

พิสูจน์

ให้ $a, b \in R$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $ab = 0$

เนื่องจาก a $\neq 0$

จะต้องมีตัวผกผันสำหรับการคูณของ a สมมติเป็น x

$$\begin{aligned} \therefore \quad 0 &= x0 \\ &= x(ab) \\ &= (xa)b \\ &= 1b \\ &= b \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $ab = 0$ โดยที่ $b \neq 0$ ก็จะพิสูจน์ได้ว่า

$$a = 0$$

ดังนั้น R ไม่มีตัวหารของศูนย์ #

ทฤษฎี 4.1.5 ถ้า R เป็นวงที่มี unity, สอดคล้องกฎการสลับที่ และไม่มีกลุ่มอุดมคติแท้ แล้ว R เป็นสนาม

พิสูจน์

จะต้องแสดงว่า R เป็นสนาม

แต่เนื่องจาก R เป็นวงที่มี unity และสอดคล้องกฎการสลับที่ จึงเหลือแต่เพียงแสดงว่า สมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ทุกตัวของ R เป็น unit

นั่นคือ ต้องแสดงว่า

ทุก ๆ สมาชิกที่ไม่ใช่ 0 ของ R มีตัวผกผันสำหรับการคูณ

ให้ $x \in R \ni x \neq 0$

เซต $xR = \{xr / r \in R\}$ ภายใต้การดำเนินการเดียวกับ R เป็นกลุ่มอุดมคติ

แต่ $0 \neq x = x1 \in xR$

ดังนั้น $xR = R$ เพราะ

R ไม่มีกลุ่มอุดมคติแท้

ดังนั้น $\exists y \in R \ni xy = 1$

$\therefore$ R เป็นวงการหาร

แต่การดำเนินการบน R สอดคล้องกฎการสลับที่

$\therefore$ R เป็นสนาม #

ทฤษฎี 4.1.6 ถ้า R เป็นวงที่ไม่ใช่ 0 (nonzero ring) ซึ่ง $xR = R$ สำหรับทุก ๆ $0 \neq x \in R$ แล้ว R เป็นวงการหาร

พิสูจน์

ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า R ไม่มีตัวหารของศูนย์ เพราะ

ถ้าให้ $a, b \in R$ โดยที่ $a \neq 0, b \neq 0$

$$R = aR = a(bR) = (ab)R$$

$\therefore$ $ab \neq 0$

หรือ $R = 0R = \{0\}$

จะแสดงว่า R มี unity

ให้ $x \in R$ โดยที่ $x \neq 0$

เนื่องจาก $xR = R$

$\exists o \neq e \in R \ni xe = x$ (น่าสงสัยว่า e จะเป็น unity)

$$\therefore \quad xee = xe$$

$$x(e^2 - e) = 0$$

แต่ $x \neq 0$ และไม่มีตัวหารของศูนย์

$$\therefore \quad e^2 - e = 0$$

$$e^2 = e$$

ให้ $y \in R$

สมมติ $ye = z$ สำหรับ บาง $z \in R$

$$ye = ye^2 = ze$$

ดังนั้น $(y - z)e = 0$

$$y = z$$

ดังนั้น $ye = y$ สำหรับทุก ๆ $y \in R$

ด้วยเหตุนี้ e เป็นเอกลักษณ์ขวา (right identity)

ถ้า $y \in R$ โดยที่ $y \neq 0$ แล้ว

$$yR = R$$

$\exists z \in R \ni yz = e$

แสดงว่า มีเอกลักษณ์ขวาและมีตัวผกผันทางขวาสำหรับการ .

$\therefore$ R เป็นวงการหาร #

4.2 วงปันส่วน (Residue class ring)

จากบทที่ 1 เราทราบมาแล้วว่าทุก ๆ วง R ภายใต้การดำเนินการ + และ . ก่อนจะเป็นวง จะต้องเป็นกลุ่มที่สอดคล้องกฎการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ + มาก่อน ดังนั้นสำหรับทุก ๆ วงย่อยของวง R ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะมีกลุ่มปันส่วนภายใต้การ + ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาแนวความคิดคล้ายกันนี้ โดยพิจารณาเงื่อนไขซึ่งภายใต้กำหนดการดำเนินการ . สำหรับกลุ่มปันส่วนเหล่านี้จะทำให้กลุ่มปันส่วนเหล่านี้เป็นวง กล่าวคือ หัวข้อนี้จะเป็นเรื่องที่พูดกันถึงการสร้างวงใหม่จากวงและกลุ่มอุดมคติที่กำหนดให้ ซึ่งแนวความคิดจะคล้ายคลึงกับการสร้างกลุ่มปันส่วน ซึ่งเป็นกลุ่มใหม่ที่สร้างจากกลุ่มและกลุ่มย่อยที่กำหนดมาให้

นิยาม ให้ R เป็นวง I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R
ให้ R/I เป็นเซตของโคเซตซ้ายทั้งหมดของ I ใน R
กำหนดการ + และ . บาง R/I โดย

$$(r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$$

$$(r_1 + I) . (r_2 + I) = (r_1 r_2) + I$$

สำหรับทุก ๆ สมาชิกใน R/I

ทฤษฎี 4.2.1 ให้ R เป็นวง และ S เป็นวงย่อยของ R การดำเนินการ .

$(r_1 + S) . (r_2 + S) = r_1 r_2 + S$ สำหรับทุก ๆ $r_1 r_2 \in R$

เป็นการดำเนินการทวิภาคที่แจ่มชัด ก็ต่อเมื่อ S เป็นกลุ่มอุดมคติของ R

พิสูจน์ $\Leftarrow$

สมมติ S เป็นกลุ่มอุดมคติของวง R

ให้ $r_1 + S = r_3 + S$ และ $r_2 + S = r_4 + S$

เราจะต้องแสดงว่า $(r_1 + S) . (r_2 + S) = (r_3 + S) . (r_4 + S)$

$\because \; r_1 + S = r_3 + S$

$\therefore \; r_1 - r_3 \in S$

และ $r_2 + S = r_4 + S$

$\therefore \; r_2 - r_4 \in S$

เนื่องจาก S เป็นกลุ่มอุดมคติ

$(r_1 - r_3)r_2 \in S$ และ $r_3(r_2 - r_4) \in S$

ดังนั้น $(r_1 - r_3)r_2 + r_3(r_2 - r_4) \;=\; r_1 r_2 - r_3 r + r_3 r_2 - r_3 r_4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \; r_1 r_2 - r_3 r_4 \in S$

$\therefore \; r_1 r_2 - S = r_3 r_4 + S$

$\therefore\ (r_1 + S) . (r_2 + S) = (r_3 + S) . (r_4 + S)$

ดังนั้น ถ้า S เป็นกลุ่มอุดมคติแล้วการดำเนินการ . เป็นการดำเนินการทวิภาคที่แจ่มชัด

$\Rightarrow$ สมมติ การ . เป็นการดำเนินการทวิภาคที่แจ่มชัด

ให้ $r \in R$ และ $s \in S$

เราจะต้องแสดงว่า $rs, sr \in S$

$\because\ s + S = 0 + S$

เนื่องจาก . เป็นการดำเนินการทวิภาคที่แจ่มชัด

$$\begin{aligned} rs + S &= (r + S)(s + S) \\ &= (r + S)(0 + S) \\ &= r . 0 + s \\ &= o + s \end{aligned}$$

$rs-0 \in s$

$rs \in S$ ....(1)

ทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} sr + s &= (s + S)(r + S) \\ &= (0 + S)(r + S) \\ &= O . r + S \\ &= o + s \end{aligned}$$

$sr-0 \in S$

$sr \in S$ ....(2)

จาก (1) & (2) ได้ว่า

S เป็นกลุ่มอุดมคติของ R #

ถ้า $(R, +, .)$ เป็นวง และ S เป็นวงย่อยของ R แล้ว S เป็นกลุ่มย่อยปรกติ ของ $(R, +)$ ดังนั้น เซต R/S ของโคเซตซ้ายทั้งหมดของ S ใน R ภายใต้การ $+$ ซึ่งกำหนดโดย $(a + S) + (b + S) = (a + b) + S$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in R$ เป็นกลุ่มปันส่วน และนักศึกษาคงจำได้ว่า เราได้ความจริงเกี่ยวกับกลุ่ม R/S ดังนี้

1. ถ้า $a \in R$ แล้ว $a + S$ เป็นโคเซตของ R/S
2. สำหรับ $a, b \in R$, $a + S = b + S$ ก็ต่อเมื่อ $a, b \in S$
3. สมาชิก "ศูนย์" (zero-element) ใน R/S คือ โคเซต $0 + S$
4. สมาชิก $s \in S$ ก็ต่อเมื่อ $s + S = S$

ทฤษฎี 4.2.2 ให้ $(R, +, .)$ เป็นวง และ $(I, +, .)$ เป็นกลุ่มอุดมคติของ R, R/I เป็นเซตของโคเซตซ้ายทั้งหมดของ I ใน R แล้ว $(R/I, +, .)$ เป็นวง

พิสูจน์

ให้ R/I เป็นเซตของโคเซตซ้ายทั้งหมดของ I ใน R

ให้ $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$

$$\because (r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$$
$$= r_3 + I \in R/I$$

$\therefore$ การบวกใน R/I สอดคล้องกฎการปิด

ให้ $r_1 + 1, r_2 + I, r_3 + I \in R/I$

$$\because (r_1 + I) + [(r_2 + I) + (r_3 + I)] = (r_1 + I) [(r_2 + r_3) + 1)$$
$$= r_1 + (r_2 + r_3) + I$$
$$= (r_1 + r_2) + r_3 + I$$
$$= (r_1 + r_2) + I + (r_3 + I)$$
$$= [(r_1 + I) + (r_2 + I)] + (r_3 + I)$$

$\therefore$ การบวกใน R/I สอดคล้องกฎการเปลี่ยนกลุ่ม

ให้ $r + I \in R/I$

$\because (0 + I) + (r + I) = (r + I)$

และ $(r + I) + (0 + I) = (r + 1)$

ดังนั้น $(0 + I)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกใน R/I

ให้ $(r + 1) \in R/I$

$$(-r + I) + (r + I) = (-r + r) + I$$
$$= 0 + I$$

และ
$$(r + I) + (-r + I) = (r - r) + I$$
$$= 0 + I$$

ดังนั้น $(-r + I)$ เป็นตัวผกผันสำหรับการบวกของ R/I

ดังนั้น $(R/I, +)$ เป็นกลุ่ม

ให้ $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$

$$\therefore \quad (r_1 + I) + (r_2 + 1) = (r_1 + r_2) + I$$
$$= (r_2 + r_1) + I$$
$$= (r_2 + I) + (r_1 + I)$$

ดังนั้น การบวกใน R/I สอดคล้องกฎการสลับที่

$\therefore$ $(R/I, +)$ เป็นกลุ่มที่สอดคล้องกฎการสลับที่ (Abelian group)

ให้ $r_1 + I, r_2 + I, r_3 + I \in R/I$

$$\therefore \quad [(r_1 + I)(r_2 + I)][r_3 + I] = [r_1r_2 + I][r_3 + I]$$
$$= (r_1r_2)r_3 + I$$
$$= r_1(r_2r_3) + I$$
$$= (r_1 + I)[(r_2r_3 + I)]$$
$$= [r_1 + I][(r_2 + I)(r_3 + I)]$$

การคูณใน R/I สอดคล้องกฎการเปลี่ยนกลุ่ม

ให้ $r_1 + I,\ r_2 + I,\ r_3 + I \in R/I$

$$\begin{aligned}
\because\quad (r_1 + I)[(r_2 + I) + (r_3 + I)] &= (r_1 + I)[(r_2 + r_3) + I] \\
&= r_1(r_2 + r_3) + I \\
&= (r_1r_2 + r_1r_3) + I \\
&= (r_1r_2 + I) + (r_1r_3 + I) \\
&= [(r_1 + I)(r_2 + I)] + [(r_1 + I)(r_3 + I)]
\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}
[(r_1 + I) + (r_2 + I)](r_3 + I) &= [(r_1 + r_2) + I](r_3 + I) \\
&= (r_1 + r_2)r_3 + I \\
&= (r_1r_3 + r_2r_3) + I \\
&= (r_1r_3 + I) + (r_2r_3 + I) \\
&= [(r_1 + I)(r_2 + I)] + [(r_2 + I)(r_3 + I)]
\end{aligned}$$

ดังนั้น กฎการแจกแจงเป็นจริงใน R/I

และ (R/I, + , .) เป็นวง #

นิยาม

ให้ (R, + , .) เป็นวง, (I, + , .) เป็นกลุ่มอุดมคติของ (R, + , .) แล้วเรียก (R/I, + , .) ว่า วงปันส่วน (quotient ring หรือ factor ring หรือ residue class ring of R modulo I)

ตัวอย่าง 4.2.1 ให้ $N = \{0, 3\}$

$(N, +_6, \cdot_6) \leqslant (Z_6, +_6, \cdot_6)$

$(Z_6/N, +_6, \cdot_6)$ เป็นวงปันส่วน

ตัวอย่าง 4.2.2 $(Z/nZ, +, .)$ เป็นวงปันส่วน

ข้อสังเกต 1. ทุก ๆ วง R จะมี 2 กลุ่มอุดมคติ คือ R เอง และ $\{0\}$ เรียก กลุ่มอุดมคติไม่แท้ (improper ideal) ดังนั้น จึงมีวงปันส่วน R/R ซึ่งมีสมาชิกเพียงตัวเดียว และ $R/\{0\}$ ซึ่งถอดแบบกับ R

2. ให้ R เป็นวง และ I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R แล้ว คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

ก. ถ้า R เป็นวงที่สอดคล้องกฎการสลับที่แล้ว R/I เป็นวงปันส่วนที่สอดคล้องกฎการสลับที่

ข. ถ้า R เป็นวงที่มี unity แล้ว $R/I = \{0 + I\}$ หรือมิฉะนั้นก็ R/I เป็นวงที่มี unity

ค. ถ้า $r + I \in R/I$ แล้ว $(-r) + I = -(r + I)$

ง. ถ้า S เป็นวงย่อยของวง R ซึ่ง $I \subset S$ แล้ว S/I เป็นวงย่อยของ R/I

จ. ถ้า J เป็นกลุ่มอุดมคติของ R ซึ่ง $I \subset J$ แล้ว J/I เป็นกลุ่มอุดมคติของ R/I

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

..............ก) Q เป็นกลุ่มอุดมคติของ R

.............ข) ทุก ๆ กลุ่มอุดมคติของวงเป็นวงย่อยของวง

.............ค) ทุก ๆ วงย่อยของวงเป็นกลุ่มอุดมคติของวง

.............ง) ทุก ๆ วงปันส่วนของทุก ๆ วงที่สอดคล้องกฎการสลับที่เป็นวงที่สอดคล้องกฎการสลับที่

.............จ) วง $Z/4Z$ และ Z_4 ถอดแบบกัน

.............ฉ) กลุ่มอุดมคติ N ของวง R ที่มี *unity* จะคือ $N = R$ ก็ต่อเมื่อ $1 \in N$

.............ช) Z_4 เป็นกลุ่มอุดมคติของ $4Z$

.............ซ) ถ้า R เป็นวงที่มีตัวหารของศูนย์แล้วทุก ๆ วงปันส่วนของ R มีตัวหารของศูนย์

.............ฌ) Z เป็นกลุ่มอุดมคติใน Q

2) จงหากลุ่มอุดมคติ I ของ Z_{12} และหา Z_{12}/I

3) จงสร้างตารางการบวก และการคูณสำหรับ $2Z/8Z$ และพิจารณาด้วยว่า $2Z/8Z \cong Z_4$ หรือไม่

4) จงหาวงย่อยของวง $Z + Z$ ซึ่งไม่เป็นกลุ่มอุดมคติของ $Z + Z$

5) จงหากลุ่มอุดมคติทั้งหมดของ $Z + Z$