บทที่ 16
ทฤษฎีกาลัวส์
(Golios Theory)

16.1 สรุปความ

(Résumé)

ทฤษฎีกาลัวส์จะทำให้เราทราบการตอบโต้ที่ดีระหว่างทฤษฎีของกลุ่ม และทฤษฎีสนาม การศึกษาตั้งแต่บทที่ 11 เป็นต้นมา เรามีจุดมุ่งหมายเพื่อเป็นพื้นฐาน ที่จะนำมาศึกษาทฤษฎีกาลัวส์นี้ ดังนั้นก่อนที่จะเริ่มการศึกษาทฤษฎีกาลัวส์ ขอทบทวนโดยสรุปความย่อ ๆ ของเรื่องต่าง ๆ จากบทที่ 11 ถึงบทที่ 15 เพื่อเตือนความจำของนักศึกษาก่อน

1) ให้ $F \leqslant E \leqslant \bar{F}, \alpha \in E$ และ ให้ β เป็นสังยุคของ α เหนือ F นั่นคือ irr (α, F) มี β เป็นศูนย์ด้วยแล้วจะมีฟังก์ชันถอดแบบ $\psi_{\alpha,\beta}$ ส่ง $F(\alpha)$ แบบทั่วถึงไปบน $F(\beta)$ ซึ่งทิ้ง F คงที่ และส่ง α ไปบน β

2) ถ้า $F \leqslant E \leqslant \bar{F}$ และ $\alpha \in E$ แล้ว ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่ม σ และ $\bar{F}$ ซึ่งทิ้ง F คงที่จะต้องส่ง α ไปบนสังยุคบางตัวของ α เหนือ F

3) ถ้า $F \leqslant E$ เซตของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มทั้งหมดของ E ทิ้ง F คงที่ จะเป็นกลุ่ม G(E/F) สำหรับแต่ละเซตย่อย S ของ G(E/F) เซตของสมาชิกทั้งหมดของ E ทิ้ง F คงที่ โดยสมาชิกทั้งหมดของ S เป็นสนาม E_s, $F \leqslant E_{G(E/F)}$ ด้วย .

4) สนาม $E, F \leqslant E \leqslant \bar{F}$ เป็นสนามแยกส่วนเหนือ F ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปยัง $\bar{F}$ ทิ้ง F คงที่เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดและสนามแยกส่วนเหนือ F แล้ว $|G(E/F)| = \{E : F\}$

5) ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F แล้ว $\{E : F\}$ หาร $[E : F]$ ได้ลงตัว ถ้า E แยกกันได้เหนือ F ด้วย แล้ว $\{E : F\} = [E : F]$, E แยกกันได้เหนือ F ด้วย ก็ต่อเมื่อ irr (α, F) มีศูนย์ของภาวะรากค่าซ้ำของ 1 ทั้งหมด สำหรับทุก ๆ $\alpha \in E$

6) ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F และเป็นสนามแยกส่วนที่แยกกันได้เหนือ F แล้ว $|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F]$

16.2 ภาคยืดขยายปรกติ

(Normal extensions)

เรากำลังสนใจในภาคยืดขยายจำกัด K ของ F ซึ่งทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ K ทิ้ง F คงที่ เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ K และซึ่ง

$$[K : F] = \{K : F\}$$

ในสรุปความข้อ 4 และข้อ 5 เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F ซึ่งเป็นสนามแยกส่วนแยกกันได้เหนือ F

นิยาม ภาคยืดขยายจำกัด K ของ F เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัด (finite normal extension) ของ F ถ้า K เป็นสนามแยกส่วนแยกกันได้ (separable splitting field) เหนือ F

สมมติว่า K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของ F โดยที่ $K \leqslant \bar{F}$ แล้ว โดยสรุปความข้อ (4) ทุก ๆ ฟังก์ชันถอดร่วมกลุ่มของ $\bar{F}$ ทิ้ง F คงที่ เป็นเหตุให้เกิดฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ K เราให้ G(K/F) เป็นกลุ่มของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ K ทิ้ง F คงที่

ทฤษฎี 16.2.1 ให้ K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของ F และให้ E เป็นภาคยืดขยายของ F โดยที่ $F \leqslant E \leqslant K \leqslant \bar{F}$ แล้ว K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของ E และ G(K/E) เป็นกลุ่มย่อยของ G(K/F) ประกอบด้วยฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มทั้งหมดที่ทิ้ง F คงที่ ยิ่งกว่านั้น ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่ม σ และ τ

ใน $G(K/F)$ เป็นเหตุให้เกิดฟังก์ชันถอดแบบแบบเดียวกันของ E ไปยัง $\bar{F}$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันถอดแบบเหล่านั้นอยู่ในโคเซตขวาอันเดียวกันของ $G(K/E)$ ใน $G(K/F)$

พิสูจน์

ถ้า K เป็นสนามแยกส่วนของเซต $\{f_i(x)|i \in I\}$ ของพหุนามใน $F[x]$ แล้ว K เป็นสนามแยกส่วนเหนือ E ของเซตเดียวกันนี้ของพหุนามที่เป็นสมาชิกของ $E[x]$ ทฤษฎี 14.2.1 แสดงว่า K แยกกันได้เหนือ E เนื่องจาก K แยกกันได้เหนือ F ดังนั้น K เป็นภาคยืดขยายปรกติของ E

ทุก ๆ สมาชิกของ $G(K/E)$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ K ทิ้ง F คงที่ แม้ว่ามันจะทิ้งสนาม E ที่ใหญ่กว่าคงที่

ดังนั้น $G(K/E)$ เป็นเซตย่อยของ $G(K/F)$

เนื่องจาก $G(K/E)$ เป็นกลุ่มภายใต้ผลคูณฟังก์ชันด้วย

เราจะเห็นว่า $G(K/E) \leqslant G(K/F)$

ท้ายสุด สำหรับ σ และ τ ใน $G(K/F)$

σ และ τ อยู่ในโคเซตขวาเดียวกันของ $G(K/E)$ ก็ต่อเมื่อ $\tau^{-1}\sigma \in G(K/E)$ หรือก็ต่อเมื่อ $\sigma = \tau\mu$ สำหรับ $\mu \in G(K/E)$

แต่ถ้า $\sigma = \tau\mu$ สำหรับ $\mu \in G(K/E)$ แล้วสำหรับ $\alpha \in E$ เราได้

$$\sigma(\alpha) = \tau(\mu(\alpha)) = \tau(\alpha)$$

เพราะ $\mu(\alpha) = \alpha$ สำหรับ $\alpha \in E$

ในทางตรงข้าม ถ้า $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ สำหรับ $\alpha \in E$ แล้ว

$$\tau^{-1}(\sigma(\alpha)) = \alpha$$

สำหรับ $\forall\alpha \in E$

ดังนั้น $\tau^{-1}\sigma$ ทิ้ง E คงที่ และ $\mu = \tau^{-1}\sigma$ อยู่ใน $G(K/E)$

ทฤษฎีต่อไปจะแสดงว่ามีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างโคเซตขวาของ $G(K/E)$ ใน $G(K/F)$ และฟังก์ชันถอดแบบของ E ทิ้ง F คงที่ ขอให้สังเกตว่า เราไม่สามารถจะพูดได้ว่าโคเซตขวาเหล่านี้สอดคล้องกับฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E เหนือ F เพราะ E อาจไม่ใช่สนามแยกส่วนเหนือ F แน่นอน ถ้า E เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F แล้วฟังก์ชันถอดแบบเหล่านี้จะเป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E เหนือ F นักศึกษาอาจเดาว่าสิ่งนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $G(K/E)$ เป็นกลุ่มย่อยปรกติ (normal subgroup) ของ $G(K/F)$ และนี่เป็นกรณีจริง ๆ ถ้า E เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F แล้ว โคเซตขวาของ $G(K/E)$ ใน $G(K/F)$ สามารถจะอนุโลมให้เป็นสมาชิกของกลุ่มผลหาร (factor group) $G(K/F)/G(K/E)$ ซึ่งก็จะเป็นกลุ่มของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มที่ทำอยู่บน E และทิ้ง F คงที่ เราจะแสดงว่ากลุ่มผลหารนี้ถอดแบบกับ $G(E/F)$

16.3 ทฤษฎีหลัก

(The mian Theory)

ทฤษฎีหลักของกาลัวส์ มีใจความว่า ภาคยืดขยายปรกติจำกัด K ของสนาม F, มีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างกลุ่มย่อยของ $G(K/F)$ และสนาม E ซึ่งเป็นสนามระหว่างกลางโดยที่- $F \leqslant E \leqslant K$ การสมนัยนี้เกี่ยวข้องแต่ละสนาม E ซึ่งเป็นสนามระหว่างกลาง เราสามารถจะศึกษาได้อีกทาง โดยเริ่มต้นด้วยกลุ่มย่อย H ของ $G(K/F)$ และเกี่ยวข้องกับ H สนามคงที่ K_H

ตัวอย่าง 16.3.1 ให้ $K = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $\because$ K เป็นภาคยืดขยายปรกติของ Q และตัวอย่าง 11.2.2 แสดงแล้วว่า มีฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ K ทิ้ง Q คงที่ 4 ฟังก์ชัน ซึ่งเราให้ค่าของมันบนฐาน $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ ของ K เหนือ Q

i คือ identity map

σ_1 ส่ง $\sqrt{2}$ ไปบน $-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ ไปบน $-\sqrt{6}$ และทิ้งตัวอื่น ๆ คงที่

σ_2 ส่ง $\sqrt{3}$ ไปบน $-\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ไปบน $-\sqrt{6}$ และทิ้งตัวอื่น ๆ คงที่

σ_3 ส่ง $\sqrt{2}$ ไปบน $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ไปบน $-\sqrt{3}$ และทิ้งตัวอื่น ๆ คงที่

เราพบแล้วว่า $\{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบไปยัง Klein 4 - group, กลุ่มย่อยที่จับคู่แบบสมนัยกับสนามระหว่างกลาง ซึ่ง leave fixed มีดังนี้

$$\{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leftrightarrow Q$$

$$\{i, \sigma_1\} \leftrightarrow Q(\sqrt{3})$$

$$\{i, \sigma_2\} \leftrightarrow Q(\sqrt{2})$$

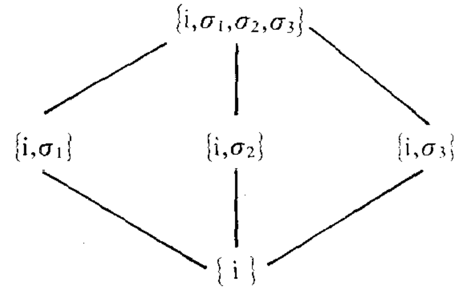
$$\{i, \sigma_3\} \leftrightarrow Q(\sqrt{6})$$

$$\{i\} \leftrightarrow Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

กลุ่มย่อยทั้งหมดของกลุ่มอาบีเลียน $\{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ เป็นกลุ่มย่อยปรกติ และเป็นที่กระจ่างชัดว่า สนามระหว่างกลางทั้งหมดเป็นสนามภาคยืดขยายปรกติของ Q

ขอให้สังเกตว่าถ้ากลุ่มย่อยกลุ่มหนึ่งถูกบรรจุอยู่ในกลุ่มย่อยอื่น ๆ แล้ว กลุ่มที่ใหญ่กว่าของสองกลุ่มย่อยสมนัยกับกลุ่มเล็กกว่าของสองสนามคงที่ซึ่งสมนัย กลุ่มย่อยที่ใหญ่กว่า ซึ่งคือฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มจำนวนมากกว่าสนามเล็กกว่า, สนามคงที่ ซึ่งคือ จำนวนสมาชิกสองสามตัว leave fixed

รูปข้างล่างนี้ เป็นแผนภาพแลตติซ แสดงการสมนัยสำหรับกลุ่มย่อยและสนามระหว่างกลาง ขอให้สังเกตอีกครั้งว่า กลุ่มใกล้ ๆ ยอดสมนัยกับสนามใกล้ ๆ ส่วนล่างสุด นั่นคือ แลตติซหนึ่งคล้าย ๆ กับเป็นตัวผกผันหรือส่วนกลับหัวกลับท้ายของแลตติซอื่น ๆ



แผนภาพแลตติซของกลุ่ม

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = K_{\{i\}} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K_{\{i,\sigma_1\}} = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = K_{\{i,\sigma_2\}} \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) = K_{\{i,\sigma_3\}} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} = K_{\{i,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}} &
\end{tikzcd}
$$

แผนภาพแลตติซของสนาม #

นิยาม ถ้า K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของสนาม F แล้ว G(K/F) เป็นกลุ่มกาลัวส์ของ K เหนือ F (Galois group of K over F)

ทฤษฎี 16.3.1 **ทฤษฎีหลักของกาลัวส์** (Main theorem of Galois Theory)

ให้ K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของสนาม F โดยมี G(K/F) เป็นกลุ่มกาลัวส์, สำหรับสนาม E โดยที่ $F \leqslant E \leqslant K$

ให้ $E\lambda$ เป็นกลุ่มย่อยของ G(K/F) ทิ้ง E คงที่ แล้ว λ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one map) ของเซตของสนาม E ซึ่งเป็นสนามระหว่างกลางทั้งหมดไปบนเซตของกลุ่มย่อยทั้งหมดของ G(K/F). คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับ λ :

1) $E\lambda = G(K/E)$

2) $E = K_{G(K/E)} = K_{E\lambda}$

3) สำหรับ $H \leqslant G(K/F)$, $K_H\lambda = H$

4) $[K : E] = |E\lambda| \leftrightarrow [E : F] = \{G(K/F) : E\lambda\}$, จำนวนโคเซตของ $E\lambda$ ใน G(K/F)

5) E เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F ก็ต่อเมื่อ $E\lambda$ เป็นกลุ่มย่อยปรกติของ $G(K/F)$ เมื่อ $E\lambda$ เป็นกลุ่มย่อยปรกติของ $G(K/F)$ แล้ว

$$G(E/F) \cong G(K/F)/G(K/E)$$

6) แลตทิซของกลุ่มย่อยของ $G(K/F)$ เป็นส่วนผกผันของแลตทิซของสนามระหว่างกลางของ K เหนือ F

แบบฝึกหัดที่ 16

1) จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้

..............ก) สองกลุ่มย่อยที่ต่างกันของกลุ่มกาลัวส์ อาจมีสนามคงที่เดียวกัน

..............ข) ถ้า K เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของ F แล้ว K เป็นภาคยืดขยายปรกติของ E โดยที่ $F \leqslant E \leqslant K$

..............ค) ถ้าภาคยืดขยายปรกติจำกัด E และ L ของสนาม F มีกลุ่มกาลัวส์ถอดแบบ แล้ว $[E : F] = [L : F]$

..............ง) ถ้า E เป็นภาคยืดขยายปรกติจำกัดของ F และ H เป็นกลุ่มย่อยปรกติของ G(E/F) แล้ว E_H เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F

..............จ) ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดปรกติอย่างง่ายของสมการ F แล้วกลุ่มกาลัวส์ G(E/F) เป็น simple group

..............ฉ) ไม่มีกลุ่มกาลัวส์ใดเป็น simple group

..............ช) กลุ่มกาลัวส์ของภาคยืดขยายจำกัดของสนามจำกัด เป็นกลุ่มอาบีเลียน

..............ซ) ภาคยืดขยาย E ที่มีลำดับขั้น 2 เหนือสนาม F เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F เสมอ

..............ฌ) ภาคยืดขยาย E ที่มีลำดับขั้น 2 เหนือสนาม F เป็นภาคยืดขยายปรกติของ F เสมอ ถ้าลักษณะเฉพาะของ F ไม่ใช่ 2

2) จงบรรยายกลุ่มของพหุนาม $(x^4 - 1) \in Q[x]$ เหนือ Q

3) จงบอกลำดับและบรรยายตัวก่อกำเนิดของกลุ่ม G(GF(729)/GF(9))

4) จงยกตัวอย่างของภาคยืดขยายปรกติจำกัด K_1 และ K_2 ของสนาม F เดียวกัน ซึ่ง K_1 และ K_2 ไม่ใช่สนามถอดแบบ แต่ $G(K_1/F) \cong G(K_2/F)$