บทที่ 14
ภาคยืดขยายซึ่งแยกกันได้
(Separable extensions)

14.1 ภาวะรากค่าซ้ำของศูนย์ของพหุนาม
(Multiplicity of zeros of a polynomial)

คงยังจำได้ว่าเราสมมติเสมอว่า ภาคยืดขยายพีชคณิตทั้งหมดของสนาม F ภายใต้การพิจารณานั้น บรรจุอยู่ในสนามปิดพีชคณิตคงที่ $\bar{F}$ ของ F

จุดมุ่งหมายต่อไปของเรา คือ จะกำหนด (สำหรับภาคยืดขยายจำกัด E ของ F) ว่าอะไรเป็นเงื่อนไข $\{E : F\} = [E : F]$ กุญแจที่จะไขคำตอบสำหรับคำถามนี้คือ การพิจารณาภาวะรากค่าซ้ำของศูนย์ของพหุนาม

นิยาม ให้ $f(x) \in F[x]$, สมาชิก α ของ $\bar{F}$ ซึ่ง $f(\alpha) = 0$ เป็นศูนย์ของ $f(x)$ ของภาวะรากค่าซ้ำ ν ถ้า ν เป็นจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่ $(x - \alpha)^{\nu}$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ ใน $F[x]$

ทฤษฎีต่อไป จะแสดงว่าภาวะรากค่าซ้ำของศูนย์ของพหุนามลดทอนไม่ได้อันหนึ่งที่กำหนดให้เหนือสนามทั้งหมดคือ ตัวเดียวกัน

ทฤษฎี 14.1.1	ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ใน $F[x]$ แล้วศูนย์ทั้งหมดของ $f(x)$ ใน $\bar{F}$ มีภาวะรากค่าซ้ำ (multiplicity) เดียวกัน

พิสูจน์

ให้ α และ β เป็นศูนย์ของ $f(x)$ ใน $\bar{F}$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 11.1.1 จะมีฟังก์ชันถอดแบบมูลฐาน

$$\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \xrightarrow{\text{onto}} F(\beta)$$

โดยบทแทรกที่ 1 ของทฤษฎี 12.1.1

$\psi_{\alpha,\beta}$ สามารถจะยืดขยายออกไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบ

$$\tau : \bar{F} \to \bar{F}$$

แล้ว τ เป็นเหตุให้ได้ฟังก์ชันถอดแบบธรรมชาติ

$\tau_x : \bar{F}[x] \to \bar{F}[x]$ โดยที่ $\tau_x(x) = x$

$\therefore$ τ_x ทิ้ง $f(x)$ คงที่

เนื่องจาก $f(x) \in F[x]$ และ $\psi_{\alpha,\beta}$ ทิ้ง F คงที่ อย่างไรก็ตาม

$$\tau_x((x-\alpha)^{\gamma}) = (x-\beta)^{\gamma}$$

ซึ่งแสดงว่า ภาวะรากค่าซ้ำของ β ใน $f(x)$ ใหญ่กว่า หรือเท่ากับภาวะรากค่าซ้ำของ α

โดยวิธีการเดียวกัน เราก็จะได้ในทางกลับกันว่า ภาวะรากค่าซ้ำของ α ใน $f(x)$ ใหญ่กว่าหรือเท่ากับภาวะรากค่าซ้ำของ β #

ดังนั้น ภาวะรากค่าซ้ำของ α และ ของ β เท่ากัน หรือเป็นอันเดียวกัน

บทแทรก

> ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ใน $F[x]$ แล้ว $f(x)$ แยกตัวประกอบใน $\bar{F}[x]$ ซึ่งเขียนได้ในรูป
>
> $$a\underset{i}{\pi}(x - \alpha_i)^{\nu}$$
>
> โดยที่ α_i เป็นศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาดของ $f(x)$ ใน $\bar{F}$ และ $a \in F$

พิสูจน์

สิ่งนี้เป็นผลพลอยได้ที่ตามมาทันทีจากทฤษฎี 14.1.1

ในจุดนี้เราอาจจะแสดงโดยยกตัวอย่างว่า ปรากฏการณ์ของศูนย์ของภาวะรากค่าซ้ำใหญ่กว่า 1 ซึ่งเป็นลำดับขั้นของพหุนามลดทอนไม่ได้จะสามารถปรากฏ เราจะแสดงในภายหลัง (ในหัวข้อนี้) ว่า มันสามารถปรากฏได้สำหรับพหุนามเหนือสนามอนันต์ที่มีลักษณะเฉพาะ $p \neq 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 14.1.1 ให้ $E = Z_p(y)$ โดยที่ y เป็น formal symble (สัญลักษณ์รูปแบบ)

ให้ $t = y^p$

ให้ F เป็นสนามย่อย $Z_p(t)$ ของ E ดังรูป

$$\begin{tikzcd}
E = Z_p(y) = F(y) \arrow[d, dash] \\
F = Z_p(t) = Z_p(y^p) \arrow[d, dash] \\
Z_p
\end{tikzcd}$$

$E = F(y)$ เป็นพีชคณิตเหนือ F

สำหรับ y เป็นศูนย์ของ $(x^p - t) \in F[x]$

โดยทฤษฎี 8.3.1

irr (y, F) จะต้องหาร $x^p - t \in F[x]$ ลงตัว

(แน่นอน irr $(y, F) = x^p - t$)

เนื่องจาก F(y) ไม่เท่ากับ F

เราจะต้องมีลำดับขั้นของ irr $(y, F) \geq 2$

แต่ขอให้สังเกตว่า

$$
\begin{aligned}
x^p - t &= x^p - y^p \\
&= (x - y)^p
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก E มีลักษณะเฉพาะ p

ดังนั้น y เป็นศูนย์ของ irr (y, F) ของภาวะรากค่าซ้ำ > 1

แน่นอน $x^p - t =$ irr (y, F)

ดังนั้น ภาวะรากค่าซ้ำของ y คือ p #

จากนี้ไปเราจะหาความจริงโดยพึ่งพิงอย่างมากกับทฤษฎี 12.2.1 และบทแทรกของมัน, ทฤษฎี 12.1.1 และบทแทรกของมัน แสดงว่า สำหรับภาคยืดขยายพีชคณิตอย่างง่าย $F(\alpha)$ ของ F จะมีการยืดขยายอันหนึ่งของฟังก์ชันถอดแบบ (ที่เป็นเอกลักษณ์) i ส่ง F ไปใน F สำหรับทุก ๆ ศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาด (distinct zero) ของ irr (α, F) และศูนย์เหล่านั้นเป็นการยืดขยายของ i เท่านั้น ดังนั้น $\{F(\alpha) : F\}$ เป็นจำนวนของศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาดของ irr (α, F)

ทฤษฎี 14.1.2 ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F แล้ว $\{E : F\}$ หาร $[E : F]$ ได้ลงตัว

พิสูจน์

โดยทฤษฎี 10.1.3 ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดเหนือ F แล้ว

$E = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ โดยที่ $\alpha_i \in \bar{F}$

ให้ irr (α_i, $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$) มี α_i เป็นหนึ่งในบรรดาศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาด (distinct zeros) ซึ่งทั้งหมดเป็นภาวะรากค่าซ้ำร่วมกัน γ_i โดยทฤษฎี 14.1.1 แล้ว

$$
\begin{aligned}
|F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})| &= n_i\gamma_i \\
&= \{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})\}\ \gamma_i
\end{aligned}
$$

โดยทฤษฎี 10.1.2 และบทแทรกของทฤษฎี 12.2.1

และ $\quad |E : F| = \prod_i n_i\gamma_i$

และ $\quad \{E : F\} = \prod_i n_i$

ดังนั้น $\{E : F\}$ หาร $|E : F|$ ได้ลงตัว

14.2 ภาคยืดขยายซึ่งแยกกันได้

(Separable extension)

นิยาม

ภาคยืดขยายจำกัด E ของ F จะเป็นภาคยืดขยาย ซึ่งแยกกันได้ของ F ถ้า $\{E : F\} = |E : F|$, สมาชิก α ของ $\bar{F}$ จะแยกกันได้ (separable) เหนือ F ถ้า $F(\alpha)$ เป็นภาคยืดขยายซึ่งแยกกันได้ของ F, พหุนามลดทอนไม่ได้ $f(x) \in F[x]$ จะแยกกันได้เหนือ F ถ้าทุก ๆ ศูนย์ของ $f(x)$ ใน $\bar{F}$ แยกกันได้เหนือ F

เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจ ในที่นี้เราจะจำกัดขอบเขตของนิยามของภาคยืดขยายซึ่งแยกกันได้ของสนาม F เฉพาะภาคยืดขยายจำกัด (finite extension) E ของ F

เราทราบว่า $\{F(\alpha) : F\}$ เป็นจำนวนของศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาด (distinct zeros) ของ irr (α, F) เช่นเดียวกันภาวะรากค่าซ้ำของ α ใน irr (α, F) ก็เป็นภาวะรากค่าซ้ำของแต่สังยุคของ α เหนือ F ด้วย โดยทฤษฎี 14.1.1 ดังนั้น α แยกกันได้ (separable) เหนือ F ก็ต่อเมื่อ irr (α, F) มีศูนย์ของภาวะรากค่าซ้ำ 1 ทั้งหมด สิ่งนี้บอกเราทันทีว่าพหุนามลดทอนไม่ได้ $f(x) \in F[x]$ แยกกันได้เหนือ F ก็ต่อเมื่อ f(x) มีศูนย์ของภาวะรากค่าซ้ำของ 1 ทั้งหมด

ทฤษฎี 14.2.1 ถ้า K เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ E และ E เป็นภาคยืดขยายจำกัดอันหนึ่งของ F นั่นคือ $F \leqslant E \leqslant K$ แล้ว K แยกกันได้เหนือ F ก็ต่อเมื่อ K แยกกันได้เหนือ E และ E แยกกันได้เหนือ F

พิสูจน์

$\Rightarrow$ ถ้า $[K : F] = [K : E][E : F]$,

$$\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$$

แล้ว ถ้า K แยกกันได้เหนือ F ดังนั้น $[K : F] = \{K : F\}$ เราจะต้องได้ $[K : E] = \{K : E\}$ และ $[E : F] = \{E : F\}$ เนื่องจากในแต่ละกรณีดรรชนีหารลำดับขั้นลงตัว (the index devides the degree) โดยทฤษฎี 14.1.2 ดังนั้น ถ้า K แยกกันได้เหนือ F แล้ว K ต้องแยกกันได้เหนือ E และ E แยกกันได้เหนือ F

$\Leftarrow$ ในทางกลับกัน ถ้าสำหรับ $[K : E] = \{K : E\}$ และ $[E : F] = \{E : F\}$

แล้ว $[K : F] = [K : E][E : F] = \{K : E\}\{E : F\} = \{K : F\}$ #

บทแทรก ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F แล้ว E แยกกันได้เหนือ F ก็ต่อเมื่อแต่ละ α ใน E แยกกันได้เหนือ F

พิสูจน์

ถ้า E แยกกันได้เหนือ F และให้ $\alpha \in E$ แล้ว

$$F \leqslant F(\alpha) \leqslant E$$

และทฤษฎี 14.2.1 แสดงว่า $F(\alpha)$ แยกกันได้เหนือ F

ในทางกลับกัน ถ้าทุก ๆ $\alpha \in E$ แยกกันได้เหนือ F

เนื่องจาก E เป็นสนามจำกัดเหนือ F, จะมี $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ซึ่ง

$$F < F(\alpha_1) < F(\alpha_1, \alpha_2) < \ldots < E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

ดังนั้น กระจ่างชัดว่าเนื่องจาก α_i แยกกันได้เหนือ F, α_i แยกกันได้เหนือ $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$

เนื่องจาก $q(x) = \text{irr}\,(\alpha_i F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ หาร $\text{irr}\,(\alpha_i, F)$ ลงตัว, ดังนั้น α_i เป็นศูนย์ของ $q(x)$ ของภาวะรากค่าซ้ำ 1

ฉะนั้น $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ แยกกันได้เหนือ $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$

ดังนั้น E แยกกันได้เหนือ F โดยทฤษฎี 14.2.1 (ขยายโดยวิธีอุปมาน) #

14.3 สนามสมบูรณ์แบบ

(Perfect fields)

ในหัวข้อนี้ เราจะพิสูจน์กันว่า α ไม่อาจจะแยกกันได้เหนือ F เมื่อ F เป็นสนามอนันต์ที่มีลักษณะเฉพาะ $p \neq 0$ เท่านั้น

ทฤษฎี 14.3.1 ให้ $\bar{F}$ เป็นสนามปิดพีชคณิตของ F และให้

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

เป็นพหุนามโมนิกใน $\bar{F}[x]$ ถ้า $(f(x))^m \in F[x]$ และ $m \cdot 1 \neq 0$ ใน F แล้ว $f(x) \in F[x]$ นั่นคือ ทุก ๆ $a_i \in F$

พิสูจน์

เราจะต้องแสดงว่า $a_i \in F$ และเราจะดำเนินขบวนการนี้ต่อโดยใช้การอุปมานบน r เพื่อแสดงว่า $a_{n-r} \in F$. สำหรับ $r = 1$

$$(f(x))^m = x^{mn} + (m \cdot 1)a_{n-1}x^{mn-1} + \ldots + a_0^m$$

เนื่องจาก $(f(x))^m \in F[x]$ เราได้ (ในกรณีเฉพาะ)

$$(m \cdot 1)a_{n-1} \in F$$

ดังนั้น $a_{n-1} \in F$ เนื่องจาก $m \cdot 1 \neq 0$ ใน F

ถ้า $a_{n-r} \in F$ สำหรับ $r = 1, 2, \ldots, k$ แล้วสัมประสิทธิ์ของ $x^{mn-(k+1)}$ ใน $(f(x))^m$ อยู่ในรูป

$$(m \cdot 1)a_{n-(k+1)} + g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

โดยที่ $g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ เป็นพหุนาม (formal polynomial) ใน $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ โดยข้อสมมุติทางอุปมาน ได้ว่า

$$g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) \in F$$

ดังนั้น $a_{n-(k+1)} \in F$ เนื่องจาก $m \cdot 1 \neq 0$ ใน F #

ขณะนี้เราจะหาสนาม F ซึ่งมีลักษณะเฉพาะ 0 และแสดงว่า สำหรับภาคยืดขยายจำกัด E ของ F เรามี $\{E : F\} = [E : F]$ โดยนิยาม, ผลรวมนี้จะเป็นการพิสูจน์ว่าทุก ๆ ภาคยืดขยายจำกัดของสนามที่มีลักษณะเฉพาะ 0 เป็นภาคยืดขยายที่แยกกันได้

นิยาม สนามจะเป็นสนามสมบูรณ์แบบ ถ้าทุก ๆ ภาคยืดขยายจำกัดเป็นภาคยืดขยายที่แยกกันได้

ทฤษฎี 14.3.2 ทุก ๆ สนามที่มีลักษณะเฉพาะ 0 เป็นสนามสมบูรณ์แบบ

พิสูจน์

ให้ E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของสนาม F ที่มีลักษณะเฉพาะ 0

และให้ $\alpha \in$ F แล้ว

$f(x) = \text{irr}(\alpha, F)$ แยกตัวประกอบใน $\bar{F}[x]$ เป็น $\pi_i(x - \alpha_i)^\gamma$

โดยที่ α_i เป็นศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาด (distinct zeros) ของ irr (α, F) และถ้าให้ $\alpha = \alpha_1$ แล้ว $f(x) = \pi_i(x - \alpha_i)^\gamma$

และเนื่องจาก $\gamma \cdot 1 = 0$ สำหรับสนาม F ที่มีลักษณะเฉพาะ 0 เราจะต้องได้

$(\pi_i(x - \alpha_i)) \in F[x]$ โดยทฤษฎี 14.3.1

เนื่องจาก f(x) เป็นพหุนามที่ลดทอนไม่ได้ และมีลำดับขั้นน้อยที่สุดใน F[x] ที่มี α เป็นศูนย์

ดังนั้นเราจะเห็นว่า $\gamma = 1$

ด้วยเหตุนี้ α แยกกันได้เหนือ F สำหรับทุก ๆ $\alpha \in$ E

โดยบทแทรกทฤษฎี 14.2.1 เราได้ว่า

E เป็นภาคยืดขยายแยกกันได้ ของ F #

ทฤษฎี 14.3.3 ทุก ๆ สนามจำกัดเป็นสนามสมบูรณ์แบบ

พิสูจน์

ให้ F เป็นสนามจำกัดที่มีลักษณะเฉพาะ p

และให้ E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F

ให้ $\alpha \in E$

เราจำเป็นจะต้องแสดงว่า α แยกกันได้เหนือ F

$\because$ $f(x) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$ แยกตัวประกอบใน $\bar{F}$ ได้เป็น $\pi_i(x - \alpha_i)^\gamma$ โดยที่ α_i เป็นศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาดของ f(x) และให้ $\alpha = \alpha_1$

ให้ $\gamma = p^t e$ โดยที่ p หาร e ไม่ลงตัว แล้ว

$$f(x) = \pi_i(x - \alpha_i)^\gamma = (\pi_i(x - \alpha_i)^{p^t})^e \text{ อยู่ใน } F[x]$$

โดยทฤษฎี 14.3.1 $\pi_i(x - \alpha_i)^{p^t}$ อยู่ใน F[x] เพราะ $e \cdot 1 \neq 0$ ใน F

เนื่องจาก $f(x) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$ มีลำดับขั้นต่ำสุดเหนือ F ที่มี α เป็นศูนย์ เราจะต้องได้ $e = 1$

โดยทฤษฎี 11.3.1 แสดงว่า

$$f(x) = \pi_i(x - \alpha_i)^{p^t} = \pi_i(x^{p^t} - \alpha_i^{p^t})$$

ดังนั้นถ้าเราให้ f(x) เป็น $g(x^{p^t})$ เราจะต้องได้ $g(x) \in F[x]$

$\therefore$ g(x) แยกกันได้เหนือ F โดยมี $\alpha_i^{p^t}$ เป็นศูนย์ที่แยกกันเด็ดขาด

พิจารณา

$F(\alpha_i^{p^t}) = F(\alpha^{p^t})$ แล้ว

$F(\alpha^{p^t})$ แยกกันได้เหนือ F

เนื่องจาก $x^{p^t} - \alpha^{p^t} = (x - \alpha)^{p^t}$

เราจะเห็นว่า α เท่านั้นที่เป็นศูนย์ของ $x^{p^t} \quad \alpha^{p^t}$ ใน $\bar{F}$

$\therefore$ ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด เหนือสนามจำกัด F, $F(\alpha^{p^t})$ จะต้องเป็นสนามจำกัดอีกครั้ง ด้วยเหตุนี้ ฟังก์ชัน

$\sigma_p : F(\alpha^{p^t}) \to F(\alpha^{p^t})$ กำหนดโดย $\sigma_p(a) = a^p$

สำหรับ $a \in F(\alpha^{p^t})$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ $F(\alpha^{p^t})$

ดังนั้น $(\sigma_p)^t$ ก็เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ $F(\alpha^{p^t})$ ด้วย และ

$(\sigma_p)^t(a) = a^{p^t}$

เนื่องจาก ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ $F(\alpha^{p^t})$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

$\therefore$ มี $\beta \in F(\alpha^{p^t})$ ซึ่ง $(\sigma_p)^t(\beta) = \alpha^{p^t}$

ดังนั้น $\beta^{p^t} = \alpha^{p^t}$

และเราจะเห็นแล้วว่า α เท่านั้นที่เป็นศูนย์ของ $x^{p^t} - \alpha^{p^t}$

ดังนั้นเราจะต้องได้ $\beta = \alpha$

เนื่องจาก $\beta \in F(\alpha^{p^t})$ เราได้

$F(\alpha) = F(\alpha^{p^t})$

เนื่องจาก $F(\alpha^{p^t})$ แยกกันได้เหนือ F

เราจะเห็นว่า $F(\alpha)$ ก็แยกกันได้เหนือ F

ดังนั้น α แยกกันได้เหนือ F และ $t = 0$

เราได้แสดงแล้วว่า สำหรับ $\alpha \in E$, α แยกกันได้เหนือ F

แล้วโดยบทแทรกของทฤษฎี 14.2.1 ได้ว่า

E เป็นภาคยืดขยายแยกกันได้เหนือ F #

เราได้บรรลุจุดประสงค์ของเราที่จะแสดงว่าสนามที่มีลักษณะเฉพาะ 0 และเป็นสนามจำกัดจะมีภาคยืดขยายจำกัดแยกกันได้ เท่านั้น นั่นคือ สนามเหล่านี้เป็นสนามสมบูรณ์แบบ

สำหรับภาคยืดขยายจำกัด E ของสนามสมบูรณ์ F ที่ว่านี้ เราได้

$|E : F|_i = |E : F|$ #

แบบฝึกหัดที่ 14

1) จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

..............ก) ทุก ๆ ภาคยืดขยายจำกัดของทุก ๆ สนาม F แยกกันได้เหนือ F

..............ข) ทุก ๆ ภาคยืดขยายจำกัดของทุก ๆ สนามจำกัด F แยกกันได้เหนือ F

..............ค) ทุก ๆ สนามที่มีลักษณะเฉพาะ 0 เป็นสนามสมบูรณ์แบบ

..............ง) ทุก ๆ พหุนามที่มีลำดับขั้น n เหนือทุก ๆ สนาม F จะมีศูนย์ (แยกกันเด็ดขาด) ใน F ทั้งหมด n ตัวเสมอ

..............จ) ทุก ๆ พหุนามที่มีลำดับขั้น nเหนือทุก ๆ สนามสมบูรณ์แบบ F มีศูนย์ (แยกกันเด็ดขาด) ใน F n ตัว เสมอ

..............ฉ) ทุก ๆ พหุนามลดทอนไม่ได้ที่มีลำดับขั้น n เหนือสนามสมบูรณ์แบบ F มีศูนย์ (แยกกันเด็ดขาด) ใน F เสมอ n ตัวเสมอ

..............ช) ทุก ๆ สนามปิดพีชคณิตเป็นสนามสมบูรณ์แบบ

..............ซ) ทุก ๆ สนาม F มีภาคยืดขยายพีชคณิต E ซึ่งเป็นสภาพสมบูรณ์แบบ

..............ฌ) ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายที่แยกส่วน, ซึ่งแยกกันได้และจำกัดของสนาม F แล้ว $|G(E/F)| = [E : F]$

..............ญ) ถ้า E เป็นภาคยืดขยายที่แยกส่วนและจำกัดของ F แล้ว $|G(E/F)|$ หาร $[E : F]$ ได้ลงตัว

2) จงยกตัวอย่าง $f(x) \in Q[x]$ ซึ่งไม่มีศูนย์ใน Q แต่ศูนย์อยู่ใน C