

บทที่ 12

ทฤษฎีการยืดขยาย

ฟังก์ชันถอดแบบ

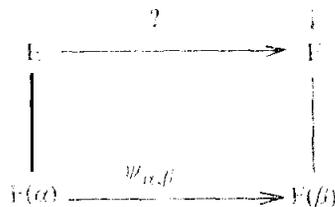
(The isomorphism extension theorem)

ในบทนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของสนามต่ออีก แต่ในบทนี้เราเน้นในเรื่องการมี (existence) และจำนวนของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของสนาม E

12.1 ทฤษฎีการยืดขยาย

(The Extension theorem)

ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายเชิงพีชคณิตของ F และเราต้องการจะหาบางฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E เราทราบทฤษฎีที่ 11.1.1 แล้วว่า ถ้า $\alpha, \beta \in F$ เป็นสัจยุคเหนือ F แล้ว จะมีฟังก์ชันถอดแบบ $\psi_{\alpha, \beta}$ ของ $F(\alpha)$ ไปบน $F(\beta)$ แน่نون $\alpha, \beta \in E \Rightarrow$ ทั้ง $F(\alpha) \leq F \leq E$ และ $F(\beta) \leq F \leq E$ จะเป็นไปเองโดยธรรมชาติที่เราจะสงสัยว่าโดเมนของ $\psi_{\alpha, \beta}$ สามารถจะขยายจาก $F(\alpha)$ ให้ไปสู่สนามที่ใหญ่กว่าได้หรือไม่ อาจจะใหญ่กว่าทุก ๆ F หรืออาจจะนำไปสู่ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E : รูปการส่ง (mapping) ของสถานการณ์นี้เป็นดังนี้

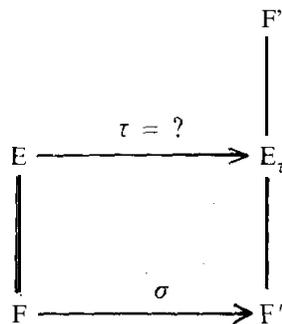


รูป 12.1

แทนที่จะพูดว่าขยาย (enlarge) โดเมนของ $\psi_{\alpha,\beta}$ เรานิยมเรียกว่า การยืดขยายของ $\psi_{\alpha,\beta}$ ไปยัง τ (extending the map $\psi_{\alpha,\beta}$ to a map τ) ซึ่งเป็นการส่งสมาชิกทั้งหมดของ E

คงยังจำได้ว่าเราสมมติว่า ภาคียืดขยายพีชคณิตทั้งหมดของ F ภายใต้การพิจารณาบรรจุอยู่ใน fixed algebraic closure \bar{F} ของ F ทฤษฎีการยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบจะแสดงให้เห็นว่า $\psi_{\alpha,\beta}$ จะสามารถขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปใน \bar{F} ได้เสมอจริง ๆ (ภาคียืดขยายนี้จะให้ฟังก์ชันถอดแบบรวมกลุ่มของ E ไปใน \bar{F} นั่นคือส่ง E ไปบนตัวมันเองหรือไม่ นี่เป็นคำถามซึ่งเราจะศึกษากันในบทที่ 13) ดังนั้นทฤษฎีภาคียืดขยายนี้ ใช้ร่วมกับฟังก์ชันถอดแบบ $\psi_{\alpha,\beta}$ จะประกันการมีของฟังก์ชันถอดแบบมากมาย

ถ้า E เป็นภาคียืดขยายพีชคณิตของสนาม F และเรามีฟังก์ชันถอดแบบ σ ของ F ไปบนสนาม F' ให้ F' เป็น algebraic closure ของ F' เราต้องการจะขยาย σ ไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปยัง F' (สถานการณ์นี้แสดงได้ด้วยรูปข้างล่างนี้)



รูป 12.2

เราหยิบ $\alpha \in E$ แต่ไม่อยู่ใน F และพยายามจะขยาย σ ไปยัง $F(\alpha)$

ถ้า $p(x) = \text{irr}(\alpha, F)$

$$= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

ให้ β เป็นศูนย์ใน F' ของ

$$q(x) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \dots + \sigma(a_n)x^n$$

$$\therefore q(x) \in F'[x]$$

เนื่องจาก σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบ

$$\therefore q(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ใน } F'[x]$$

$\therefore F(\alpha)$ สามารถจะถูกส่ง (อย่างถอดแบบ) ไปบน $F'(\beta)$ โดย (การยืดขยาย) σ และส่ง α ไปบน β

ถ้า $F(\alpha) = E$ เราได้ทำเสร็จ (we are done)

ถ้า $F(\alpha) \neq E$ เราจะต้องหาสมาชิกตัวอื่นใน E ซึ่งไม่อยู่ใน $F(\alpha)$ และดำเนินการตามต่อไป

สถานการณ์นี้คล้ายคลึงกันมากกับการสร้างสนามปิดพีชคณิต F' ของสนาม F

อุปสรรค คือ โดยทั่ว ๆ ไป ที่ E ไม่ใช่ภาคยืดขยายจำกัด ขบวนการอาจจะต้องทำซ้ำเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง

ทฤษฎี 12.1.1 (ทฤษฎีการยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบ)

ให้ E เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของสนาม F

ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปบนสนาม F'

ให้ F' เป็นสนามปิดพีชคณิตของ F'

แล้ว σ สามารถจะขยายขึ้นไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปใน

$$F' \ni \tau(a) = \sigma(a) \text{ สำหรับทุก } a \in F$$

บทแทรก 1

ถ้า $E \leq \bar{F}$ เป็นภาคย่อยขยายพีชคณิตของสนาม F และ $\alpha, \beta \in E$ เป็นสังยุคเหนือ F แล้ว ฟังก์ชันถอดแบบมูลฐาน $\psi_{\alpha, \beta}: F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ สามารถจะขยายออกเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปยัง \bar{F}

พิสูจน์

บทแทรกนี้เป็นผลที่ได้มาจากทฤษฎี 12.1.1 โดยที่ถ้าเราแทนที่ F ในทฤษฎี 12.1.1 ด้วย $F(\alpha)$, F' ด้วย $F(\beta)$ และ \bar{F}' ด้วย \bar{F} ก็จะได้ข้อความของบทแทรกที่ 1 นี้

#

บทแทรก 2

ให้ \bar{F} และ \bar{F}' เป็น 2 algebraic closure ของ F แล้ว \bar{F} เป็นกลุ่มถอดแบบกับ \bar{F}' ภายใต้ฟังก์ชันถอดแบบ ซึ่ง leave fixed แต่ละสมาชิกของ F

พิสูจน์

โดยทฤษฎี 12.1.1 ฟังก์ชันถอดแบบเอกลักษณ์ของ F ไปบน F

สามารถจะขยายขึ้นเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ส่ง \bar{F} ไปใน \bar{F}'

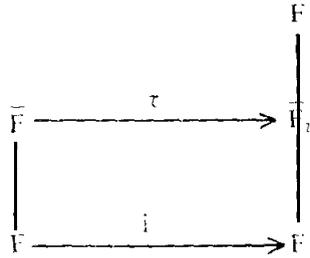
ซึ่ง leave fixed F (ตามรูปข้างล่าง)

เราจำเป็นต้องแสดงเพียงว่า τ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

แต่โดยทฤษฎี 12.1.1 การส่ง $\tau^{-1}: \bar{F}' \rightarrow \bar{F}$ สามารถจะขยายขึ้นไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ \bar{F}' ไปใน \bar{F}

เนื่องจาก τ^{-1} เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

\therefore เราจะต้องได้ว่า $\bar{F}' = \bar{F}$



รูป 12.3

12.2 ดรรชนีของการยืดยาวสนาม

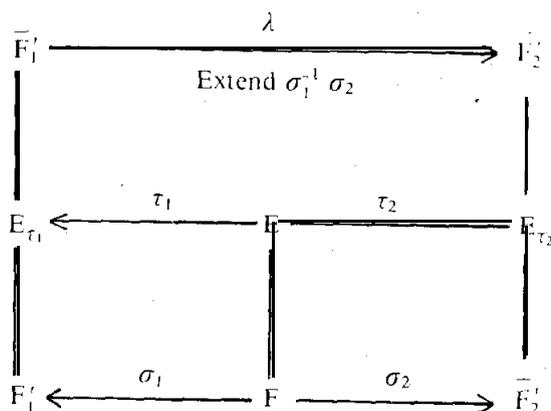
(The index of a field extension)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้พิจารณาในเรื่องการมีของการยืดยาวของฟังก์ชันถอดแบบ รวบรวมกลุ่มของสนามไปแล้ว ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณากันถึง “จำนวน” เท่าไร สำหรับสนาม ภาดยืดยาวจำกัด E ของสนาม F เราต้องการจะนับจำนวนฟังก์ชันถอดแบบ ซึ่งมีจาก E ไปใน \bar{F} ซึ่งทิ้ง F คงที่ (leave F fixed) เราจะแสดงว่ามีฟังก์ชันถอดแบบอย่างนี้เพียงจำนวนจำกัด เท่านั้น เนื่องจากทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบรวบรวมกลุ่มใน $G(E/F)$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบเช่นว่านี้ การนับจำนวนฟังก์ชันถอดแบบจะรวมฟังก์ชันถอดแบบรวบรวมกลุ่มเหล่านี้ทั้งหมดด้วย จากตัวอย่าง 11.2.2 แสดงให้เห็นว่า $G(Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})/Q)$ มีสมาชิก 4 ตัว และ $4 = |Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q|$ ในขณะที่ สมการนี้ไม่จริงเสมอไป จะจริงในกรณีสำคัญมาก ๆ ทฤษฎีต่อมานี้จะให้ขั้นแรกที่ใหญ่ในการ พิสูจน์ความจริงนี้ เราจะเขียนทฤษฎีในทอมทั่ว ๆ ไปมากกว่าที่เราจำเป็นจะต้องใช้ แต่ไม่ได้ ทำให้การพิสูจน์ยากขึ้น

ทฤษฎี 12.2.1

ให้ E เป็นสนามภาคยึดขยายจำกัดของสนาม F ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปยังสนาม F' และให้ \bar{F}' เป็น algebraic closure ของ F' แล้วจำนวนของการมีของ σ ต่อฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปยัง \bar{F}' เป็นจำนวนจำกัด และ F', \bar{F}', σ เป็นอิสระ นั่นคือ จำนวนของการมีนี้กำหนดอย่างเต็มที่โดยสนาม E และ F มันเป็นเนื้อแท้ของมัน

พิสูจน์



รูป 12.4

รูปข้างบนอาจจะช่วยให้นักศึกษาติดตามการสร้างที่เราจะทำ รูปนี้สร้างขึ้นตามทางดังต่อไปนี้

พิจารณาฟังก์ชันถอดแบบ 2 ฟังก์ชัน

$$\sigma_1: F \xrightarrow{\text{onto}} F'_1, \quad \sigma_2: F \xrightarrow{\text{onto}} F'_2$$

โดยที่ \bar{F}_1 และ \bar{F}_2 เป็น algebraic closure ของ F_1 และ F_2 ตามลำดับ

σ_1, σ_2 เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F_1 -onto F_2

โดยทฤษฎี 12.1.1 และบทแทรกที่ 2 ของทฤษฎี 12.1.1

จะมีฟังก์ชันถอดแบบ

$$\lambda: \bar{F}_1 \xrightarrow{\text{onto}} \bar{F}_2$$

ยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบนี้ $\sigma_1^{-1}\sigma_2: F_1 \xrightarrow{\text{onto}} F_2$

ตามรูป 12.4 สมัยกับแต่ละ $\tau_1: E \rightarrow \bar{F}_1$ ซึ่งยืดขยาย σ_1

เราจะได้ฟังก์ชันถอดแบบ $\tau_2: E \rightarrow \bar{F}_2$ โดยเริ่มต้นที่ E และไปทางซ้ายต่อไปข้างบนแล้ว
ต่อไปทางขวา เขียนในทางพีชคณิตจะได้

$$\tau_2(\alpha) = \lambda\tau_1(\alpha)$$

สำหรับ $\alpha \in E$

τ_2 ยืดขยาย σ_2

ได้ความจริงว่า เราสามารถจะเริ่มต้นตัว τ_2 และสามารถคลุ่ τ_1 โดยการกำหนด

$$\tau_1(\alpha) = \lambda^{-1}\tau_2(\alpha)$$

นั่นคือ โดยการใส่วิธีอื่น ๆ รอบรูป แสดงว่า การสมนัยระหว่าง $\tau_1: E \rightarrow \bar{F}_1$ และ $\tau_2: E \rightarrow \bar{F}_2$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ในแง่ที่ว่าเป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งนี้ จำนวน τ ที่ยืดขยาย σ เป็น
อิสระกันระหว่าง F, \bar{F} และ σ

จำนวนการส่งการยืดขยาย σ เป็นจำนวนจำกัดได้ตามมาจากความจริงที่ว่า เนื่องจาก E เป็นภาคียืดขยายจำกัดของ $F, E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ สำหรับ บาง $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ใน E ดังนั้น จะมี
จำนวนของสมาชิกที่จะเป็นภาพ (image) ของ $\tau(\alpha_i)$ ใน \bar{F} เพียงจำนวนจำกัด

สำหรับ ถ้า $\text{irr}(\alpha_i, F) = a_{i_0} + a_{i_1}x + \dots + a_{i_{m_i}}x^{m_i}$ โดยที่ $a_{i_k} \in F$ แล้ว $\tau(\alpha_i)$ จะต้องเป็น
หนึ่งในบรรดาศูนย์ใน \bar{F} ของ

$$|\sigma(a_{i_0}) + \sigma(a_{i_1})x + \dots + \sigma(a_{i_{m_i}})x^{m_i}| \in F'[x] \quad \#$$

นิยาม

ให้ E เป็นสนามภาคยึดขยายจำกัดของสนาม F จำนวนฟังก์ชันถอดแบบ
ของ E ไปใน \bar{F} ซึ่งทิ้ง F คงที่ คือ ดรรชนี $\{E : F\}$ ของ E เหนือ F

บทแทรก

ถ้า $F \leq E \leq K$ โดยที่ K เป็นสนามภาคยึดขยายจำกัดสนามหนึ่งของสนาม-
 F แล้ว $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$

พิสูจน์

จากทฤษฎี 12.2.1 แต่ละ $\{E : F\}$ ฟังก์ชันถอดแบบ $\tau_i : E \rightarrow \bar{F}$ ทิ้ง F คงที่ มี $\{K : E\}$ ยึดขยาย
ฟังก์ชันถอดแบบของ K ไปใน \bar{F} #

ตัวอย่าง 12.2.1 พิจารณา $E = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ เหนือ Q ดังตัวอย่าง 11.2.2

จากตัวอย่าง 11.2.2 แสดงว่า

$$\{E : Q\} = [E : Q] = 4$$

$$\text{และ } \{E : Q(\sqrt{2})\} = 2$$

$$\text{และ } \{Q(\sqrt{2}) : Q\} = 2$$

$$\text{ดังนั้น } 4 = \{E : Q\} = \{E : Q(\sqrt{2})\}\{Q(\sqrt{2}) : Q\} = (2)(2)$$

แบบฝึกหัดที่ 12

- 1) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ
-ก) ให้ $F(\alpha)$ เป็นภาคยึดขยายอย่างง่ายของสนาม F แล้วทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน \bar{F} มีการยึดขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ $F(\alpha)$ ไปใน \bar{F}
-ข) ให้ $F(\alpha)$ เป็นภาคยึดขยายพีชคณิตอย่างง่ายของสนาม F แล้วทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน \bar{F} มีการยึดขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ $F(\alpha)$ ไปใน \bar{F}
-ค) ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน \bar{F} มีจำนวนการยึดขยายไปแต่ละภาคยึดขยายพีชคณิตอย่างง่ายจำนวนเดียวกัน
-ง) algebraic closure ของสนามของฟังก์ชันถอดแบบ ถอดแบบกันเสมอ
-จ) algebraic closure ของสนามของฟังก์ชันซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันถอดแบบ จะไม่ถอดแบบกันเลย
-ฉ) algebraic closure ใด ๆ ของ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ถอดแบบกับ algebraic closure ใด ๆ ของ $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
-ช) ดรรชนีของภาคยึดขยายจำกัด E เหนือสนาม F เป็นจำนวนจำกัด
- 2) ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ $\mathbb{Q}(\pi)$ ซึ่งส่ง π ไปบน $-\pi$ จงบรรยาย
- ก) สนามคงที่ของ σ
- ข) การยึดขยายทั้งหมดของ σ ไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบที่ส่งสนาม $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ ไปใน $\mathbb{Q}(\pi)$