บทที่ 12
ทฤษฎีการยืดขยาย
ฟังก์ชันถอดแบบ
(The isomorphism extension theorem)

ในบทนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของสนามต่ออีก แต่ในบทนี้เราเน้นในเรื่องการมี (existence) และจำนวนของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของสนาม E

12.1 ทฤษฎีการยืดขยาย
(The Extension theorem)

ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายเชิงพีชคณิตของ F และเราต้องการจะหาบางฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E เราทราบทฤษฎีที่ 11.1.1 แล้วว่า ถ้า $\alpha, \beta \in F$ เป็นสังยุคเหนือ F แล้ว จะมีฟังก์ชันถอดแบบ $\psi_{\alpha,\beta}$ ของ $F(\alpha)$ ไปบน $F(\beta)$ แน่นอน $\alpha, \beta \in E \Rightarrow$ ทั้ง $F(\alpha) \leqslant F$ E และ $F(\beta) \leqslant E$ จะเป็นไปเองโดยธรรมชาติที่เราจะสงสัยว่าโดเมนของ $\psi_{\alpha,\beta}$ สามารถจะขยายจาก $F(\alpha)$ ให้ไปสู่สนามที่ใหญ่กว่าได้หรือไม่ อาจจะใหญ่กว่าทุก ๆ E หรืออาจจะนำไปสู่ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E รูปการส่ง (mapping) ของสถานการณ์นี้เป็นดังนี้

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "?"] \arrow[d, dash] & \bar{F} \arrow[d, dash] \\ F(\alpha) \arrow[r, "\psi_{\alpha,\beta}"] & F(\beta) \end{tikzcd}$$

รูป 12.1

แทนที่จะพูดว่าขยาย (enlarge) โดเมนของ $\psi_{\alpha,\beta}$ เรานิยมเรียกว่า การยืดขยายของ $\psi_{\alpha,\beta}$ ไปยัง τ (extending the map $\psi_{\alpha,\beta}$ to a map τ) ซึ่งเป็นการส่งสมาชิกทั้งหมดของ E

คงยังจำได้ว่าเราสมมติว่า ภาคยืดขยายพีชคณิตทั้งหมดของ F ภายใต้การพิจารณาบรรจุอยู่ใน fixed algebraic closure $\bar{F}$ ของ F ทฤษฎีการยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบจะแสดงให้เราเห็นว่า $\psi_{\alpha,\beta}$ จะสามารถขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปใน F ได้เสมอจริง ๆ (ภาคยืดขยายนี้จะให้ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ E ไปใน F นั่นคือส่ง E ไปบนตัวมันเองหรือไม่ นี่เป็นคำถามซึ่งเราจะศึกษากันในบทที่ 13) ดังนั้นทฤษฎีภาคยืดขยายนี้ ใช้ร่วมกับฟังก์ชันถอดแบบ $\psi_{\alpha,\beta}$ จะประกันการมีของฟังก์ชันถอดแบบมากมาย

ถ้า E เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของสนาม F และเรามีฟังก์ชันถอดแบบ σ ของ F ไปบนสนาม F′ ให้ F′ เป็น algebraic closure ของ F′ เราต้องการจะขยาย σ ไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปยัง $\bar{F}'$ (สถานการณ์นี้แสดงได้ด้วยรูปข้างล่างนี้)

$$\begin{tikzcd}
 & F' \arrow[d, no head] \\
E \arrow[r, "\tau = ?"] \arrow[d, no head] & E_\tau \arrow[d, no head] \\
F \arrow[r, "\sigma"] & F'
\end{tikzcd}$$

รูป 12.2

เราหยิบ $\alpha \in E$ แต่ไม่อยู่ใน F และพยายามจะขยาย σ ไปยัง $F(\alpha)$

ถ้า $p(x) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$

$= a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

ให้ β เป็นศูนย์ใน $\bar{F}'$ ของ

$$q(x) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \ldots + \sigma(a_n)x^n$$

$\therefore q(x) \in F'[x]$

เนื่องจาก σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบ

$\therefore$ q(x) เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ใน $F'[x]$

$\therefore$ $F(\alpha)$ สามารถจะถูกส่ง (อย่างถอดแบบ) ไปบน $F'(\beta)$ โดย (การยืดขยาย) σ และส่ง α ไปบน β

ถ้า $F(\alpha) = E$ เราได้ทำเสร็จ (*we are done*)

ถ้า $F(\alpha) \neq E$ เราจะต้องหาสมาชิกตัวอื่นใน E ซึ่งไม่อยู่ใน $F(\alpha)$ และดำเนินขบวนการต่อไป

สถานการณ์นี้คล้ายคลึงกันมากกับการสร้างสนามปิดพีชคณิต $\bar{F}$ ของสนาม F

อุปสรรค คือ โดยทั่ว ๆ ไป ที่ E ไม่ใช่ภาคยืดขยายจำกัด ขบวนการอาจจะต้องทำซ้ำเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง

ทฤษฎี 12.1.1 (ทฤษฎีการยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบ)

> ให้ E เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของสนาม F
> ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปบนสนาม F'
> ให้ $\bar{F}'$ เป็นสนามปิดพีชคณิตของ F'
> แล้ว σ สามารถจะขยายขึ้นไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปใน $\bar{F}' \ni \tau(a) = \sigma(a)$ สำหรับทุก ๆ $a \in F$

บทแทรก 1

ถ้า $E \leqslant \bar{F}$ เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของสนาม F และ $\alpha, \beta \in E$ เป็นสังยุคเหนือ F แล้ว ฟังก์ชันถอดแบบมูลฐาน $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ สามารถจะขยายออกเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปยัง $\bar{F}$

พิสูจน์

บทแทรกนี้เป็นผลที่ได้มาจากทฤษฎี 12.1.1 โดยที่ถ้าเราแทนที่ F ในทฤษฎี 12.1.1 ด้วย $F(\alpha)$, F' ด้วย $F(\beta)$ และ $\bar{F}'$ ด้วย $\bar{F}$ ก็จะได้ข้อความของบทแทรกที่ 1 นี้

#

บทแทรก 2

ให้ $\bar{F}$ และ $\bar{F}'$ เป็น 2 algebraic closure ของ F แล้ว $\bar{F}$ เป็นกลุ่มถอดแบบกับ $\bar{F}'$ ภายใต้ฟังก์ชันถอดแบบ ซึ่ง leave fixed แต่ละสมาชิกของ F

พิสูจน์

โดยทฤษฎี 12.1.1 ฟังก์ชันถอดแบบเอกลักษณ์ของ F ไปบน F
สามารถจะขยายขึ้นเป็นฟังก์ชันถอดแบบ τ ส่ง $\bar{F}$ ไปใน $\bar{F}'$
ซึ่ง leave fixed F (ตามรูปข้างล่าง)
เราจำเป็นจะต้องแสดงเพียงว่า τ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

แต่โดยทฤษฎี 12.1.1 การส่ง $\tau^{-1} : \bar{F}_\tau \to \bar{F}$ สามารถจะขยายขึ้นไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ $\bar{F}'$ ไปใน $\bar{F}$

เนื่องจาก τ^{-1} เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

$\therefore$ เราจะต้องได้ว่า $\bar{F}_\tau = \bar{F}'$

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[d, dash] \\ \bar{F} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dash] & \bar{F}_{\tau} \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "i"] & F \end{tikzcd}$$

รูป 12.3

12.2 ดรรชนีของการยึดขยายสนาม

(The index of a field extension)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้พิจารณาในเรื่องการมีของการยึดขยายของฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของสนามไปแล้ว ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณากันถึง "จำนวน" เท่าไร สำหรับสนามภาคยึดขยายจำกัด E ของสนาม F เราต้องการจะนับจำนวนฟังก์ชันถอดแบบ ซึ่งมีจาก E ไปใน $\bar{F}$ ซึ่งทิ้ง F คงที่ (leave F fixed) เราจะแสดงว่ามีฟังก์ชันถอดแบบอย่างนี้เพียงจำนวนจำกัดเท่านั้น เนื่องจากทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มใน G(E/F) เป็นฟังก์ชันถอดแบบเช่นว่านี้, การนับจำนวนฟังก์ชันถอดแบบจะรวมฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มเหล่านี้ทั้งหมดด้วย จากตัวอย่าง 11.2.2 แสดงให้เห็นว่า $G(Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})/Q)$ มีสมาชิก 4 ตัว และ $4 = |Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q|$ ในขณะที่สมการนี้ไม่จริงเสมอไป จะจริงในกรณีสำคัญมาก ๆ ทฤษฎีต่อมานี้จะให้ขั้นแรกที่ใหญ่ในการพิสูจน์ความจริงนี้ เราจะเขียนทฤษฎีในเทอมทั่ว ๆ ไปมากกว่าที่เราจำเป็นจะต้องใช้ แต่ไม่ได้ทำให้การพิสูจน์ยากขึ้น

ทฤษฎี 12.2.1	ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของสนาม F ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปยังสนาม F' และให้ $\overline{F}'$ เป็น algebraic closure ของ F' แล้วจำนวนของการมีของ σ ต่อฟังก์ชันถอดแบบ τ ของ E ไปยัง $\overline{F}'$ เป็นจำนวนจำกัด และ F', $\overline{F}'$, σ เป็นอิสระ นั่นคือ จำนวนของการมีนี้กำหนดอย่างเต็มที่โดยสนาม E และ F มันเป็นเนื้อแท้ของมัน

พิสูจน์

$$
\begin{tikzcd}
\overline{F}_1' \arrow[rr, "\lambda", "\text{Extend } \sigma_1^{-1}\sigma_2"'] \arrow[d, dash] & & \overline{F}_2' \arrow[d, dash] \\
E_{\tau_1} \arrow[d, dash] & E \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[r, dash, "\tau_2"] \arrow[d, dash] & E_{\tau_2} \arrow[d, dash] \\
F_1' & F \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & \overline{F}_2'
\end{tikzcd}
$$

รูป 12.4

รูปข้างบนอาจจะช่วยให้นักศึกษาติดตามการสร้างที่เราจะทำ รูปนี้สร้างขึ้นตามทางดังต่อไปนี้

พิจารณาฟังก์ชันถอดแบบ 2 ฟังก์ชัน

$$\sigma_1 : F \xrightarrow{\text{onto}} F_1' \ , \quad \sigma_2 : F \xrightarrow{\text{onto}} F_2'$$

โดยที่ $\bar{F}_1'$ และ $\bar{F}_2'$ เป็น algebraic closure ของ F_1' และ F_2' ตามลำดับ

$\sigma_1^{-1}\sigma_2$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบของ F_1' onto F_2'

โดยทฤษฎี 12.1.1 และบทแทรกที่ 2 ของทฤษฎี 12.1.1

จะมีฟังก์ชันถอดแบบ

$$\lambda : \bar{F}_1' \xrightarrow{\text{onto}} \bar{F}_2'$$

ยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบนี้ $\sigma_1^{-1}\sigma_2 : F_1' \xrightarrow{\text{onto}} F_2'$

ตามรูป 12.4 สมนัยกับแต่ละ $\tau_1 : E \to \bar{F}_1'$ ซึ่งยืดขยาย σ_1

เราจะได้ฟังก์ชันถอดแบบ $\tau_2 : E \to \bar{F}_2'$ โดยเริ่มต้นที่ E และไปทางซ้ายต่อไปข้างบนแล้วต่อไปทางขวา เขียนในทางพีชคณิตจะได้

$$\tau_2(\alpha) = \lambda\tau_1(\alpha)$$

สำหรับ $\alpha \in E$

τ_2 ยืดขยาย σ_2

ได้ความจริงว่า เราสามารถจะเริ่มต้นตัว τ_2 และสามารถคลุม τ_1 โดยการกำหนด

$$\tau_1(\alpha) = \lambda^{-1}\tau_2(\alpha)$$

นั่นคือ โดยการไล่วิธีอื่น ๆ รอบรูป แสดงว่า การสมนัยระหว่าง $\tau_1 : E \to \bar{F}_1'$ และ $\tau_2 : E \to \bar{F}_2'$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ในแง่ที่ว่าเป็นการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งนี้ จำนวน τ ที่ยืดขยาย σ เป็นอิสระกันระหว่าง F', $\bar{F}'$ และ σ

จำนวนการส่งการยืดขยาย σ เป็นจำนวนจำกัดได้ตามมาจากความจริงที่ว่า เนื่องจาก E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F, $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ สำหรับ บาง $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ใน E ดังนั้น จะมีจำนวนของสมาชิกที่จะเป็นภาพ (image) ของ $\tau(\alpha_i)$ ใน $\bar{F}'$ เพียงจำนวนจำกัด

สำหรับ ถ้า $\operatorname{irr}(\alpha_i, F) = a_{i_0} + a_{i_0}x + \ldots + a_{i_{m_i}}x^{m_i}$ โดยที่ $a_{i_k} \in F$ แล้ว $\tau(\alpha_i)$ จะต้องเป็นหนึ่งในบรรดาศูนย์ใน $\bar{F}'$ ของ

$$[\sigma(a_{i_0}) + \sigma(a_{i_1})x + \ldots + \sigma(a_{i_{m_i}})x^{m_i}] \in F'[x]$$ #

นิยาม ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของสนาม F จำนวนฟังก์ชันถอดแบบของ E ไปใน $\bar{F}$ ซึ่งทิ้ง F คงที่ คือ ดรรชนี $\{E : F\}$ ของ E เหนือ F

บทแทรก ถ้า $F \leqslant E \leqslant K$ โดยที่ K เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดสนามหนึ่งของสนาม-F แล้ว $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$

พิสูจน์

จากทฤษฎี 12.2.1 แต่ละ $\{E : F\}$ ฟังก์ชันถอดแบบ $\tau_i : E \to \bar{F}$ ทิ้ง F คงที่ มี $\{K : E\}$ ยืดขยายฟังก์ชันถอดแบบของ K ไปใน $\bar{F}$ #

ตัวอย่าง 12.2.1 พิจารณา $E = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ เหนือ Q ดังตัวอย่าง 11.2.2

จากตัวอย่าง 11.2.2 แสดงว่า

$$\{E : Q\} = [E : Q] = 4$$

และ $\{E : Q(\sqrt{2})\} = 2$

และ $\{Q(\sqrt{2}) : Q\} = 2$

ดังนั้น $4 = \{E : Q\} = \{E : Q(\sqrt{2})\}\{Q(\sqrt{2}) : Q\} = (2)(2)$

แบบฝึกหัดที่ 12

1) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ

..............ก) ให้ $F(\alpha)$ เป็นภาคยืดขยายอย่างง่ายของสนาม F แล้วทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน $\bar{F}$ มีการยืดขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ $F(\alpha)$ ไปใน $\bar{F}$

..............ข) ให้ $F(\alpha)$ เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตอย่างง่าของสนาม F แล้วทุก ๆ ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน $\bar{F}$ มีการยืดขยายไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบของ $F(\alpha)$ ไปใน $\bar{F}$

..............ค) ฟังก์ชันถอดแบบของ F ไปใน $\bar{F}$ มีจำนวนการยืดขยายไปแต่ละภาคยืดขยายพีชคณิตอย่างง่ายจำนวนเดียวกัน

..............ง) algebraic closure ของสนามของฟังก์ชันถอดแบบ ถอดแบบกันเสมอ

..............จ) algebraic closure ของสนามของฟังก์ชันซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันถอดแบบ จะไม่ถอดแบบกันเลย

..............ฉ) algebraic closure ใด ๆ ของ $Q(\sqrt{2})$ ถอดแบบกับ algebraic closure ใด ๆ ของ $Q(\sqrt{17})$

..............ช) ดรรชนีของภาคยืดขยายจำกัด E เหนือสนาม F เป็นจำนวนจำกัด

2) ให้ σ เป็นฟังก์ชันถอดแบบร่วมกลุ่มของ $Q(\pi)$ ซึ่งส่ง π ไปบน $-\pi$ จงบรรยาย

ก) สนามคงที่ของ σ

ข) การยืดขยายทั้งหมดของ σ ไปเป็นฟังก์ชันถอดแบบที่ส่งสนาม $Q(\sqrt{\pi})$ ไปใน $Q(\pi)$