บทที่ 10
ภาคยืดขยายพีชคณิต
Algebraic Extension

ในทฤษฎี 9.3.4 เราได้เห็นแล้วว่า ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และ $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F แล้วสมาชิกทุกตัวของ $F(\alpha)$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F ในการศึกษาเรื่องศูนย์ (zero) ของพหุนามใน $F[x]$ เราจะต้องให้ความสนใจเกือบทั้งหมดเป็นพิเศษในภาคยืดขยายของ F ที่ประกอบด้วยสมาชิกพีชคณิตเท่านั้น

10.1 ภาคยืดขยายจำกัด

(Finite extensions)

นิยาม สนามภาคยืดขยาย E ของสนาม F จะเป็นภาคยืดขยายพีชคณิต (algebraic extension) ของ F เมื่อสมาชิกทุก ๆ ตัว ใน E เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

นิยาม ถ้าสนามภาคยืดขยาย E ของสนาม F เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F ที่มีมิติจำกัด n (finite dimension n) แล้ว E เป็นภาคยืดขยายจำกัดลำดับขั้น n เหนือ F (finite extension of degree n over F) เราจะให้ $[E : F]$ เป็นลำดับขั้น n ของ E เหนือ F

บ่อยครั้งเราจะใช้ความจริงที่ว่า ถ้า E เป็นภาคยืดขยายจำกัดของ F แล้ว $[E:F] = 1$ ก็ต่อเมื่อ $E = F$ เราจำเป็นจะต้องสังเกตดูแต่เพียงว่า โดยทฤษฎี 9.3.3 {1} สามารถจะขยายไปเป็นฐานสำหรับ E เหนือ F เสมอ แล้ว $[E:F] = 1 \Rightarrow E = F(1) = F$

ขอทบทวนข้อโต้แย้งของทฤษฎี 9.3.4 เพื่อแสดงว่า ภาคยืดขยายจำกัด E ของสนาม F จะต้องเป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

ทฤษฎี 10.1.1	สนามภาคยืดขยายจำกัด E ของสนาม F เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

พิสูจน์

เราจะต้องแสดงว่า สำหรับ $\alpha \in F$, α เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

โดยทฤษฎี 9.3.3

ถ้า $[E:F] = n$ แล้ว สมาชิก $n + 1$ ตัว

$1, \alpha, \ldots, \alpha^n$

ไม่สามารถเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

ดังนั้น จะมี $a_i \in F \ni$

$a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + \ldots + a_0 = 0$

และไม่ทุก $a_i = 0$ แล้ว

$f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \neq 0$ ใน $F[x]$

และ $f(a) = 0$

$\therefore a$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

ทฤษฎี 10.1.2 ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของสนาม F และ K เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของสนาม E แล้ว K เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของสนาม F และ $[K : F] = [K : E][E : F]$

พิสูจน์

ให้ $\{\alpha_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นฐานสำหรับ E ซึ่งเป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ F

ให้ $\{\beta_j | j = 1, 2, \ldots, m\}$ เป็นฐานสำหรับ K ซึ่งเป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ E

ข้อพิสูจน์ของทฤษฎีจะสมบูรณ์ ถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า สมาชิก mn ตัว $\alpha_i\beta_j$ เป็นฐานสำหรับ K

ให้ γ เป็นสมาชิกใด ๆ ของ K

เนื่องจาก β_j เป็นฐานสำหรับ K เหนือ E

$$\therefore \gamma = \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j \quad \text{สำหรับ } b_j \in E$$

เนื่องจาก α_i เป็นฐานสำหรับ E เหนือ F

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i \quad \text{สำหรับ } a_{ij} \in F$$

$$b_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_i \right)\beta_j$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij}(\alpha_i\beta_j)$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\alpha_i\beta_j$ (mn ตัว) ก่อกำเนิด (span) K เหนือ F

ต่อไปนี้เหลือแต่เพียงจะต้องแสดงให้ได้ว่า สมาชิก $\alpha_i\beta_j$ ทั้ง mn ตัว เป็นอิสระต่อกันเหนือ F

ถ้า $\sum_{i,j} c_{ij}(\alpha_i\beta_j) = 0$ โดยที่ $c_{ij} \in F$ แล้ว

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i \right)\beta_j = 0$$

และ $\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i \right) \in E$

เนื่องจาก β_j เป็นอิสระต่อกัน เหนือ E

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0 \quad \forall j$$

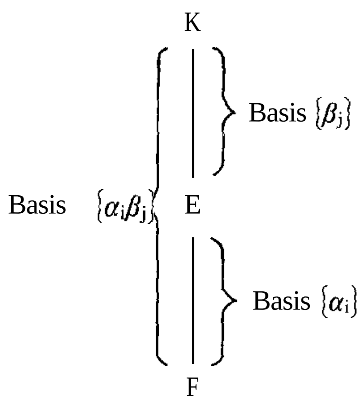
แต่ α_i เป็นอิสระต่อกันเหนือ F

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0 \Rightarrow c_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ i และ j

$\therefore$ $\alpha_i\beta_j$ ไม่แต่เพียงก่อกำเนิด K เหนือ F เท่านั้น แต่ยังอิสระต่อกันเหนือ F ด้วย

$\therefore$ $\alpha_i\beta_j$ เป็นฐานสำหรับ K เหนือ F #

ขอให้สังเกตว่า เราพิสูจน์ทฤษฎีนี้โดยการแสดงฐาน ขอให้จำว่า ถ้า $\{\alpha_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นฐานสำหรับ E เหนือ F และ $\{\beta_j | j = 1, 2, \ldots, m\}$ เป็นฐานสำหรับ K เหนือ E สำหรับ $F \leqslant E \leqslant K$ แล้ว เซต $\{\alpha_i\beta_j\}$ ของผลคูณ mn ตัว เป็นฐานสำหรับ K เหนือ F ดังรูปข้างล่างนี้



บทแทรก 1 ถ้า F_i เป็นสนาม สำหรับ $i = 1, \ldots, r$ และ F_{i+1} เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของ F_i แล้ว F_r เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของ F_1 และ

$$|F_r : F_1| = |F_r : F_{r-1}||F_{r-1} : F_{r-2}| \ldots |F_2 : F_1|$$

ข้อพิสูจน์ เป็นผลของภาคยืดขยายจากทฤษฎี 10.1.2 โดยการอุปมาน

บทแทรก 2 ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายของสมการ F, $\alpha \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F และ $\beta \in F(\alpha)$ แล้ว $\deg(\beta, F)$ หาร $\deg(\alpha, F)$ ลงตัว

พิสูจน์

โดยทฤษฎี 9.3.4

$$\deg(\alpha, F) = |F(\alpha) : F|$$

และ $\deg(\beta, F) = |F(\beta) : F|$

เรามี $F \leqslant F(\beta) \leqslant F(\alpha)$

ดังนั้น โดยทฤษฎี 10.1.2

$|F(\beta) : F|$ หาร $|F(\alpha) : F|$ ลงตัว #

ตัวอย่าง 10.1.1 โดยบทแทรกที่ 2 ของทฤษฎี 10.1.2 ไม่มีสมาชิกของ $Q(\sqrt{2})$ ซึ่งเป็นศูนย์

ของ $x^3 - 2$, สำหรับ deg $(\sqrt{2}, Q) = 2$ ในขณะที่ศูนย์ของ $x^3 - 2$ ลำดับขั้น 3 เหนือ Q แต่ 3 หาร 2 ไม่ลงตัว

ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และให้ $\alpha_1, \alpha_2 \in E$, $\alpha_1\alpha_2$ ไม่จำเป็นต้องเป็นต้องเป็นสมาชิกพีชคณิต เหนือ F โดยนิยาม $F(\alpha_1)$ เป็นสนามภาคยืดขยายที่เล็กที่สุดของสนาม F ใน E ซึ่งบรรจุ α_1 ไว้ ทำนองเดียวกัน $(F(\alpha_1))(\alpha_2)$ สามารถจะบรรยายได้เป็นสนามภาคยืดขยายที่เล็กที่สุดของ F ใน E ที่บรรจุทั้ง α_1 และ α_2 ไว้ เราควรเริ่มให้เท่ากันที่ α_2 ดังนั้น $(F(\alpha_1))(\alpha_2) = F(\alpha_2))(\alpha_1)$ เราเขียนแทนสนามนี้ด้วย "$F(\alpha_1, \alpha_2)$ ทำนองเดียวกันสำหรับ $\alpha_i \in E$, $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ เป็นสนามภาคยืดขยายที่เล็กที่สุดของ F ที่บรรจุ α_i ทั้งหมดไว้ (สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$) เราได้สนาม $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ จากสนาม F โดยผูกพันกับ F (adjoint to F) ด้วยสมาชิก α_i ใน E นักศึกษาอาจตรวจสอบคุณสมบัตินี้ได้ไม่ยากนัก คล้ายคลึงกับผลตัดของกลุ่มย่อยของกลุ่ม, ผลตัดของสนามย่อยของสนาม E ก็ยังเป็นสนามย่อยของ E ดังนั้น แน่นอน $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ เป็นผลตัดของสนามย่อยทั้งหมดของ E ที่บรรจุ F และ α_i ทั้งหมดไว้ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่าง 10.1.2 พิจารณา $Q(\sqrt{2})$ ทฤษฎี 9.3.4 แสดงว่า $\{1, \sqrt{2}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(\sqrt{2})$ เหนือ Q

ทำนองเดียวกัน $\{1, \sqrt{3}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (Q(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ เหนือ $Q(\sqrt{2})$

โดยข้อพิสูจน์ของทฤษฎี 10.1.2 แสดงให้เห็นว่า

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ เหนือ Q #

ตัวอย่าง 10.1.3 ให้ $2^{1/3}$ เป็นรากจำนวนจริงที่ 3 ของ 2

และ $2^{1/2}$ เป็นรากที่สองที่เป็นจำนวนนบวกของ 2 แล้ว

เราเห็นแล้วจากตัวอย่าง 10.1.1 ว่า $2^{1/3} \notin Q(2^{1/2})$

ดังนั้น $|Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) : Q(2^{1/2})| = 3$ แล้ว

$\{1, 2^{1/2}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(2^{1/2})$ เหนือ Q

และ $\{1, 2^{1/3}, 2^{2/3}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(2^{1/2}, 2^{1/3})$ เหนือ $Q(2^{1/2})$

ยิ่งกว่านั้นโดยทฤษฎี 10.1.2 เรายังได้ว่า

$\{1, 2^{1/2}, 2^{1/3}, 2^{5/6}, 2^{2/3}, 2^{7/6}\}$ เป็นฐานสำหรับ $Q(2^{1/2}, 2^{1/3})$ เหนือ Q

เป็นที่กระจ่างชัดว่า เนื่องจาก $2^{7/6} = (2)2^{1/6}$

$\therefore\ 2^{1/6} \in Q(2^{1/2}, 2^{1/3})$

$\therefore\ 2^{1/6}$ เป็นศูนย์ของ $x^6 - 2$ ซึ่งลดทอนไม่ได้เหนือ Q

โดยกฎเกณฑ์ของ Eisenstein ที่ $p = 2$

$$Q \leqslant Q(2^{1/6}) \leqslant Q(2^{1/2}, 2^{1/3})$$

และโดยทฤษฎี 10.1.2

$$\begin{aligned} 6 &= |Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) : Q| = |Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) : Q(2^{1/6})||Q(2^{1/6}) : Q| \\ &= |Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) : Q(2^{1/6})|(6) \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะได้

$$|Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) : Q(2^{1/6})| = 1$$

$\therefore\ Q(2^{1/2}, 2^{1/3}) = Q(2^{1/6})$ #

ตัวอย่าง 10.1.3 แสดงให้เราเห็นว่าเป็นไปได้ที่สนามภาคยืดขยาย $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ของสนาม F จะเป็นสนามภาคยืดขยาย (อย่างง่าย) แม้ว่า $n > 1$

ทฤษฎี 10.1.3 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของสนาม F แล้วจะมีสมาชิกจำนวนจำกัด $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in E \ni E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ก็ต่อเมื่อ E เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเหนือ F นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของ F

พิสูจน์

$\Rightarrow$ สมมติ $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

เนื่องจาก E เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

$\therefore$ แต่ละ α_i เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

$\therefore$ แต่ละ α_i เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือทุก ๆ สนามภาคยืดขยายของ F ใน E

ดังนั้น $F(\alpha_1)$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

และในรูปทั่ว ๆ ไป

$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ สำหรับ $j = 2, \ldots, n$

โดยบทแทรกที่ 1 ของทฤษฎี 10.1.2 ได้ว่า

$F, F(\alpha_1), F(\alpha_1, \alpha_2) \ \ldots, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = E$

$\therefore$ E เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของ F

$\Leftarrow$ สมมติ E เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตจำกัดของ E

กรณี 1

ถ้า $|E : F| = 1$ แล้ว $E = F(I) = F$

กรณี 2

ถ้า $E \neq F$

ให้ $\alpha_1 \in E$ โดยที่ $\alpha_1 \notin F$ แล้ว

$|F(\alpha_1) : F| > 1$

ถ้า $F(\alpha_1) = E$ แล้ว $F(\alpha_1)$ เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

ถ้า $F(\alpha_1) \neq E$ ให้ $\alpha_2 \in E$ โดยที่ $\alpha_2 \notin F(\alpha_1)$

ทำเช่นนี้เรื่อยไป

เราพบแล้วจากทฤษฎี 10.1.2 ว่า

เนื่องจาก $|E : F|$ เป็นจำนวนจำกัด เราจะต้องมาถึง $\alpha_n \ni$

$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = E$

$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

10.2 สนามปิดเชิงพีชคณิต และการปิดเชิงพีชคณิต

(Algebraically closed fields and algebraic closures)

เรายังไม่ได้มาตั้งข้อสังเกตว่า ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F และ $\alpha, \beta \in E$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F แล้ว $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha - \beta$ และ α/β ถ้า $\beta \neq 0$ คุณสมบัตินี้ได้มาจากทฤษฎี 10.1.3 และรวมอยู่ในทฤษฎีที่จะพูดถึงต่อไปนี้ด้วย

ทฤษฎี 10.2.1 ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายของสนาม F แล้ว $\overline{F}_E = \{\alpha \in E | \alpha$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ $F\}$ เป็นสนามย่อยของ E เรียก *สนามปิดเชิงพีชคณิตของ F ใน E* (the algebraic closure of F in E)

พิสูจน์

ให้ $\alpha, \beta \in \overline{F}_E$

โดยทฤษฎี 10.1.3 แสดงว่า

$F(\alpha, \beta)$ เป็นสนามภาคยืดขยายจำกัดของ F

และโดยทฤษฎี 10.1.1 ได้ว่า

สมาชิกทุก ๆ ตัวของ $F(\alpha, \beta)$ เป็นสมาชิกพีชคณิตเหนือ F

นั่นคือ $F(\alpha, \beta) \subseteq \overline{F}_E$

ดังนั้น $\overline{F}_E$ บรรจุ $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha - \beta$ และ α/β สำหรับ $\beta \neq 0$

$\therefore$ $\overline{F}_E$ เป็นสนามย่อยของ E

บทแทรก | เซตของจำนวนพีชคณิตทั้งหมดเป็นสนาม |

พิสูจน์

จากทฤษฎี 10.2.1 ทำให้ได้ว่า

เซตของจำนวนพีชคณิตทั้งหมดเป็นการปิดพีชคณิตของ Q ใน C #

เป็นที่ทราบกันดีว่า จำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติที่ว่า ทุก ๆ พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวใน $C[x]$ มีศูนย์ใน C

นิยาม | **สนาม F จะเป็นสนามปิดเชิงพีชคณิต** (Algebraically closed) **เมื่อทุก ๆ พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวใน $F[x]$ มีศูนย์ใน F** |

ทฤษฎีต่อไปนี้ แสดงแนวความคิดเรื่องสนามใดจะเป็นสนามปิดเชิงพีชคณิต สามารถจะนิยามในเทอมของการแยกตัวประกอบของพหุนามเหนือสนามนั้นได้

ทฤษฎี 10.2.2 | สนาม F จะเป็นสนามปิดเชิงพีชคณิตก็ต่อเมื่อทุก ๆ พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวใน $F[x]$ สามารถแยกตัวประกอบได้เป็นผลคูณของพหุนามลำดับขั้นหนึ่ง (linear factor) |

พิสูจน์

$\Rightarrow$ สมมติให้ F เป็นสนามปิดเชิงพีชคณิต

ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวใน $F[x]$

$\therefore$ $f(x)$ มีศูนย์ "a" $\in F$

โดยทฤษฎี 7.1.1

$(x - a)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(x)$

$\therefore$ $f(x) = (x - a)\,g(x)$

ดังนั้น ถ้า $g(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว $g(x)$ จะมีศูนย์ "b" $\in F$ และ

$f(x) = (x - a)(x - b)\,h(x)$

ทำเช่นนี้เรื่อยไป เราจะได้ตัวประกอบของ $f(x) \in F[x]$ ในรูปผลคูณของพหุนามลำดับขั้นหนึ่ง

$\Leftarrow$ สมมติ ทุกพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัวของ $[x]$ แยกตัวประกอบได้เป็นผลคูณของพหุนามลำดับขั้นหนึ่ง

ถ้า $ax - b$ เป็นตัวประกอบลำดับขั้นหนึ่งของ $f(x)$ แล้ว

b/a จะเป็นศูนย์ของ $f(x)$

$\therefore$ F เป็นสนามปิดเชิงพีชคณิต #

บทแทรก สนามปิดเชิงพีชคณิต F ไม่มีสนามภาคยืดขยายพีชคณิตแท้ (proper algebraic extensions) ie ไม่มีภาคยืดขยายพีชคณิต E ซึ่ง $F < E$

พิสูจน์

ให้ E เป็นสนามภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

$\therefore$ $F \leqslant E$

ถ้า $\alpha \in E$ แล้ว

$\text{irr}(\alpha, F) = x - a$

(โดยทฤษฎี 10.2.2)

เนื่องจาก F เป็นสนามปิดเชิงพีชคณิต

$\therefore$ $\alpha \in F$ และ $F = E$ #

ทฤษฎี 10.2.3 ทุก ๆ สนาม F มีสนามภาคยืดขยายเชิงพีชคณิต F ซึ่งปิดและเป็นพีชคณิต เรียก **การปิดเชิงพีชคณิต** (algebraic closure)

แบบฝึกหัดที่ 10

1) จงพิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

..............ก) ทุก ๆ ภาคยืดขยายจำกัดของสนามเป็นภาคยืดขยายพีชคณิต

..............ข) ทุก ๆ ภาคยืดขยายพีชคณิตของสนามเป็นภาคยืดขยายจำกัด

..............ค) R เป็น algebraically closed

..............ง) Q เป็น algebraic closure ของตัวเองใน R นั่นคือ Q เป็น algebraically closed ใน R

..............จ) C เป็น algebraically closed ใน C (x) โดยที่ x เป็นสัญลักษณ์รูปแบบ

..............ฉ) C(x) เป็น algebraically closed โดยที่ x เป็นสัญลักษณ์รูปแบบ

..............ช) สนาม C(x) ไม่มี algebraic closure เพราะ C บรรจุจำนวนพีชคณิตทั้งหมดไว้เรียบร้อยแล้ว

..............ซ) สนามที่เป็น algebraically closed จะต้องมีลักษณะเฉพาะ 0

..............ฌ) ถ้า E เป็นสนามภาคยืดขยายปิดพีชคณิตของ F แล้ว E เป็นภาคยืดขยายพีชคณิตของ F

2) จงหาลำดับขั้นของแต่ละสนามภาคยืดขยายต่อไปนี้

ก) $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ เหนือ Q

ข) $Q(\sqrt{2}\sqrt{3})$ เหนือ Q

ค) $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ เหนือ Q

ง) $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{24})$ เหนือ Q

จ) $Q(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ เหนือ $Q(\sqrt{3})$

ฉ) $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ เหนือ $Q(\sqrt{3})$

ช) $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ เหนือ $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

ซ) $Q(\sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{10})$ เหนือ $Q(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

3) จงหาฐานสำหรับแต่ละสนามภาคยืดขยาย ซึ่งกำหนดให้ตั้งแต่ข้อ (จ) ถึงข้อ (ซ) ในข้อ 2