ภาคผนวก 1
ความสัมพันธ์กันของผลการแปลงฟูริเยร์และผลการแปลงลาปลาซ

จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ และผลการแปลงลาปลาซจะเห็นว่าเมื่อนำมาเปรียบเทียบจะมีความคล้ายกันมาก ดังนี้

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s = b + i\omega$$

ดังนั้น บางฟังก์ชันจึงนำมาหาความสัมพันธ์กันได้ระหว่าง $\mathscr{F}\{f(t)\}$ และ $L\{f(t)\}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง **พิจารณาฟังก์ชัน** $f(t) = 0, \quad t < 0$ **และ** $\int_0^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ **เรียกฟังก์ชัน** $f(t)$ **นี้ว่าฟังก์ชัน** causal

จงพิจารณา $\mathscr{F}\{f(t)\}$ **และ** $L\{f(t)\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\end{aligned}$$

จากเงื่อนไข $\int_0^{\infty} |f(t)|dt$ ทำให้ $\mathscr{F}\{f(t)\}$ หาค่าได้

และจะได้ $$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(t)\} &= L\{f(t)\}\Big|_{s = i\omega} \\ &= F(i\omega)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนด $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ เมื่อ $a > 0$

จงเปรียบเทียบ $\mathscr{F}\{f(t)\}$ และ $L\{f(t)\}$

วิธีทำ ดังได้แสดงในตัวอย่างการหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน f(t) ซึ่งนิยามดังนี้ แล้วจะได้

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \frac{1}{a + i\omega}$$

และ $$L\{f(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

ดังนั้น $$\mathscr{F}\{f(t)\} = \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s = i\omega} = \frac{1}{i\omega + a}$$

เราเคยแสดงแล้วว่า $$L\{f'(t)\} = L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

ต่อไปจะพิจารณาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันอิมพลัซหนึ่งหน่วยเปรียบเทียบผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันอิมพลัซหนึ่งหน่วย ก่อนอื่นจะพิจารณาคุณสมบัติของฟังก์ชัน-อิมพลัซเพิ่มเติมดังนี้

คุณสมบัติของฟังก์ชันอิมพลัซ

1. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

2. $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$

3. $t\delta(t) = 0$

การพิสูจน์จะต้องอาศัยการนิยามฟังก์ชัน $\delta(t)$ ในรูปของฟังก์ชันทดสอบ (test function) ซึ่งผู้สนใจสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมในบรรณานุกรม 6 หัวข้อ 2.4 หน้า 37 ถึงหน้า 42

ตัวอย่าง จงเปรียบเทียบ $\mathscr{F}\{\delta(t)\}$ และ $L\{\delta(t)\}$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่า $\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1$

และจากคุณสมบัติ $\delta(t)$ จะได้

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

เมื่อ u(t) เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\}$$

$$= sL\{u(t)\} - u(0)$$

$$= s\left(\frac{1}{s}\right) - u(0)$$

$$= 1 - u(0)$$

แต่ในการนิยามฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $\delta(t)$ ค่าของ $u(0)$ ไม่ได้นิยามไว้ ดังนั้น ถ้าใช้ 0^+ จะได้

$$L\{\delta(t)\} = 1 - u(0^+)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

ถ้าใช้ 0^- จะได้

$$L\{\delta(t)\} = 1 - u(0^-)$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

ดังได้ทราบจากตัวอย่างการหาผลการแปลงฟูริเยร์แล้วว่าผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยหาโดยตรงจากนิยามไม่ได้ แต่ในที่นี้จะใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันอิมพลัซ หา $\mathscr{F}\{u(t)\}$ และเปรียบเทียบกับ $L\{u(t)\}$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $u(t)$

วิธีทำ ให้ $\mathscr{F}\{u(t)\} = F(\omega)$

จากคุณสมบัติผลการแปลงฟูริเยร์

$$\mathscr{F}\{u(-t)\} = F(-\omega)$$

เพราะว่า $$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น $$u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

$u(t) + u(-t) = 1$ **ยกเว้นที่** $t = 0$

และ $\mathscr{F}\{u(t)\} + \mathscr{F}\{u(-t)\} = \mathscr{F}\{1\}$

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

กำหนดให้ $F(\omega) = k\delta(\omega) + B(\omega)$

เมื่อ $B(\omega)$ เป็นฟังก์ชันสามัญ (ordinary function) และ k เป็นค่าคงตัว

เพราะว่า $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$

$$\begin{aligned} F(\omega)+F(-\omega) &= k\delta(\omega)+B(\omega)+k\delta(-\omega)+B(-\omega) \\ &= 2k\delta(\omega)+B(\omega)+B(-\omega) \\ &= 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

นั่นคือ เราสรุปได้ว่า $k = \pi$ และ $B(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ในการหาค่าของ $B(\omega)$ จะทำดังนี้

เพราะว่า $u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = \delta(t)$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{u'(t)\} &= i\omega F(\omega) \\ &= i\omega\left[\pi\delta(\omega)+B(\omega)\right] \\ &= \mathscr{F}\{\delta(t)\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จาก $\omega\delta(\omega) = 0$

ดังนั้น $i\omega B(\omega) = 1$

$$B(\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$$

แต่ $L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ จงแสดงว่า

1. $\mathscr{F}\{f(t)\} = L\{f(t)\}_{s=i\omega} + L\{f(t)\}_{s=-i\omega}$ ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่
2. $\mathscr{F}\{f(t)\} = L\{f(t)\}_{s=i\omega} - L\{f(t)\}_{s=-i\omega}$ ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

วิธีทำ จากนิยาม $\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ ดังนั้น $\int_{0}^{\infty} f(t)e^{\pm i\omega t}dt$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับ $L\{f(t)\}_{s = \mp i\omega}$

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ $f(-t) = f(t)$
โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $t = -T$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} f(-T)e^{i\omega T}dT$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(T)e^{-(-i\omega T)}dT$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(T)e^{i\omega T}dT$$

$$= L\{f(t)\}_{s = -i\omega}$$

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ $f(-t) = -f(t)$

พิจารณา $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} f(-T)e^{i\omega T}dT$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(-i\omega T)}dT$$

$$= -L\{f(t)\}_{s = -i\omega}$$

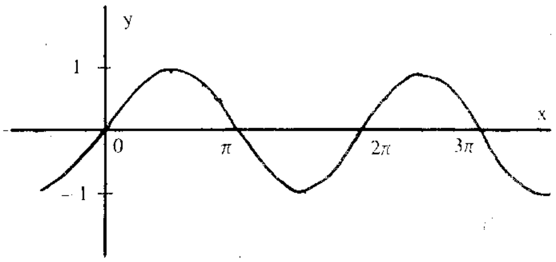
ภาคผนวก 2

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

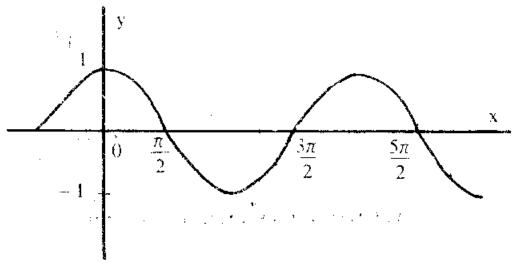
(Trigonometric Functions)

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

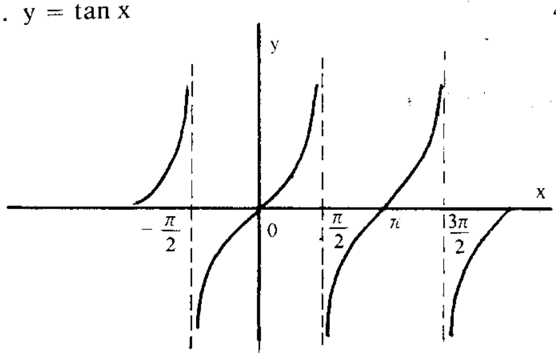
1. $y = \sin x$



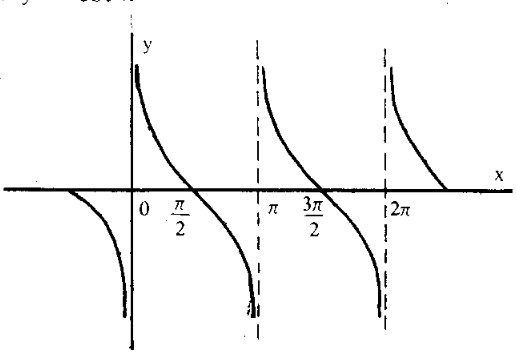
2. $y = \cos x$



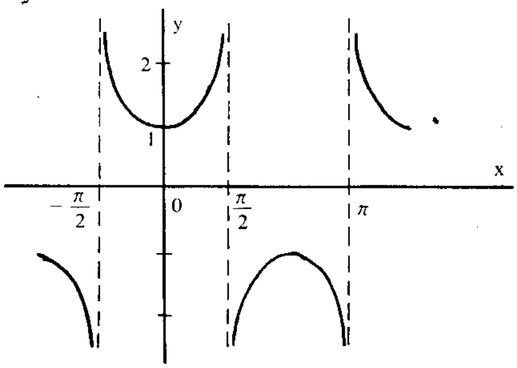
3. $y = \tan x$



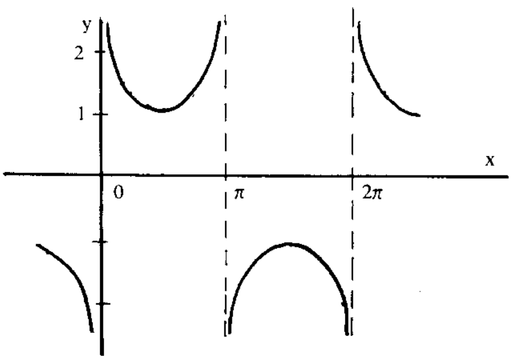
4. $y = \cot x$



5. $y = \sec x$



6. $y = \csc x$



ฟังก์ชันของมุมลบ

1. $\sin(-A) = -\sin A$
2. $\cos(-A) = \cos A$
3. $\tan(-A) = -\tan A$
4. $\csc(-A) = -\csc A$
5. $\sec(-A) = \sec A$
6. $\cot(-A) = -\cot A$

สูตรตรีโกณมิติที่ควรทราบ

สูตรมุมประกอบ

1. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
2. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

สูตรมุมพหุคูณ

3. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
4. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
5. $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

สูตรมุมครึ่ง

6. $\sin \dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$
7. $\cos \dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{2}}$
8. $\tan \dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$

ผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

9. $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
10. $\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
11. $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
12. $\cos A - \cos B = 2 \sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \sin\left(\dfrac{B-A}{2}\right)$
13. $\sin A \sin B = \dfrac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$
14. $\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$
15. $\sin A \cos B = \dfrac{1}{2}\{\sin(A-B) + \sin(A+B)\}$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันชี้กำลัง

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

   $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

2. $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\text{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

สูตรต่าง ๆ คล้ายกับสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\int \sin mx\,dx = \dfrac{-\cos mx}{m} + C$

2. $\int \cos nx\,dx = \dfrac{\sin nx}{n} + C$

3. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

4. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

5. $\int \sin mx \cos nx\,dx = \dfrac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} - \dfrac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

6. $\int \sinh mx\,dx = \dfrac{\cosh mx}{m} + C$

7. $\int \cosh nx\,dx = \sinh nx/n + C$

อนุกรมฟูริเยร์

นิยามของอนุกรมฟูริเยร์

อนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามในช่วง $-L < x < L$ เมื่อ L เป็นค่าคงตัวคือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(an \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

เมื่อ
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

อนุกรมฟูริเยร์ไซน์

อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ของ $f(x)$ ในช่วง $-L \leqslant x \leqslant L$ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ
$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1,2,\ldots$$

อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ของ $f(x)$ ในช่วง $-L \leqslant x \leqslant L$ คือ

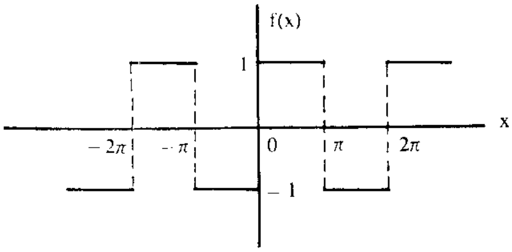
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ
$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

อนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันพิเศษและการเขียนกราฟ

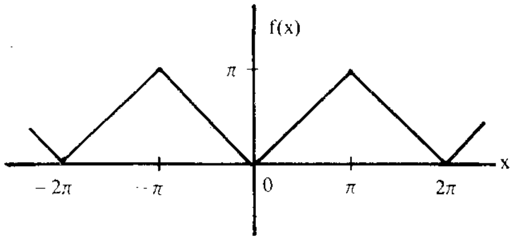
1. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$



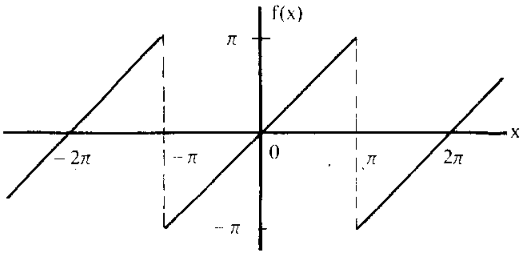
2. $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ -x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$



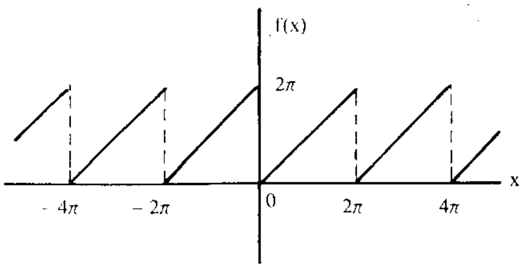
3. $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$



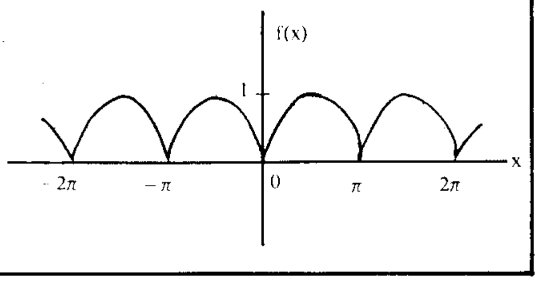
4. $f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$

$$\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$



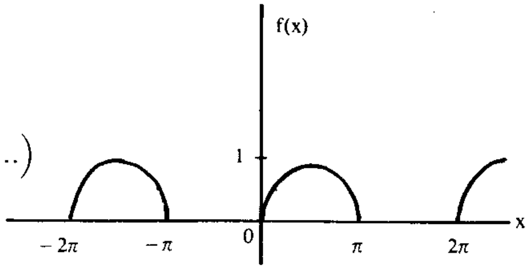
5. $f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



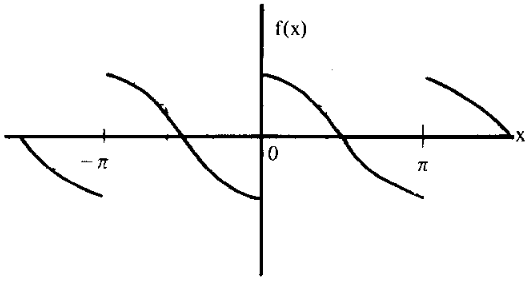
6. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



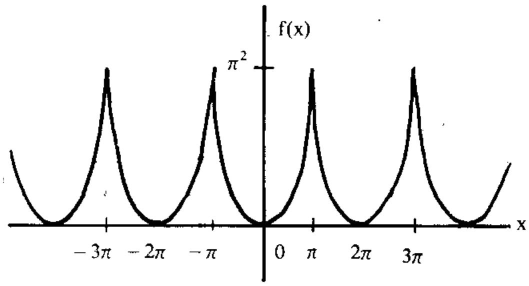
7. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{2\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$



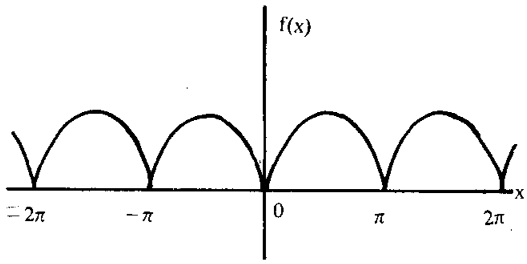
8. $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{\pi^2}{8} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$



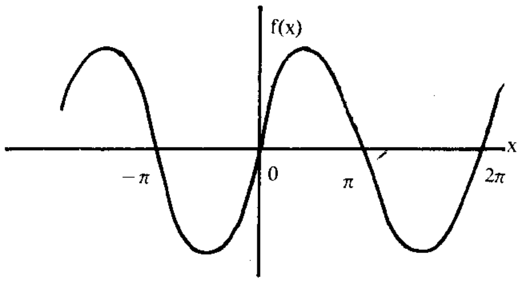
9. $f(x) = x(\pi - x), \quad 0 < x < \pi$

$$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$



10. $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x), \quad -\pi < x < \pi$

$$12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \ldots\right)$$



ตารางคุณสมบัติผลการแปลงฟูริเยร์

ในที่นี้ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบ T, $a > 0, b, t_0$ เป็นค่าคงตัว $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

และ $n = 1, 2, \ldots$

	$f(t)$	$F(\omega)$
1.	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
2	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3.	$f(-t)$	$F(-\omega)$
4.	$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-i\omega t_0}$
5.	$f(t) e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
6.	$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
7.	$f(t) \sin \omega_0 t$	$\frac{1}{2i} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega + \omega_0)$
8.	$f_e(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$	$R(\omega)$
9.	$f_0(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$	$iX(\omega)$
10.	$f(t) = f_e(t) + f_0(t)$	$F(\omega) = R(\omega) + i\,X(\omega)$
11.	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
12.	$f'(t)$	$i\omega\; F(\omega)$
13.	$f^n(t)$	$(i\omega)^n\; F(\omega)$
14.	$-it\; f(t)$	$F'(\omega)$
15.	$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
16.	$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,dx$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$

	$f(t)$	$F(\omega)$
17.	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy$
18.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{i\omega+a}$
19.	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
20.	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$
21.	$f_a(t) = \begin{cases} 1, & \|t\| < \frac{a}{2} \\ 0, & \|t\| > \frac{a}{2} \end{cases}$	$a\,\frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\left(\frac{\omega a}{2}\right)}$
22.	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(i\omega+a)^2}$
23.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(i\omega+a)^n}$
24.	$e^{-at}\sin bt\; u(t)$	$\frac{b}{(i\omega+a)^2+b^2}$
25.	$e^{-at}\cos bt\; u(t)$	$\frac{i\omega+a}{(i\omega+a)^2+b^2}$
26.	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$
27.	$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2a}\left[e^{-a\|\omega-b\|}+e^{-a\|\omega+b\|}\right]$
28.	$\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{2ai}\left[e^{-a\|\omega-b\|}-e^{-a\|\omega+b\|}\right]$

ตารางของผลการแปลงลาปลาซ

1. ตารางคุณสมบัติทั่วไปของผลการแปลงลาปลาซ

	$F(s)$	$f(t)$
1.	$aF_1(s)+bF_2(s)$	$af_1(t)+bf_2(t)$
2.	$F(s/a)$	$af(at)$
3.	$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
4.	$e^{-as}F(s)$	$u(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t>a \\ 0, & t<a \end{cases}$
5.	$sF(s)-f(0)$	$f'(t)$
6.	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$
7.	$s^nF(s)-s^{a-1}f(0)-s^{a-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$
8.	$F'(s)$	$-tf(t)$
9.	$F''(s)$	$t^2f(t)$
10.	$F^{(n)}(s)$	$(-1)^nt^nf(t)$
11.	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(u)du$
12.	$\frac{F(s)}{s^n}$	$\int_0^t \ldots \int_0^t f(u)du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)du$
13.	$F(s)G(s)$	$\int_0^t F(u)G(t-u)du$
14.	$\int_s^\infty F(u)du$	$\frac{f(t)}{t}$
15.	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}f(u)du$	$f(t) = f(t+T)$

	$F(s)$	$f(t)$
16.	$\dfrac{F(\sqrt{s})}{s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2/4t} f(u)du$
17.	$\dfrac{1}{s}F\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$\displaystyle\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{ut})f(u)du$
18.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}F\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$t^{n/2}\displaystyle\int_0^{\infty} u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})f(u)du$
19.	$\dfrac{F(s+1/s)}{1+s^2}$	$\displaystyle\int_0^{t} J_0(2\sqrt{u(t-u)})f(u)du$
20.	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} u^{-3/2}e^{-s^2/4U}F(u)du$	$f(t^2)$
21.	$\dfrac{F(\ln s)}{s \ln s}$	$\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{t^n f(u)}{\Gamma(u+1)}du$
22.	$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นน้อยกว่า n $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2),\ldots,(s-\alpha_n)$ เมื่อ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ มีค่าต่างกัน	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

2. ตารางผลการแปลงลาปลาซพิเศษ

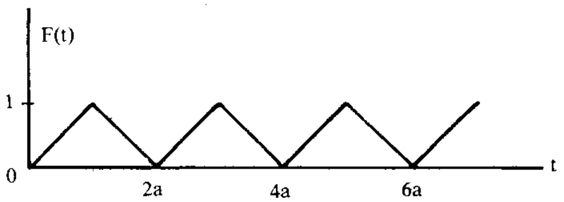
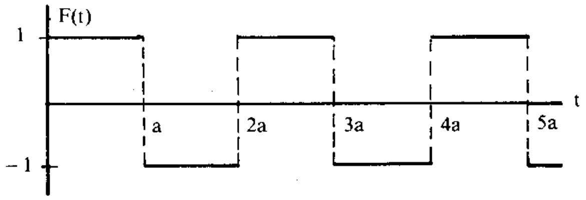
	F(s)		f(t)	
1.	$\frac{1}{s}$		1	
2.	$\frac{1}{s^2}$		t	
3.	$\frac{1}{s^n}$	$n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n}$	$n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	
5.	$\frac{1}{s-a}$		e^{at}	
6.	$\frac{1}{(s-a)^n}$,	$n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$,	$0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$n > 0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	
8.	$\frac{1}{s^2+a^2}$		$\frac{\sin at}{a}$	
9.	$\frac{s}{a^2+a^2}$		$\cos at$	
10.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$		$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$		$e^{bt}\cos at$	
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$		$\frac{\sinh at}{a}$	
13.	$\frac{s}{s^2-a^2}$		$\cosh at$	
14.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$		$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$	
15.	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$		$e^{bt}\cosh at$	
16.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$a \neq b$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	

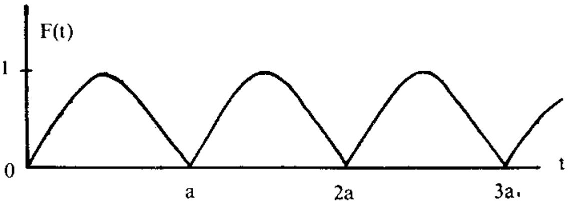
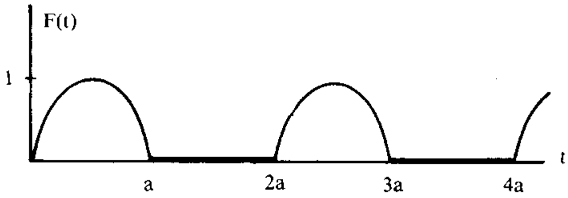
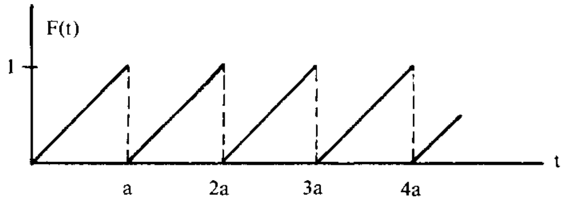
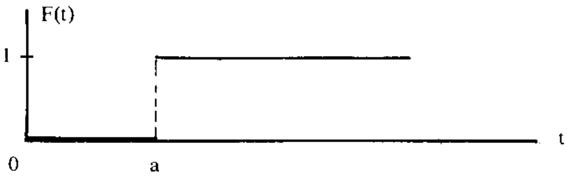
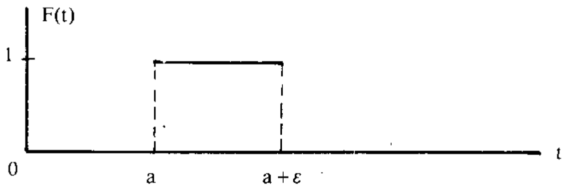
	F(s)	f(t)
17.	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$ $\quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$
18.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at - at \cos at}{2a^2}$
19.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t \sin at}{2a}$
20.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at + at \cos at}{2a}$
21.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \dfrac{1}{2} at \sin at$
22.	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
23.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at \cosh at - \sinh at}{2a^3}$
24.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t \sinh at}{2a}$
25.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\sinh at + at \cosh at}{2a}$
26.	$\dfrac{s^3}{(s^3-a^2)^2}$	$\cosh at + \dfrac{1}{2} at \sinh at$
27.	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t \cosh at$
28.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at \cos at}{8a^3}$
29.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t \sin at - at^2 \cos at}{8a^3}$
30.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at \cos at}{8a^3}$
31.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t \sin at + at^2 \cos at}{8a}$
32.	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2) \sin at + 5at \cos at}{8a}$
33.	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2) \cos at - 7at \sin at}{8}$

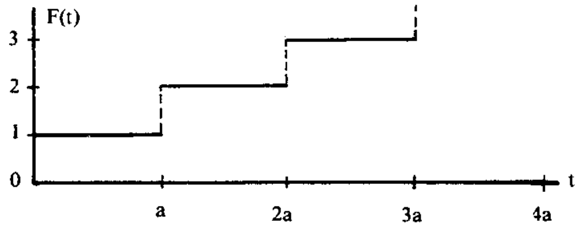
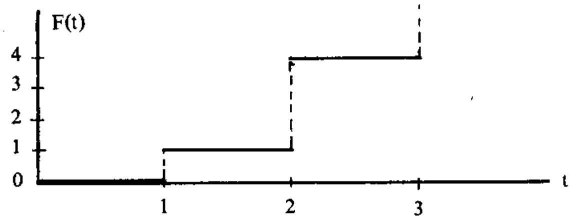
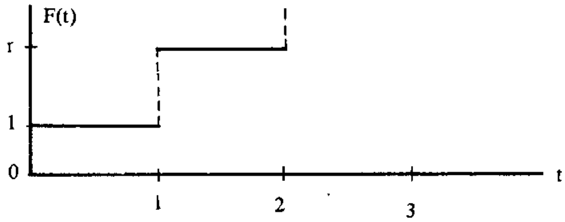
	F(s)	f(t)
34.	$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sin at}{2a}$
35.	$\frac{s^3 - 3a^2 s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cos at$
36.	$\frac{s^4 - 6a^2 s^2 + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{1}{2} t^3 \cos at$
37.	$\frac{s^3 - a^2 s}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sin at}{24a}$
38.	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at - 3at \cosh at}{8a^3}$
39.	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at^2 \cosh at - t \sinh at}{8a^3}$
40.	$\frac{s^2}{(s^2 - a^3)^3}$	$\frac{at \cosh at + (a^2 t^2 - 1) \sinh at}{8a^2}$
41.	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{3t \sinh at + at^2 \cosh at}{8a}$
42.	$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2 t^2) \sinh at + 5at \cosh at}{8a}$
42.	$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(8 + a^2 t^2) \cosh at + 7at \sinh at}{8}$
44.	$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t^2 \sinh at}{2a}$
45.	$\frac{s^3 + 3a^2 s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cosh at$
46.	$\frac{s^4 + 6a^2 s^2 + a^4}{(a^2 - a^2)^4}$	$\frac{1}{2} t^3 \cosh at$
47.	$\frac{s^3 + a^2 s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{t^3 \sinh at}{24a}$
48.	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left\{ \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}\, at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}\, at}{2} + e^{-3at/2} \right.$
49.	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}\, at}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}\, at}{2} - e^{-3at/2} \right\}$
50.	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}\, at}{2} \right)$

	F(s)	f(t)
51.	$\frac{1}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$
52.	$\frac{s}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
53.	$\frac{s^2}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
54.	$\frac{1}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$
55.	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
56.	$\frac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a}(\sin at\cosh at+\cos at\sinh at)$
57.	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
58.	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
59.	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
60.	$\frac{s^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\sinh at+\sin at)$
61.	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
62.	$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
64.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at}\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
65.	$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$
66.	$\frac{\sinh sx}{s\sinh sa}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi t}{a}$

	F(s)	f(t)
67.	$\dfrac{\sinh sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
68.	$\dfrac{\cosh sx}{s \sinh as}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
69.	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
70.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
71.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
72.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \dfrac{n\pi t}{a}\right)$
73.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
74.	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\dfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
75.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
76.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{a}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1) e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
77.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
78.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a}$

	F(s)	f(t)
79.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
80.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
81.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3}(1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
82.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
83.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{sJ_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ are the positive roots of $J_0(\lambda) = 0$
84.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2 J_0(ia\sqrt{s})}$	$\dfrac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ are the positive roots of $J_0(\lambda) = 0$
85.	$\dfrac{1}{as^2} \tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Triangular wave function 
86.	$\dfrac{1}{s} \tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Square wave function 

		F(s)	f(t)
87.		$\dfrac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Rectified sine wave function 
88.		$\dfrac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	Half rectified sine wave function 
89.		$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	Saw tooth wave function 
90.		$\dfrac{e^{-as}}{s}$	Heaviside's unit function u(t – a) 
91.		$\dfrac{e^{-as}(1 - e^{-as})}{s}$	Pulse function 

	F(s)	f(t)
92.	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$	Step function 
93.	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2, \quad n \leqslant t < n+1, n = 0,1,2,\ldots$ 
94.	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(-re^{-s})}$	$F(t) = r^n, \quad n \leqslant t < n+1, n = 0,1,2,\ldots$ 
95.	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/a), & 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0, & t > a \end{cases}$