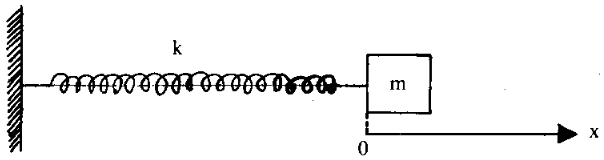
บทที่ 5
การประยุกต์
(Applications)

คุณสมบัติของผลการแปลงลาปลาซในบทที่ 3 และบทที่ 4 นั้น สามารถใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ทั้งทางฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ ดังเช่นในบทที่ 4 ได้แสดงถึงการใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาของการประยุกต์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และในตอนท้ายของบทจะได้พิจารณาถึงการใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

5.1 การแกว่งไกวอิสระ (Free Vibration)

ในวิชากลศาสตร์จะพิจารณาการแกว่งไกวของวัตถุที่มีน้ำหนักซึ่งเคลื่อนที่จากจุดสมดุล ถ้าวัตถุมวล m ผูกติดกับปลายขดลวดสปริง (coil spring) ซึ่งยืดหยุ่นได้ และมีปลายอีกข้างติดอยู่ที่กำแพง ดังรูป 5.1 สมมุติว่าไม่มีแรงอื่นมากระทำเลย



รูป 5.1

ให้การเคลื่อนที่ของสปริงเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law) นั่นคือ แรงที่กระทำกลับคืนบนสปริงจะเป็นปฏิภาคตรงกับระยะทางที่สปริงเลื่อนออกจากตำแหน่งสมดุล

ให้ k เป็นค่าคงตัวซึ่งขึ้นอยู่กับสปริง เรียกว่า **ค่าคงตัวสปริง** (spring constant)

x เป็นระยะขจัด (displacement) ของ m จากตำแหน่งสมดุล เมื่อเวลา t ใด ๆ

0 เป็นตำแหน่งของวัตถุมวล m เมื่อสปริงยังไม่ถูกกระทำ

ถ้าแรงที่กระทำกลับคืนบนสปริง $= -kx$

โดยกฎของนิวตันข้อที่ 2 เกี่ยวกับแรง (Newton's second law of motion) จะได้แรงมีค่าเท่ากับมวลคูณความเร่ง และจะได้สมการคือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{..........(5.1.1)}$$

ถ้าให้ x_0 เป็นระยะขจัดเมื่อเวลา $t = 0$ และ v_0 เป็นความเร็วเริ่มต้น (initial velocity) ฟังก์ชัน $x(t)$ คล้องตามเงื่อนไข

$$x(0) = x_0 \text{ และ } x'(0) = v_0 \qquad \text{..........(5.1.2)}$$

สามารถหาคำตอบโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้

$$L\left\{m\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = L\{-kx\}$$

$$m\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] = -kX(s)$$

$$m\left[s^2X(s) - sx_0 - v_0\right] = -kX(s)$$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)X(s) = sx_0 + v_0$$

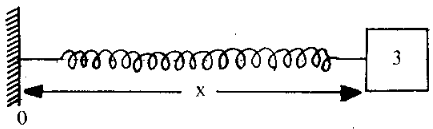
$$X(s) = x_0\frac{s}{s^2+(k/m)} + v_0\frac{1}{s^2+(k/m)}$$

$$x(t) = x_0L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(k/m)}\right\} + v_0L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(k/m)}\right\}$$

$$= x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

ตัวอย่าง วัตถุมวล 3 กรัม ผูกติดกับขดลวดสปริงตามแกน x ถูกดึงเข้าหาจุดกำเนิด 0 ด้วยแรงเท่ากับ $12x$ เมื่อ x เป็นระยะที่วัตถุอยู่ห่างจาก 0 เมื่อเวลา t ใด ๆ ถ้าตอนเริ่มต้น $x = 12$ เซนติเมตร จงหาตำแหน่งเมื่อเวลาใด ๆ ถ้าไม่มีแรงอื่นมากระทำ

วิธีทำ ถ้า x เป็นระยะที่วัตถุอยู่ห่างจาก 0 เมื่อเวลา t ใด ๆ



เลือกทิศทางไปทางขวามีเครื่องหมายเป็นบวก

เมื่อ $x > 0$ แรงทั้งหมดมีทิศไปทางซ้าย ดังนั้น แรง $= -12x$

เมื่อ $x < 0$ แรงทั้งหมดมีทิศไปทางขวา (แรงมีเครื่องหมายบวก) $= -12x$

โดยกฎของนิวตัน

$$\text{แรง} = \text{มวล} \times \text{ความเร่ง}$$

$$-12x = 3\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \text{เมื่อ } x(0) = 12,\ x'(0) = 0$$

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 4L\{x\} = 0$$

$$s^2L\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) + 4L\{x(t)\} = 0$$

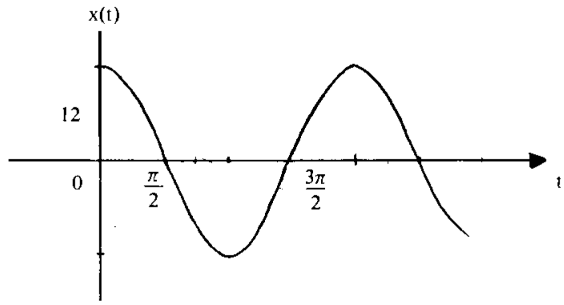
$$(s^2+4)L\{x(t)\} = 12s$$

$$L\{x(t)\} = \frac{12s}{s^2+4}$$

$$x(t) = 12L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

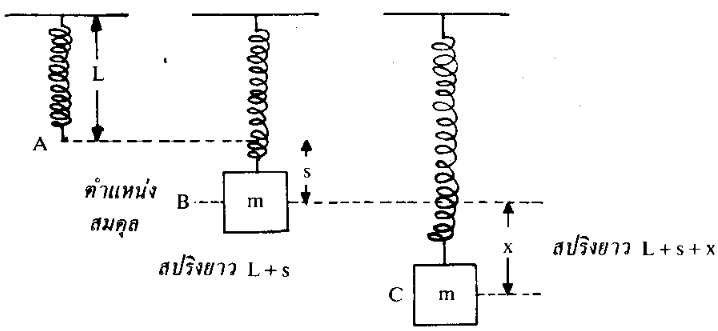
$$x(t) = 12\cos 2t$$

ถ้าพิจารณากราฟของ x(t) จะเห็นว่าระยะขจัดสูงสุดจาก 0 หรือช่วงกว้าง (amplitude) = 12 เซนติเมตร มีคาบ (period) คือ π ความถี่ (frequency) คือ จำนวนคลื่นต่อนาที $\frac{1}{\pi}$



รูป 5.3

ถ้าพิจารณาขดลวดสปริงซึ่งแขวนไว้ในแนวดิ่งโดยให้ปลายติดอยู่กับเพดานห้อง ดังรูป 5.4 ก็จะพิจารณาได้ในทำนองเดียวกับวัตถุในแนวแกน x



รูป 5.4

ตำแหน่ง A เป็นตำแหน่งที่ก่อนเอาน้ำหนักวัตถุมวล m ถ่วง เมื่อถ่วงแล้วสปริงจะยืดมาอยู่ที่ B ซึ่งเรียกว่าตำแหน่งสมดุล

ให้ x เป็นระยะที่ดึงวัตถุจากตำแหน่งสมดุล B และมีทิศบวก ถ้าดึงในทิศทางลง

โดยกฎของฮุค $F = kx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวสปริง

จะเห็นว่าเมื่อ $x > 0$ F จะเป็นแรงขึ้นทำให้แรงมีค่าเป็นลบ

เมื่อ $x < 0$ F จะเป็นแรงลงทำให้แรงมีค่าเป็นบวก

ดังนั้น $F = -kx$

เมื่อเอาน้ำหนัก m ถ่วงที่ปลายล่างของลวดสปริง ทำให้ลวดยืดออก ระยะ s ให้ T_1 เป็นแรงดึงภายในเส้นลวด จะได้

$$T_1 = ks = m$$

เมื่อออกแรงดึง น้ำหนัก m ลงแล้วปล่อย น้ำหนัก m จะถูกลวดสปริงดึงขึ้นลงผ่านจุดสมดุลไปมา ตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลาใด ๆ อยู่ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ x ดังนั้นแรงดึง T_2 ในเส้นลวดมีค่าเท่ากับ

$$T_2 = k(s+x)$$

ผลรวมของแรงทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned} F &= m - T_2 \\ &= m - k(s+x) \\ &= m - ks - kx \\ &= -kx \end{aligned}$$

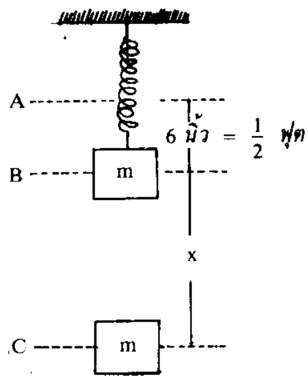
และได้สมการแรงคือ

$$\begin{aligned} F &= ma \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \end{aligned}$$

เหมือนกับสมการ (5.1.1)

ตัวอย่าง วัตถุหนัก 20 ปอนด์ แขวนติดกับขดลวดสปริงซึ่งแขวนไว้ในแนวดิ่ง โดยปลายบนติดกับเพดานห้อง ซึ่งจะทำให้ลวดสปริงยืดออกไป 6 นิ้ว ถ้าไม่มีแรงอื่นมากระทำ จงหาตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลาใด ๆ ถ้าดึงน้ำหนักนี้ลงมาให้อยู่ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 2 นิ้ว

วิธีทำ ให้ A และ B แทนตำแหน่งของปลายสปริงก่อนและหลังใส่น้ำหนักมวล m ดังรูป 5.5



รูป 5.5

ให้ x เป็นระยะที่ลวดสปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุล

โดยกฎของฮุค

$$F = kx$$

$$20 = k\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k = 40$$

สมการคือ $\frac{20}{32}\frac{d^2y}{dx^2} = -40x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$$

เมื่อ $x(0) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ฟุต และ $x'(0) = 0$

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 64L\{x\} = 0$$

$$s^2L\{x\} - sx(0) - x'(0) + 64L\{x\} = 0$$

$$(s^2+64)L\{x(t)\} = \frac{s}{6}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{s}{6(s^2+64)}$$

$$x(t) = \frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+64}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{6}\cos 8t \text{ ฟุต}$$

$$= 2\cos 8t \text{ นิ้ว}$$

จาก $x(t) = \frac{1}{6}\cos 8t$ จะเห็นว่าช่วงกว้าง $= \frac{1}{6}$ ฟุต คาบของการแกว่งครบรอบ $= \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ วินาที

ความเร็ว $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{6}\frac{d}{dt}(\cos 8t) = -\frac{4}{3}\sin 8t$

และ ความเร่ง $= \frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{d}{dt}(\sin 8t) = -\frac{32}{3}\cos 8t$

5.2 การแกว่งไกวแบบหน่วง (Damped Vibration)

โดยทั่วไปแล้วการแกว่งไกวจริง ๆ จะมีแรงคอยต้านการแกว่งไกวทำให้ช่วงกว้างของการเคลื่อนที่ค่อย ๆ ลดลงจนในที่สุดการแกว่งนั้นจะหยุดนิ่ง เราเรียกแรงที่มาต้านทานการเคลื่อนที่ว่า **แรงหน่วง** (damping force) จะเห็นว่าการเคลื่อนที่ในหัวข้อ 5.1 นั้นไม่มีแรงหน่วงมากระทำซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ในทางทฤษฎีมากกว่าในทางปฏิบัติ .

จากการทดลองจะได้ว่าแรงหน่วงเป็นปฏิภาคกับความเร็วของการเคลื่อนที่

ให้ c เป็นค่าคงตัวของแรงหน่วง และ $c > 0$ และทิศทางของแรงหน่วงจะมีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ

ดังนั้น แรงหน่วง $= -c\frac{dx}{dt}$

$= -cx'(t)$

จะได้สมการเคลื่อนที่

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) \qquad \text{..........(5.1.3)}$$

ถ้ากำหนดให้ $x(0) = 0$ และ $x'(0) = v_0$ จะหาคำตอบได้ดังนี้

โดยผลการแปลงลาปลาซ สมการ (5.1.3) จะได้

$$\begin{aligned} L\{mx''(t)\} &= L\{-kx(t)\} - L\{cx'(t)\} \\ m[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] &= -kX(s) - c[sX(s) - x(0)] \\ ms^2X(s) - mv_0 &= -kX(s) - csX(s) \\ (ms^2 + k + cs)X(s) &= mv_0 \end{aligned}$$

ให้ $2b = \frac{c}{m}$ และ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{v_0}{s^2 - 2bs + \omega_0^2} \\ &= \frac{v_0}{(s+b)^2 + \omega_0^2 - b^2} \end{aligned}$$

ถ้า $b^2 < \omega_0^2$ จะได้ $c^2 < 4km$ และ

$$x(t) = v_0(\omega_0^2 - b^2)^{-1/2}e^{-bt}\sin(t\sqrt{\omega_0^2 - b^2})$$

ถ้า $\omega_0 = b$ จะได้ $c^2 = 4km$ และ

$$x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

เมื่อ $c^2 > 4km$ จะได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง จากตัวอย่าง หัวข้อ 5.1 ถ้ามีแรงหน่วงมีค่าเท่ากับ 12 คูณกับความเร็วขณะกระทำ จงหาตำแหน่งเมื่อเวลาใด ๆ

วิธีทำ แรงหน่วง $= -12\frac{dx}{dt}$ จะได้สมการการเคลื่อนที่

$$3\frac{d^2x}{dt^2} = -12x - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

เมื่อ $x(0) = 12,\ x'(0) = 0$

ใส่ผลการแปลงลาปลาซ จะได้

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 4L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 4L\{x\} = 0$$

$$s^2L\{x\} - sx(0) - x'(0) + 4\left[sL\{x\} - x(0)\right] + 4L\{x\} = 0$$

$$(s^2+4s+4)L\{x\} - 12s - 48 = 0$$

$$L\{x(t)\} = \frac{12s+48}{s^2+4s+4}$$

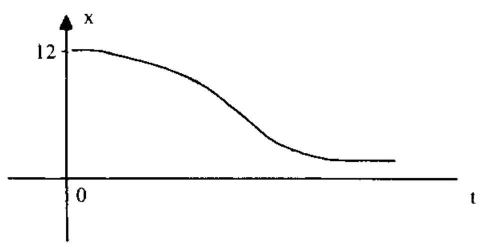
$$= \frac{12(s+2)+24}{(s+2)^2}$$

$$x(t) = 12L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 24L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= 12e^{-2t} + 24te^{-2t}$$

$$= 12e^{-2t}(1+2t)$$

กราฟของ $x(t)$ ดังรูป 5.6 เมื่อ t มีค่ามาก $(t \to \infty)$ $x(t)$ จะเข้าใกล้ศูนย์ $(x \to 0)$



รูป 5.6

ตัวอย่าง วัตถุมวล 32 ปอนด์ แขวนติดกับขดลวดสปริงซึ่งแขวนไว้ในแนวดิ่งโดยปลายบนติดกับเพดานห้อง ซึ่งจะทำให้ลวดสปริงยืดออกไป 2 ฟุต ถ้าดึงน้ำหนักวัตถุลงมาให้อยู่ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อย เมื่อ $t = 0$ และมีแรงหน่วงมีค่าเท่ากับ $4\frac{dx}{dt}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วเมื่อเวลา t ใด ๆ หน่วยฟุต/วินาที จงหาตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา t

วิธีทำ โจทย์คล้ายกับตัวอย่างในหัวข้อ 5.1 แต่มีแรงหน่วง $4\frac{dx}{dt}$

ให้ x เป็นระยะทางที่ลวดสปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุล เมื่อเวลา t

โดยกฎของฮุค $F = kx$

$$32 = k(2)$$

$$k = 16 \text{ ปอนด์/ฟุต}$$

มวล $m = \frac{w}{g} = \frac{32}{32} = 1 \text{ slug}$

และแรงหน่วง $c = 4$ จะได้สมการคือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

เมื่อ $x(0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$x'(0) = 0$$

แก้สมการโดยผลการแปลงลาปลาซ

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + 4L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 16L\{x\} = 0$$

$$\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + 4\left[sX(s) - x(0)\right] + 16X(s) = 0$$

$$(s^2 + 4s + 16)X(s) = \frac{s}{2} + 2$$

$$X(s) = \frac{s+4}{2(s^2+4s+16)}$$

รากของ $s^2 + 4s + 16 = 0$

$$s = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

ให้ $\frac{s+4}{(s^2+4s+16)} = \frac{\phi(s)}{s^2+4s+16}$

เมื่อ $\phi(s) = s + 4$

$$a + bi = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\phi(a+bi) = \phi(-2 + 2\sqrt{3}i)$$

$$= (-2+2\sqrt{3}i)+4$$
$$= 2+2\sqrt{3}i$$
$$= \phi_r+\phi_i i$$

ดังนั้น $\phi_r = 2, \quad \phi_i = 2\sqrt{3}$

โดยทฤษฎีบท 4.3

จะได้ $x(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+4}{2(s^2+4s+16)}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2t}}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{3}\cos 2\sqrt{3}t+2\sin 2\sqrt{3}t)\right]$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right)$$

หมายเหตุ ถ้าคำตอบอยู่ในรูป

$$x = e^{-bt}(c_1\sin\sqrt{\lambda^2-b^2}t+c_2\cos\sqrt{\lambda^2-b^2t})$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว อาจจะเขียน $x(t)$ ได้เป็น

$$x = ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2-b^2}t+\phi)$$

เมื่อ $c = \sqrt{c_1^2+c_2^2} > 0$ และ ϕ หาจาก

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = -\sin\phi$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\phi$$

เทอม ce^{-bt} เรียกว่า **ตัวประกอบหน่วง** (damping factor)

จากคำตอบ $x(t) = e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right)$

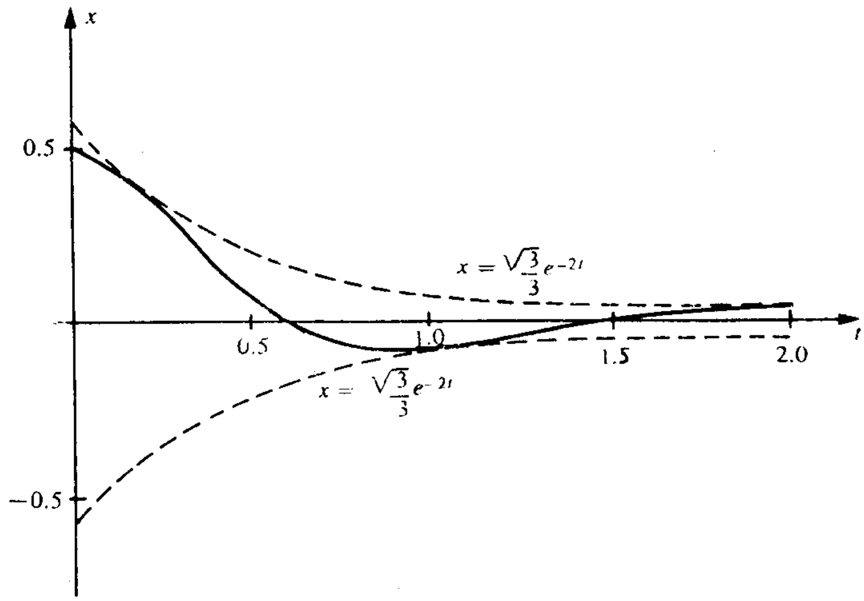
$$= e^{-2t}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}\cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

ซึ่งมีตัวประกอบหน่วง $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}$

คาบครบรอบ $\frac{2\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

เขียนกราฟได้ดังรูป 5.7



รูป 5.7

แบบฝึกหัด 5.1

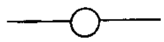
1. วัตถุมวล 2 กรัม เคลื่อนที่อยู่บนแกน x และถูกดึงเข้าหาจุดกำเนิด O ด้วยแรง 8x ถ้าตอนเริ่มต้น $x = 10$ จงหาตำแหน่งที่เวลาใด ๆ กำหนดให้
   1.1 ไม่มีแรงอื่นมากระทำ
   1.2 มีแรงหน่วงซึ่งมีค่าเท่ากับ 8 คูณความเร็วขณะกระทำ
2. วัตถุหนัก 8 ปอนด์ แขวนติดกับปลายข้างหนึ่งของลวดสปริง ส่วนอีกปลายข้างหนึ่งยึดติดแน่นกับเพดาน ทำให้ลวดสปริงยืดออกจนถึงตำแหน่งสมดุลเป็นความยาว 6 นิ้ว ดึงวัตถุต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น 1 ฟุตต่อวินาที ในทิศทางลงล่าง ถ้าการเคลื่อนที่ไม่มีแรงต้านทานการเคลื่อนที่และไม่มีแรงอื่นมากระทำเลย จงหาสมการการเคลื่อนที่ และความถี่ของการเคลื่อนที่
3. วัตถุมวล 32 ปอนด์ แขวนติดกับขดลวดสปริงซึ่งแขวนไว้ในแนวดิ่งโดยปลายบนติดกับเพดานห้อง ซึ่งจะทำให้ลวดสปริงยืดออกไป 2 ฟุต ถ้าดึงน้ำหนักวัตถุลงมาให้อยู่ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อย เมื่อ $t = 0$ และมีแรงหน่วงมีค่าเท่ากับ 8 เท่าของความเร็ว จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ
4. เมื่อเอาน้ำหนัก 6 ปอนด์ผูกติดกับลวดสปริง ทำให้ลวดสปริงยืดออกไป 6 นิ้ว ถ้าดึงน้ำหนักนี้ลงให้อยู่ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 4 นิ้วแล้วปล่อย จงหา
   4.1 ตำแหน่งของน้ำหนักวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ
   4.2 ช่วงกว้างและความถี่ของการเคลื่อนที่
5. วัตถุหนัก 10 ปอนด์ ผูกติดกับปลายล่างของลวดสปริง ที่ปลายบนแขวนติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 20 ปอนด์ต่อฟุต ดึงวัตถุลงต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 6 นิ้วแล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น 1 ฟุตต่อวินาทีในทิศทางลงล่าง ถ้าแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (เป็นปอนด์) เท่ากับ a เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ $(a > 0)$
   5.1 จงหาค่าน้อยที่สุดของ a ที่ทำให้การเคลื่อนที่ไม่เป็นลักษณะการสั่น (ไม่กลับไปกลับมา)
   5.2 จากค่า a ในข้อ 1 จงหาตำแหน่งของวัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา
   5.3 จงแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่เข้าหาตำแหน่งสมดุล เมื่อ $t \to \infty$

5.3 ปัญหาในวงจรไฟฟ้า (Electric circuit Problems)

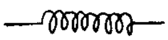
การประยุกต์ในวงจรไฟฟ้าได้ทราบมาบ้างแล้วในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งได้กล่าวถึงวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ซึ่งประกอบด้วยตัวก่อกำเนิดไฟฟ้าหรือแบตเตอรี่ (Generator or battery) ซึ่งทำให้เกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้า (Electromotive force) และตัวต้านทาน (resistor) ตัวเหนี่ยวนำ (inductor) ตัวเก็บประจุ (capacitor) ซึ่งนำมาต่อเป็นอนุกรม และใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's laws) สร้างสมการขึ้น ก่อนอื่นจะต้องทราบเกี่ยวกับสัญลักษณ์และหน่วยของตัวต่าง ๆ ที่ใช้ในวงจรไฟฟ้าดังนี้

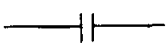
	สัญลักษณ์	หน่วย
แรงเคลื่อนไฟฟ้า	E หรือ V	โวลต์ (volt)
กระแส	I	แอมแปร์ (ampere)
ตัวต้านทาน	R	โอห์ม (ohm Ω)
ตัวเหนี่ยวนำ	L	เฮนรี (henry)
ประจุ (charge)	Q	คูลอมบ์ (coulomb)
ความจุ (Capacitance)	C	ฟารัด (farad)

การแสดงสัญลักษณ์ต่าง ๆ ด้วยภาพ ดังนี้

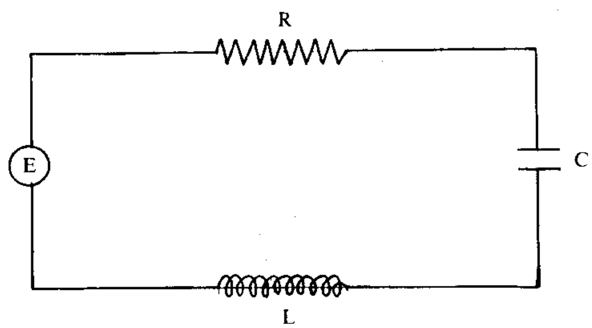
 E หมายถึง แรงเคลื่อนไฟฟ้า

 R หมายถึง ตัวต้านทาน

 L หมายถึง ตัวเหนี่ยวนำ

 C หมายถึง ตัวเก็บประจุ

ตัวอย่างเช่น วงจรไฟฟ้าหนึ่งต่อกันแบบอนุกรมประกอบด้วย E, R, L, C จะต่อกันดังรูป



รูป 5.8

ในวงจรไฟฟ้า เมื่อเครื่องกำเนิดไฟฟ้าส่งกระแสไปตามวงจรปิด ผ่านตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ จะเกิด **ศักย์ลด** (voltage drop) **หรือแรงเคลื่อนไฟฟ้าลด** ที่ตัวต้าน

ทาน ตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุตามลำดับ ศักย์ลดนั้นจะเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

1. ศักย์ลดระหว่างปลายทั้งสองของตัวต้านทาน R จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับกระแสที่ผ่านตัวต้านทานนั้น นั่นคือ

$$E_R \propto I$$

$$E_R = RI$$

เมื่อ R เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าความต้านทาน

2. ศักย์ลดระหว่างปลายทั้งสองของตัวเหนี่ยวนำจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสในขณะนั้น

$$E_L \propto \frac{dI}{dt}$$

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

เมื่อ L เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าเหนี่ยวนำ

3. ศักย์ลดระหว่างขั้วทั้งสองของตัวเก็บประจุจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับปริมาณประจุไฟฟ้าในขณะนั้น นั่นคือ

$$E_C \propto Q$$

$$E_C = \frac{Q}{C}$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าความจุ

กฎของเคอร์ชอฟฟ์ที่ใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้าคือ **กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้า** (Kirchhoff's Voltage Law) ซึ่งกล่าวว่า "ผลรวมทางพีชคณิตของศักย์ลดตลอดวงจรในทิศทางที่กำหนดจะมีค่าเท่ากับศูนย์"

เนื่องจากศักย์ลดระหว่างปลายทั้งสองของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุมีเครื่องหมายเหมือนกัน แต่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า ดังนั้น กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้าอาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ "ผลรวมทางพีชคณิตของศักย์ลดระหว่างปลายทั้งสองของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุจะเท่ากับแรงเคลื่อนไฟฟ้าทั้งหมดในวงจรปิด"

จากรูป 5.8 โดยกฎของเคอร์ชอฟฟ์จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E \qquad \text{..........(5.3.1)}$$

แต่ $I = \frac{dQ}{dt}$ ดังนั้น สมการ (5.3.1) จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ของ

ตัวแปร Q

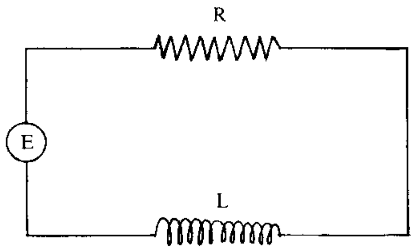
$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C} = E \qquad \text{..........(5.3.2)}$$

จากสมการ (5.3.1) หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C} = \frac{dE}{dt} \qquad \text{..........(5.3.3)}$$

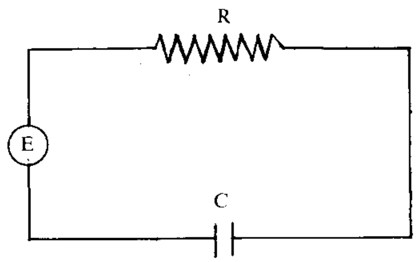
ซึ่งเป็นสมการอันดับสองของตัวแปร I

ในวงจรไฟฟ้าอย่างง่ายที่เรียนแล้วในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ จะมี 2 ลักษณะดังรูป 5.9 และ 5.10



รูป 5.9

สมการคือ $$L\frac{dI}{dt}+RI = E \qquad \text{..........(5.3.4)}$$



รูป 5.10

สมการคือ $$RI+\frac{Q}{C} = E$$

หรือ $$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C} = E \qquad \text{..........(5.3.5)}$$

สมการ (5.3.4) และ (5.3.5) เป็นสมการอันดับหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่าง วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยตัวก่อกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 50 \cos 6t$ โวลต์ ต่อเป็นอนุกรมกับตัวต้านทาน $25\,\Omega$ ตัวเก็บประจุ 5×10^{-3} ฟารัด ถ้าเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ จำนวนประจุเท่ากับศูนย์ จงหาจำนวนประจุในตัวเก็บประจุและกระแสไฟฟ้าเมื่อเวลา t

วิธีทำ ในที่นี้กำหนดให้ $E = 50\cos 6t$ โวลต์

$$R = 25\,\Omega$$

$$C = 5\times 10^{-3} \text{ ฟารัด}$$

ดังนั้น ใช้สมการ (5.3.5)

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

$$25\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{5\times 10^{-3}} = 50\cos 6t$$

$$\frac{dQ}{dt} + 8Q = 2\cos 6t$$

โดยผลการแปลงลาปลาซ เมื่อ $Q(0) = 0$

$$L\left\{\frac{dQ}{dt}\right\} + 8L\{Q\} = 2L\{\cos 6t\}$$

$$\left[sL\{Q\} - Q(0)\right] + 8L\{Q\} = \frac{2s}{s^2+36}$$

$$(s+8)L\{Q\} = \frac{2s}{s^2+36}$$

$$L\{Q\} = \frac{2s}{(s+8)(s^2+36)}$$

$$= 2\left[-\frac{8}{100(s+8)} + \frac{8s}{100(s^2+36)} + \frac{36}{100(s^2+36)}\right]$$

$$Q = -\frac{16}{100}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\} + \frac{16}{100}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+36}\right\}$$

$$+\frac{12}{100}L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+36}\right\}$$

$$= -0.16e^{-8t} + 0.16\cos 6t + 0.12\sin 6t$$

ประจุเมื่อเวลา t ใด ๆ

$$Q(t) = 0.16\cos 6t + 0.12\sin 6t - 0.16e^{-8t}$$

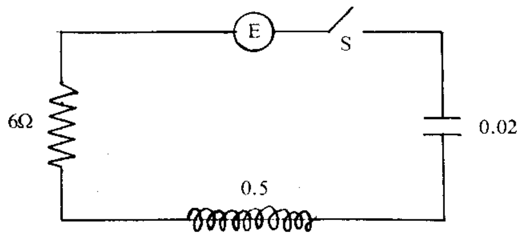
กระแสเมื่อเวลา t ใด ๆ $I = \dfrac{dQ}{dt}$

$$I = (-0.16)(-8)e^{-8t} - (0.16)(6)\sin 6t + (0.12)(6)\cos 6t$$

$$= 1.28e^{-8t} - 0.96\sin 6t + 0.72\cos 6t$$

ตัวอย่าง วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อน $E = 24\sin 10t$ โวลต์ ต่อเป็น

อนุกรมกับตัวต้านทาน 6 โอห์ม ตัวเก็บประจุ 0.02 ฟารัด ตัวเหนี่ยวนำ 0.5 เฮนรี และสวิตช์ไฟ S ดังรูป 5.11 จงหาจำนวนประจุและกระแสไฟฟ้าเมื่อเวลา t ใด ๆ หลังจากที่สับสวิตช์ให้ไฟเดิน ถ้าหากว่าจำนวนประจุที่ตัวเก็บประจุมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อเวลา t = 0



รูป 5.11

วิธีทำ ในที่นี้กำหนดให้

$$E = 24 \sin 10t \text{ โวลต์}$$
$$R = 6\ \Omega$$
$$L = 0.5 \text{ เฮนรี}$$
$$C = 0.02 \text{ ฟารัด}$$

จากสมการ (5.3.2)

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

แทนค่าจะได้

$$0.5\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.02} = 24 \sin 10t$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 12\frac{dQ}{dt} + 100Q = 48 \sin 10t$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น เมื่อ $t = 0,\ Q = 0,\ I = \frac{dQ}{dt} = 0$

โดยผลการแปลงลาปลาซ

$$L\left\{\frac{d^2Q}{dt^2}\right\} + 12L\left\{\frac{dQ}{dt}\right\} + 100L\{Q\} = 48L\{\sin 10t\}$$

$$\left[s^2L\{Q\} - sQ(0) - Q'(0)\right] + 12\left[sL\{Q\} - Q(0)\right] + 100L\{Q\} = 48\left(\frac{10}{s^2+100}\right)$$

$$(s^2 + 12s + 100)L\{Q\} = \frac{480}{s^2+100}$$

$$L\{Q\} = \frac{480}{(s^2+100)(s^2+12s+100)}$$

$$= \frac{480}{(s^2+100)\left[(s+6)^2+64\right]}$$

$$= -\frac{2}{5}\left[\frac{s}{s^2+10^2}\right\} + \frac{4}{10}\left[\frac{(s+6)}{(s+6)^2+8^2}\right] + \frac{3}{10}\left[\frac{8}{(s+6)^2+8^2}\right]$$

$$Q(t) = -\frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+10^2}\right\} + \frac{4}{10}L^{-1}\left\{\frac{(s+6)}{(s+6)^2+8^2}\right\} + \frac{3}{10}L^{-1}\left\{\frac{8}{(s+6)^2+8^2}\right\}$$

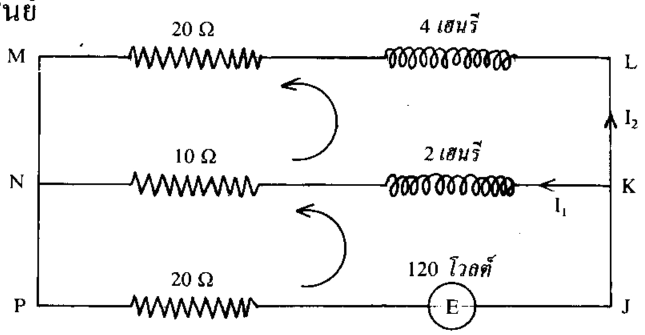
$$= -\frac{2}{5}\cos 10t + \frac{4}{10}e^{-6t}\cos 8t + \frac{3}{10}e^{-6t}\sin 8t$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$= 4\sin 10t - 5e^{-6t}\sin 8t$$

ในการพิจารณาวงจรต่าง ๆ ที่ยุ่งยากขึ้น จะทำให้ได้ระบบสมการ ซึ่งได้ทราบการหาคำตอบแล้วในหัวข้อ 4.5 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้วงจรไฟฟ้าต่อดังรูป 5.12 จงหากระแสไฟฟ้าในสายต่าง ๆ ถ้ากระแสไฟฟ้าเริ่มต้นมีค่าเท่ากับศูนย์



รูป 5.12

วิธีทำ พิจารณาวงจร KLMNK และ JKNPJ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
ให้ศักย์ลดเป็นบวกเมื่อทวนกระแสไฟฟ้า
ให้ I เป็นกระแสใน NPJKN และกระแสแยกเป็น I_1 และ I_2 ที่ K
ดังนั้น $I = I_1 + I_2$

โดยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ของวงจร KLMNK และ NPJKN จะได้สมการ (5.3.6) และ (5.3.7) ตามลำดับ

$$-10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \qquad \text{..........(5.3.6)}$$

$$20I - 120 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0 \qquad \text{..........(5.3.7)}$$

จาก (5.3.6) $$\frac{dI_1}{dt} - 2\frac{dI_2}{dt} = -5I_1 + 10I_2 \qquad \text{..........(5.3.8)}$$

แทนค่า $I = I_1 + I_2$ ใน (5.3.7)

$$\frac{dI_1}{dt} + 15I_1 + 10I_2 = 60 \qquad \text{.........(5.3.9)}$$

ใส่ผลการแปลงลาปลาซใน (5.3.8) และ (5.3.9) และ $I_1(0) = I_2(0) = 0$

$$L\left\{\frac{dI_1}{dt}\right\} - 2L\left\{\frac{dI_2}{dt}\right\} + 5L\{I_1\} - 10L\{I_2\} = 0$$

$$(s+5)L\{I_1\} - 2(s+5)L\{I_2\} = 0$$

$$L\{I_1\} = 2L\{I_2\}$$

$$L\left\{\frac{dI_1}{dt}\right\} + 15L\{I_1\} + 10L\{I_2\} = L\{60\}$$

$$(s+15)L\{I_1\} + 10L\{I_2\} = \frac{60}{s}$$

แทนค่า $L\{I_1\}$

$$(2s+30+10)L\{I_2\} = \frac{60}{s}$$

$$L\{I_2\} = \frac{60}{2(s+20)s}$$

$$= \frac{30}{s(s+20)}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+20}\right)$$

$$I_2 = \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+20}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}(1 - e^{-20t})$$

$$L\{I_1\} = 2L\{I_2\}$$

$$= 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+20}\right)$$

$$I_1 = 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+20}\right\}$$

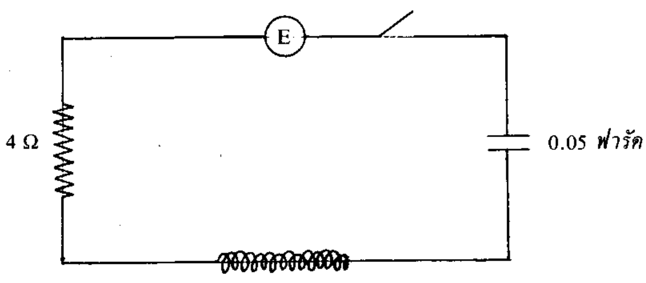
$$= 3(1 - e^{-20t})$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{9}{2}(1 - e^{-20t})$$

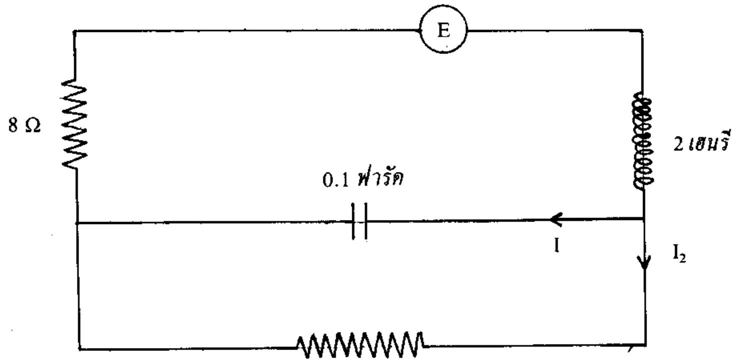
แบบฝึกหัด 5.2

1. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยตัวก่อกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อน $100 \sin 40t$ โวลท์ ตัวต้านทาน $10\,\Omega$ และตัวเหนี่ยวนำ 0.5 เฮนรี ต่อเป็นอนุกรม ถ้ากระแสไฟฟ้าเมื่อเริ่มต้นเป็นศูนย์ จงหากระแสไฟฟ้าเมื่อเวลา t ใด ๆ
2. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 100$ โวลท์ ต่อเป็นอนุกรมกับตัวต้านทาน $10\,\Omega$ ตัวเก็บประจุ 2×10^{-4} ฟารัด จำนวนประจุในตัวเก็บประจุเท่ากับ 0 เมื่อ $t = 0$ จงหาจำนวนประจุและกระแสเมื่อเวลา $t > 0$
3. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $100 \sin 60t$ โวลต์ ตัวต้านทาน $2\,\Omega$ ตัวเหนี่ยวนำ 0.1 เฮนรี และตัวเก็บประจุ $\frac{1}{260}$ ฟารัด ต่อเป็นอนุกรม ถ้าเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ กระแสไฟฟ้าในวงจรและจำนวนประจุเท่ากับ 0 จงหาจำนวนประจุในตัวเก็บประจุเมื่อเวลา $t > 0$
4. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $200e^{-100t}$ โวลต์ ตัวต้านทาน $80\,\Omega$ ตัวเหนี่ยวนำ 0.2 เฮนรี และตัวเก็บประจุ 5×10^{-6} ฟารัด ต่อกันเป็นอนุกรม ถ้าเมื่อเริ่มต้นกระแสในวงจรและจำนวนประจุในตัวเก็บประจุเท่ากับ 0 จงหากระแสเมื่อเวลา $t > 0$
5. ให้จำนวนประจุในตัวเก็บประจุเท่ากับ 2 คูลอมบ์ เมื่อเริ่มต้น

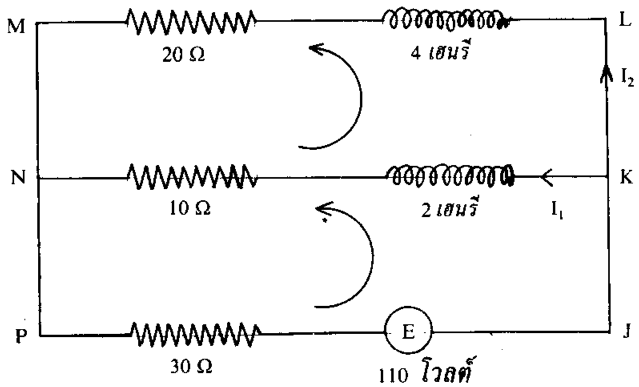


   ถ้าสวิตซ์ K ปิดเมื่อ $t = 0$ จงหาจำนวนประจุและกระแสเมื่อเวลา $t > 0$ เมื่อ
   1. $E = 100$ โวลต์
   2. $E = 100 \sin 4t$
6. จงหากระแสไฟฟ้า I, I_1, I_2 ในรูป และหาจำนวนประจุ Q ถ้ากำหนดให้
   1. $E = 360$
   2. $E = 600\, e^{-5t} \sin 3t$

กระแสและจำนวนประจุ เมื่อ $t = 0$ มีค่าเท่ากับศูนย์



7. จงหากระแสไฟฟ้า I, I_1 และ I_2 ถ้ากระแสเริ่มต้น $= 0$



5.4 การแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับ**เงื่อนไขขอบเขต** (boundary condition) และเรียกการแก้สมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตนี้ว่า **ปัญหาค่าขอบ** (boundary value problem) ในการแก้ปัญหาค่าขอบนั้นนอกจากจะใช้วิธีการแยกตัวแปรแล้วหาคำตอบในรูปอนุกรมฟูริเยร์แล้ว อาจจะใช้วิธีผลการแปลงลาปลาซหาคำตอบได้

ให้ $u(x, t)$ นิยามได้บน $a \leqslant x \leqslant b,\ t > 0$ จะได้

1. $$L\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt = U(x, s)$$

2. $$L\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

$$= e^{-st}u(x, t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt$$

$$= -u(x, 0) + sU(x, s)$$

ดังนั้น $$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, 0)$$

3. $$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt$$

$$= e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + s[sU(x, s) - u(x, 0)]$$

$$= s^2U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$$

$$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

4. $$L\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}U(x, s)$$

$$= \frac{d}{dx}U(x, s)$$

5. $$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2}{dx^2}U(x, s)$$

จากคุณสมบัติผลการแปลงลาปลาซทั้ง 5 ข้อนำไปใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2u = 0$

เมื่อ $u(x, 0) = 8e^{-3x} - 4e^{-5x}$

วิธีทำ โดยผลการแปลงลาปลาซ

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + 2L\{u\} = 0$$

$$sU(x, s) - u(x, 0) - \frac{d}{dx}U(x, s) - 2U(x, s) = 0$$

$$\frac{d}{dx}U(x, s) - (s+2)U(x, s) = 4e^{-5x} - 8e^{-3x}$$

สมการนี้เป็นสมการอันดับหนึ่ง หาคำตอบได้โดยหาตัวประกอบอินทิเกรต ซึ่งมีค่า

$$= e^{\int -(s+2)dx}$$

$$= e^{-(s+2)x}$$

คูณสมการด้วย $e^{-(s+2)x}$

$$\frac{d}{dx}\left[U(x, s)e^{-(s+2)x}\right] = (4e^{-5x} - 8e^{-3x})e^{-(s+2)x}$$

$$= 4e^{-(s+7)x} - 8e^{-(s+5)x}$$

$$U(x, s)e^{-(s+2)x} = \frac{4e^{-(s+7)x}}{-(s+7)} - \frac{8e^{-(s+5)x}}{-(s+5)} + C$$

$$U(x, s) = -\frac{4e^{-5x}}{(s+7)} + \frac{8e^{-3x}}{s+5} + Ce^{(s+2)x}$$

เนื่องจาก $|u(x, t)| \leqslant M$ จะได้ $\lim_{x \to \infty} U(x, s) \leqslant M$

ดังนั้น $C = 0$

$$u(x, t) = -4e^{-5x}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+7}\right\} + 8e^{-3x}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$= \quad -4e^{-5x}(e^{-7t}) + 8e^{-3x}(e^{-5t})$$

$$= \quad -4e^{-5x-7t} + 8e^{-3x-5t}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $x\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = x, \; x > 0, \; t > 0$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการ

$$L\left\{x\frac{\partial u}{\partial t}\right\} + L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = L\{x\}$$

$$x\left[sU(x, s) - u(x, 0)\right] + \frac{d}{dx}U(x, s) = \frac{x}{s}$$

$$\frac{d}{dx}U(x, s) + xsU(x, s) = \frac{x}{s}$$

ตัวประกอบอินทิเกรตของสมการคือ $e^{\int xs\,dx} = e^{x^2s/2}$

คูณสมการด้วย $e^{x^2s/2}$

$$\frac{d}{dx}\left[U(x, s)e^{x^2s/2}\right] = \frac{x}{s}e^{x^2s/2}$$

$$U(x, s)e^{x^2s/2} = \frac{1}{s}\int xe^{x^2s/2}dx + C$$

$$= \frac{1}{s^2}e^{x^2s/2} + C$$

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2} + Ce^{-x^2s/2}$$

$$U(0, s) = \int_0^\infty u(0, t)e^{-st}dt = 0$$

แต่ $$U(0, s) = \frac{1}{s^2} + C = 0$$

$$C = -\frac{1}{s^2}$$

ดังนั้น $$U(x, s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-x^2s/2}}{s^2}$$

$$U(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{2}s}}{s^2}\right\}$$

$$= t - \begin{cases} 0, & t < \dfrac{x^2}{2} \\ t - \dfrac{x^2}{2}, & t > \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t, & t < \dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2}, & t > \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าขอบโดยวิธีการแปลงลาปลาซของสมการความร้อน

D.E. $u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u(1, t) = 0, \quad t > 0$

I.C. $u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 < x < 1$

วิธีทำ

$$L\{u_t\} = L\{u_{xx}\}$$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \frac{d^2}{dx^2}U(x, s)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x, s) - sU(x, s) = -\sin 2\pi x \qquad \text{..........(5.4.1)}$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2

คำตอบของสมการคือ $U(x, s) = U_C + U_P$

เมื่อ U_C เป็นคำตอบประกอบ และ U_P เป็นคำตอบเฉพาะ

คำตอบ U_C หาจาก $\dfrac{d^2U}{dx^2} - sU(x, s) = 0$

$$U_C = -c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

ในการหา U_P ให้ $U_P = A \sin 2\pi x + B \cos 2\pi x$

$$U_P' = 2\pi A \cos 2\pi x - 2\pi B \sin 2\pi x$$

$$U_P'' = -4\pi^2 A \sin 2\pi x - 4\pi^2 B \cos 2\pi x$$

แทนค่าในสมการ (5.4.1) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์

$$-(4\pi^2 + s)A \sin 2\pi x - (4\pi^2 + s)B \cos 2\pi x = -\sin 2\pi x$$

$$A = \frac{1}{4\pi^2 + s}$$

$$B = 0$$

$$U_P = \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 + s}$$

$$U(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 + s}$$

$$U(0, s) = L\{u(0, t)\} = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{จะได้ } c_1 = -c_2$$

$$U(1, s) = L\{u(1, t)\} = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$$

$$c_2(-e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}) = 0$$

$$c_2 = c_1 = 0$$

$$U(x, s) = \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 + s}$$

$$u(x, t) = L^{-1}\left\{ \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 + s} \right\}$$

$$= \sin 2\pi x L^{-1}\left\{ \frac{1}{4\pi^2 + s} \right\}$$

$$= e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการคลื่นโดยวิธีผลการแปลงลาปลาซ

D.E. $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < a, \ t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u_x(a, t) = 6, \quad t > 0$

I.C. $u(x, 0) = 0$

$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการ D.E.

$$L\{u_{tt}\} = L\{u_{xx}\}$$

$$s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = \frac{d^2U}{dx^2}(x, s)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x, s) - s^2U(x, s) = 0$$

$$U(x, s) = A \cosh sx + B \sinh sx$$

$$U(0, s) = \int_0^\infty u(0, t)e^{-st}dt = 0 = A$$

ดังนั้น $U(x, s) = B \sinh sx$

$U_x(x, s) = Bs \cosh sx$

$U_x(a, s) = Bs \cosh sa$

แต่ $U_x(a, s) = \int_0^\infty u_x(a, t)e^{-st}dt$

$= \int_0^\infty be^{-st}dt$

$= \frac{b}{s}$

ดังนั้น $Bs \cosh sa = \frac{b}{s}$

$B = \frac{b}{s^2 \cosh sa}$

$U(x, s) = \frac{b \sinh sx}{s^2 \cosh sa}$

ในการหา $u(x, t)$ จะอาศัยตารางในหนังสือท้ายเล่ม

เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}\right\} = x + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$

ดังนั้น
$$u(x, t) = b\left\{x + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right\}$$

แบบฝึกหัด 5.3

จงหาคำตอบโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

1. $u_t = 3u_x, \quad u(x, 0) = 4e^{-2x}$
2. $u_x - u_t = 1 - e^{-t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = x$
3. $u_t - u_x + 3u = 0, \quad u(x, 0) = 3e^{-x} - 5e^{-3x}$
4. $u_t = 2u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0$

$$u(0, t) = 0$$
$$u(3, t) = 0$$
$$u(x, 0) = 5 \sin 2\pi x$$

5. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$

$$u_x(0, t) = 0$$
$$u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 5 \cos \pi x, \quad 0 < x < 2$$

6. $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$

$$u(0, t) = 0$$
$$u(L, t) = 0$$
$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$