$$\phi''(s) = \frac{-2}{(s+1)^3}$$

ในที่นี้ $a = -2$

$$\phi(-2) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\phi'(-2) = \frac{1}{(-2+1)^2} = 1$$

$$\phi''(-2) = \frac{-2}{(-2+1)^3} = 2$$

$f(t)$ ที่คล้องตาม $\frac{\phi(s)}{(s+2)^3}$ คือ

$$\frac{\phi''(-2)}{2}e^{at} + \phi'(-2)te^{at} + \phi(-2)\frac{t^2}{2}e^{at} = \frac{2}{2}e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{2t^2}{2}e^{-2t}$$

$$= e^{-2t} + te^{-2t} + t^2e^{-2t}$$

พิจารณาเทอมของ $f(t)$ ที่สมนัยกับ $(s+1)$ โดยทฤษฎีบทที่ 4.1

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

ในที่นี้

$$p(s) = s$$

$$q(s) = (s+1)(s+2)^3$$

$$q'(s) = (s+2)^3 + (s+1)3(s+2)^2$$

$a = -1 \quad q'(-1) = (-1+2)^3 = 1$

$$p(-1) = -1$$

$f(t)$ ที่สมนัยกับ $(s+1)$ คือ $f(t) = \frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-1t}$

$$= -e^{-t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)^3}\right\} = -e^{-t} + e^{-2t} + te^{-2t} + t^2e^{-2t}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.3

ให้ $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ เมื่อ $p(s)$ และ $q(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าจริง เทอมของ $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับรากที่ต่างกันของ $(s-a)^2+b^2$ ใน $q(s)$ คือ

$$\frac{e^{at}}{b}(\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt)$$

เมื่อ ϕ_r และ ϕ_i คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $\phi(a+bi)$ (real and imaginary parts of ϕ (a + bi)

$\phi(s)$ คือ ฟังก์ชันที่เหลือหลังจากเอาตัวประกอบ $(s-a)^2+b^2$ ออก

พิสูจน์ ให้
$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)^2+b^2}$$
$$= \frac{As+B}{(s-a)^2+b^2} + h(s)$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัวที่เป็นค่าจริง
$$\phi(s) = As+B+h(s)\left[(s-a)^2+b^2\right]$$

เพราะว่า รากของสมการ $(s-a)^2+b^2 = 0$ คือ $a\pm bi$
$$\phi(a+bi) = (a+bi)A+B$$

ให้ $\phi(a+bi) = \phi_r + i\phi_i$

เมื่อ ϕ_r คือ ส่วนจริง (real part) และ ϕ_i คือ ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $\phi(a+bi)$

ดังนั้น
$$\phi_r + i\phi_i = (a+bi)A+B$$
$$= (aA+B)+bAi$$
$$\phi_r = aA+B$$
$$\phi_i = bA$$

ดังนั้น
$$A = \frac{\phi_i}{b}$$

และ
$$B = \frac{b\phi_r - a\phi_i}{b}$$

แทนค่าจะได้
$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi_i s + (b\phi_r - a\phi_i)}{b\left[(s-a)^2+b^2\right]} + h(s)$$
$$= \frac{1}{b}\left\{\frac{(s-a)\phi_i + b\phi_r}{(s-a)^2+b^2}\right\} + h(s)$$
$$= \frac{1}{b}\left\{\frac{(s-a)\phi_i}{(s-a)^2+b^2} + \frac{b\phi_r}{(s-a)^2+b^2}\right\} + h(s)$$

เพราะว่า
$$L^{-1}\left\{\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$$

และ
$$L^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\sin bt$$

ดังนั้น $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$

$$= \frac{1}{b}\left[\phi_i L^{-1}\left\{\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}\right\} + \phi_r L^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}\right] + L^{-1}\{h(s)\}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\phi_i e^{at}\cos bt + \phi_r e^{at}\sin bt\right] + H(t)$$

$$= \frac{e^{at}}{b}\left[\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt\right] + H(t)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

วิธีทำ ให้ $\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

พิจารณาตัวประกอบของ $q(s)$ ในรูป $(s+3)$

$$p(s) = s-1$$

$$q(s) = (s+3)(s^2+2s+2)$$

$$q'(s) = (s^2+2s+2)+(s+3)(2s+2)$$

เมื่อ $a = -3$

$$p(-3) = -4$$

$$q'(-3) = (-3)^2+2(-3)+2$$

$$= 5$$

เทอมของ $f(t)$ ที่สมนัยกับ $(s+3)$ คือ $\frac{p(-3)}{q'(-3)}e^{-3t}$

$$= -\frac{4}{5}e^{-3t}$$

สำหรับตัวประกอบ s^2+2s+2 จะใช้ทฤษฎีบท 4.3

$$s^2+2s+2 = 0$$

$$s = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(2)}}{2}$$

$$= \frac{-2\pm 2i}{2}$$

$$= -1\pm i$$

ให้ $s = -1+i = a+bi$

ให้ $\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{\phi(s)}{(s^2+2s+2)}$

เมื่อ $$\phi(s) = \frac{s-1}{s+3}$$

$$\begin{aligned}
\phi(a+bi) &= \phi(-1+i) \\
&= \frac{(-1+i)-1}{(-1+i)+3} \\
&= \frac{-2+i}{2+i} \\
&= \frac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\
&= \frac{-4+4i+1}{4+1} \\
&= -\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \\
&= \phi_r + \phi_i i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\phi_r = -\frac{3}{5}$, $\phi_i = \frac{4}{5}$

เทอมของ $f(t)$ ที่สมนัยกับตัวประกอบ s^2+2s+2 คือ

$$\begin{aligned}
\frac{e^{at}}{b}\left[\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt\right] &= \frac{e^{-t}}{1}\left[\frac{4}{5}\cos t - \frac{3}{5}\sin t\right] \\
&= \frac{e^{-t}}{5}\left[4\cos t - 3\sin t\right]
\end{aligned}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{e^{-t}}{5}\left[4\cos t - 3\sin t\right] - \frac{4}{5}e^{-3t}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s-2)^2(s^2+4)}\right\}$

วิธีทำ ให้ $$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{4s}{(s-2)^2(s^2+4)}$$

พิจารณาตัวประกอบ $(s-2)^2$ โดยทฤษฎีบท 4.2

ให้ $$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-2)^2}$$

เมื่อ $$\phi(s) = \frac{4s}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \frac{(s^2+4)(4)-4s(2s)}{(s^2+4)^2} \\
&= \frac{16-4s^2}{(s^2+4)^2}
\end{aligned}$$

ในที่นี้ $a = 2$

$$\phi(2) = \frac{4(2)}{(2)^2+4} = 1$$

$$\phi'(2) = \frac{16-4(2^2)}{(s^2+4)^2} = 0$$

เทอม $f(t)$ ที่สมนัยกับตัวประกอบ $(s-2)^2$ คือ

$$\phi'(a)e^{at} + \phi(a)te^{at} = 0 \cdot e^{2t} + (1)te^{2t}$$

$$= te^{2t}$$

สำหรับตัวประกอบ (s^2+4) จะใช้ทฤษฎีบท 4.3

ให้ $\dfrac{4s}{(s-2)^2(s^2+4)} = \dfrac{\phi(s)}{(s^2+4)}$

เมื่อ $\phi(s) = \dfrac{4s}{(s-2)^2}$

รากของ $s^2+4 = 0$ คือ $s = \pm 2i$

พิจารณา $s = a+bi = 2i$

$$a = 0,\ b = 2$$

$$\phi(a+bi) = \phi(2i)$$

$$= \frac{4(2i)}{(2i-2)^2}$$

$$= \frac{2i}{(i-1)^2}$$

$$= \frac{2i}{-2i}$$

$$= -1$$

$$= \phi_r + \phi_i i$$

ดังนั้น $\phi_r = -1,\quad \phi_i = 0$

เทอมของ $f(t)$ ที่สมนัยกับ s^2+4 คือ

$$\frac{e^{at}}{b}\left[\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt\right] = \frac{e^{0t}}{2}\left[(0)\cos 2t - \sin 2t\right]$$

$$= -\frac{\sin 2t}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s-2)^2(s^2+4)}\right\} = te^{2t} - \frac{\sin 2t}{2}$$

แบบฝึกหัด 4.2

จงใช้การแยกเศษส่วนย่อยหาค่าของ

1. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s+2)(s-1)} \right\}$

2. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s-3}{s^2-s-6} \right\}$

3. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s+2}{(s+1)(s^2+4)} \right\}$

4. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+1)} \right\}$

5. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)^3} \right\}$

6. $L^{-1}\left\{ \dfrac{4s+1}{(s^2+s)(4s^2-1)} \right\}$

7. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s^2-s-6)^4} \right\}$

8. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4s+13)} \right\}$

จงใช้การกระจายของเฮรีไซด์หาค่าของ

9. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)} \right\}$

10. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)^3} \right\}$ เปรียบเทียบคำตอบกับข้อ 5

11. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)} \right\}$

12. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)} \right\}$

13. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2+2}{(s^2+4s+5)(s^2+6s+10)} \right\}$

4.4 การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

(The Solution of Ordinary Differential Equations)

การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้น เราได้ทราบวิธีการหาคำตอบมาบ้างแล้วในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ ในการหาคำตอบจะพิจารณาถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

4.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(Ordinary Differential equations with constant coefficients)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว อันดับ n ดังนี้

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny = f(t) \qquad \text{..........(4.4.1)}$$

กำหนดเงื่อนไขให้ $y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\dots,y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ (4.4.1)

$$a_0L\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\}+a_1L\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\}+\dots+a_{n-1}L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+a_nL\{y(t)\} = L\{f(t)\}$$

จากคุณสมบัติการแปลงลาปลาซจะได้

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\} &= s^nL\{y(t)\}-s^{n-1}y(0)-s^{n-1}y'(0)-\dots-y^{(n-1)}(0)\\
&= s^nL\{y(t)\}-c_0s^{n-1}-c_1s^{n-2}-\dots-c_{n-1}\\
L\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} &= s^{n-1}L\{y(t)\}-s^{n-2}y(0)-s^{n-3}y'(0)-\dots-y^{(n-2)}(0)\\
&= s^{n-1}L\{y(t)\}-c_0s^{n-2}-c_1s^{n-3}-\dots-c_{n-2}\\
L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} &= sL\{y(t)\}-y(0)\\
&= sL\{y(t)\}-c_0
\end{aligned}$$

ให้ $Y(s) = L\{y(t)\}$ และ $F(s) = L\{f(t)\}$ แทนค่าในสมการ จะได้

$$\left[a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n\right]Y(s)-c_0\left[a_0s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\dots+a_{n-1}\right]$$
$$-c_1\left[a_0s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\dots+a_{n-2}\right]-\dots-c_{n-2}\left[a_0s+a_1\right]-c_{n-1}a_0 = F(s)$$

จากสมการมีตัวไม่ทราบค่าคือ Y(s) แก้สมการหา Y(s) และใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันหา y(t) ได้เพราะว่า

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

สรุปขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังนี้

1. ใส่ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการที่กำหนดให้
2. ใช้สูตรผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y(t) และเงื่อนไขที่กำหนดให้
3. แก้สมการหาค่า Y(s)
4. หา y(t) ได้จาก $L^{-1}\{Y(s)\}$ โดยหัวข้อ 4.1, 4.2, 4.3 ที่ผ่านมาแล้ว

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial – value problem) ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}$$

$$y(0) = 3$$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2L\{y(t)\} = L\{e^{5t}\}$$

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$(s-2)Y(s) - 3 = \frac{1}{s-5}$$

$$(s-2)Y(s) = \frac{3s-14}{s-5}$$

$$Y(s) = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}$$

โดยการแยกเศษส่วนย่อย

ให้ $\dfrac{3s-14}{(s-2)(s-5)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-5}$

$$3s - 14 = (s-5)A + (s-2)B$$

ให้ $s = 2$

$$-8 = -3A$$

$$A = \frac{8}{3}$$

ให้ $s = 5$

$$1 = 3B$$

$$B = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{8}{3(s-2)} + \frac{1}{3(s-5)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

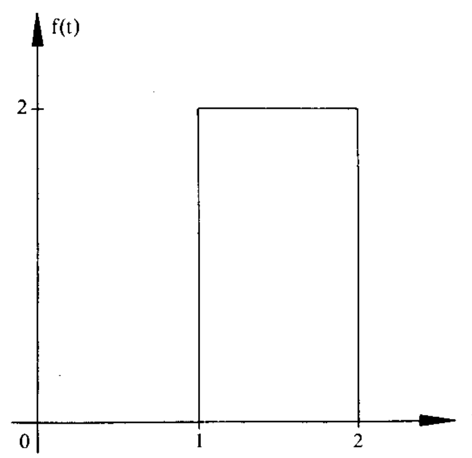
$$= \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$$

$$= \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ

$$y' + 3y + 2\int_0^t y\,dt = f(t)$$

เมื่อ $y(0) = 1$ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป 4.1



รูป 4.1

วิธีทำ ในที่นี้ $f(t) = 2u(t-1) - 2u(t-2)$ ดังนั้น สมการที่กำหนดให้ คือ

$$y' + 3y + 2\int_0^t y\,dt = 2u(t-1) - 2u(t-2)$$

ใส่ผลการแปลงลาปลาซ

$$L\{y'\} + 3L\{y\} + 2L\left\{\int_0^t y\,dt\right\} = 2L\{u(t-1)\} - 2L\{u(t-2)\}$$

$$[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 2e^{-s} - 2e^{-2s} + s$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} + \frac{2e^{-s}}{(s+1)(s+2)} - \frac{2e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

เพราะว่า $\frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$

และ $\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

ดังนั้น $Y(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} + 2\left[\frac{e^{-s}}{s+1} - \frac{e^{-s}}{s+2}\right] - 2\left[\frac{e^{-2s}}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{s+2}\right]$

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-t} + 2\left[e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-2)}u(t-2)\right] - 2\left[e^{-2(t-1)}u(t-1) - e^{-2(t-2)}u(t-2)\right]$$

$$= 2e^{-2t} - e^{-t} + 2\left[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right]u(t-1) - 2\left[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = e^{-2t}\sin t$ เมื่อ $y(0) = 0, y'(0) = 0$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + L\{y(t)\} = L\{e^{-2t}\sin t\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left[(s+2)^2 + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}$$

วิธีที่ 1 โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$$1 = (As+B)(s^2+4s+5) + (Cs+D)(s^2+1)$$

$$1 = (A+C)s^3 + (4A+B+D)s^2 + (5A+4B+C)s + (5B+D)$$

โดยการเทียบ ส.ป.ส.

$$A+C = 0$$
$$4A+B+D = 0$$
$$5A+4B+C = 0$$
$$5B+D = 1$$

แก้สมการหาค่า A, B, C, D จะได้

$$A = -\frac{1}{8},\ B = \frac{1}{8},\ C = \frac{1}{8},\ D = \frac{3}{8}$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = -\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} + \frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$

พิจารณา $\frac{s}{s^2+4s+5} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} \\
&= -\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} \\
&= -\frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{8}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{8}e^{-2t}\sin t \\
&= \frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 โดยใช้ทฤษฎีผลการประสาน

$$\frac{1}{(s^2+1)\left[(s+2)^2+1\right]} = F(s)G(s)$$

เมื่อ $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$

ดังนั้น $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\sin t$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)\left[(s+2)^2+1\right]}\right\} = f(t)*g(t)$$

$$= \int_0^t \sin\lambda\, e^{-2(t-\lambda)} \sin(t-\lambda)d\lambda$$

หรือ $$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)\left[(s+2)^2+1\right]}\right\} = g(t)*f(t)$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda}\sin\lambda\ \sin(t-\lambda)d\lambda$$

จะเห็นว่าการหาค่า $g(t)*f(t)$ จะง่ายกว่า

$$\int_0^t e^{-2\lambda}\sin\lambda\ \sin(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t e^{-2\lambda}\sin\lambda\left[\sin t\cos\lambda - \cos t\sin\lambda\right]d\lambda$$

$$= \sin t\int_0^t e^{-2\lambda}\sin\lambda\ \cos\lambda d\lambda - \cos t\int_0^t e^{-2\lambda}\sin^2\lambda d\lambda$$

$$= \sin t\int_0^t e^{-2\lambda}\left(\frac{\sin 2\lambda}{2}\right)d\lambda - \cos t\int_0^t e^{-2\lambda}\left(\frac{1-\cos 2\lambda}{2}\right)d\lambda$$

$$= \frac{\sin t}{2}\int_0^t e^{-2\lambda}\sin 2\lambda d\lambda - \cos t\int_0^t e^{-2\lambda}d\lambda + \frac{\cos t}{2}\int_0^t e^{-2\lambda}\cos 2\lambda d\lambda$$

$$= -\sin t\left[\frac{e^{-2\lambda}}{8}(\sin 2\lambda + \cos 2\lambda)\right]_0^t + \frac{\cos t}{4}\left[e^{-2\lambda}\right]_0^t$$

$$+\cos t\left[\frac{e^{-2\lambda}}{8}(\sin 2\lambda - \cos 2\lambda)\right]_0^t$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{8}(\sin t\sin 2t + \sin t\cos 2t) + \frac{\sin t}{8} + \frac{e^{-2t}\cos t}{4} - \frac{\cos t}{4}$$

$$+\frac{e^{-2t}}{8}(\cos t\sin 2t - \cos t\cos 2t) + \frac{\cos t}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $y'''(t) - y(t) = e^t$

เมื่อ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y'''(t)\} - L\{y(t)\} = L\{e^t\}$$

$$\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\right] - Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^3 - 1)Y(s) = \frac{1}{(s-1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3-1)}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)}\right\}$$

โดยทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์

สำหรับเทอม $(s-1)^2$ ให้

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)} = \frac{\phi(s)}{(s-1)^2}$$

เมื่อ $\phi(s) = \dfrac{1}{(s^2+s+1)}$

$$\phi'(s) = \frac{-2s-1}{(s^2+s+1)^2}$$

เมื่อ $a = 1$

$$\phi(1) = \frac{1}{3}$$

$$\phi'(1) = -\frac{1}{3}$$

เทอมของ $y(t)$ ที่สมนัยกับตัวประกอบ $(s-1)^2$ คือ

$$\phi'(1)e^t + \phi(1)te^t = -\frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3}e^t$$

สำหรับ (s^2+s+1) จะใช้ทฤษฎีบท 4.3

ให้ $\dfrac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)} = \dfrac{\phi(s)}{s^2+s+1}$

เมื่อ

$$\phi(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$s^2+s+1 = 0$$

$$s = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i = a+bi$$

$$a = -\frac{1}{2},\quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\phi(a+bi) = \phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1\right]^2}$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i = \phi_r+\phi_i i$$

ดังนั้น $\phi_r = \frac{1}{6},\ \phi_i = \frac{\sqrt{3}}{6}$

เทอมของ $y(t)$ ที่สมนัยกับตัวประกอบ s^2+s+1 คือ

$$\frac{e^{at}}{b}\left[\phi_i\cos bt+\phi_r\sin bt\right] = \frac{e^{-t/2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$= \frac{e^{-t/2}}{3\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

คำตอบคือ $y(t) = \frac{1}{3}(t-1)e^t+\frac{e^{-t/2}}{3\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

4.4.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

(Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients)

การใช้ผลการแปลงลาปลาซแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร นั้นจะใช้สูตรที่ผ่านมาแล้วคือ

$$\begin{aligned} L\{t^n y(t)\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{y(t)\} \\ &= (-1)^n Y^n(s) \end{aligned}$$

เมื่อ $Y(s) = L\{y(t)\}$ เช่น

$$\begin{aligned} L\{t^2 y'(t)\} &= \frac{d^2}{ds^2}[sY(s) - y(0)] \\ &= sY''(s) + 2Y'(s) \\ L\{ty''(t)\} &= -\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] \\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$

เมื่อ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} L\{y''(t)\} + L\{ty'(t)\} - L\{y(t)\} &= 0 \\ [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + \left[-\frac{d}{ds}\{sY(s) - y(0)\}\right] - Y(s) &= 0 \\ [s^2Y(s) - 1] - \frac{d}{ds}\{sY(s)\} - Y(s) &= 0 \\ (s^2 - 1)Y(s) - 1 - \left[Y(s) + s\frac{d}{ds}Y(s)\right] &= 0 \\ s\frac{d}{ds}Y(s) + (2 - s^2)Y(s) &= -1 \\ \frac{d}{ds}Y(s) + \left(\frac{2}{s} - s\right)Y(s) &= \frac{-1}{s} \qquad \text{..........(4.4.2)} \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยการหาตัวประกอบอินทิเกรต (integrating factor) จะได้

$$e^{\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds} = e^{2\ln s-\frac{s^2}{2}}$$

$$= e^{\ln s^2}\cdot e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$= s^2e^{-\frac{s^2}{2}}$$

คูณสมการ (4.4.2) ด้วย $s^2e^{-\frac{s^2}{2}}$ แล้วจัดสมการใหม่

$$\frac{d}{ds}\left[s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot Y(s)\right] = -se^{-\frac{s^2}{2}}$$

อินทิเกรตตลอดสมการ จะได้

$$s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}+C$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}+\frac{C}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $Y(s)\to 0$ เมื่อ $s\to\infty$ ดังนั้น $C = 0$

ดังนั้น $Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$$y(t) = t$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $ty''(t)+y'(t)+ty(t) = 0$
เมื่อ $y(0) = 1$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการ ให้ $y'(0) =$ ค่าคงตัว C

$$L\{ty''\}+L\{y'\}+L\{ty\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+sY(s)-y(0)-\frac{dY}{ds} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-s-c\right]+sY(s)-1-\frac{dY}{ds} = 0$$

$$(s^2+1)\frac{dY}{ds}+sY(s) = 0$$

แยกตัวแปรได้

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{sds}{s^2+1}$$

$$\ln Y = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) + c_1$$

$$Y(s) = \frac{A}{\sqrt{s^2+1}}$$

เมื่อ $s > 1$

$$Y(s) = \frac{A}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{A}{s}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1\times 3}{2^2 2!}\frac{1}{s^4} - \dots -\right]$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\frac{(2n)!}{s^{2n+1}}$$

$$y(t) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}$$

เมื่อ $y(0) = 1$ จะได้ $A = 1$

$$y(t) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}$$

หมายเหตุ สมการในตัวอย่างข้างบนเรียกว่า สมการเบสเซลซึ่งมีดรรชนีศูนย์ (Bessel's equation with index zero)

แบบฝึกหัด 4.3

จงหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

1. $y'' + y = 1$

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$

$$y(0) = 2$$
$$y'(0) = -1$$

3. $y'' + 4y = \cos 2t$

$$y(0) = -2$$
$$y'(0) = 1$$

4. $y'' + 2y' + y = te^{-2t}$

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

5. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = \sin 20t$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = -2$$

6. $y''' - 2y'' - y' + 2y = u(t-2)$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = 1$$

7. $y'' + 2y' + 5y = f(t)$

เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$

8. $y^{(iv)} + 2y'' + y = \sin t$

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = -2$$
$$y''(0) = 3$$
$$y'''(0) = 0$$

9. $y' + 5y = \frac{1}{2}$

$$y(0) = 0$$

10. $y'' + 4y' + 13y = \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t$

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = -2$$

11. $ty'' + 2y' - (t-2)y = 2e^t$

$$y(0) = 0$$

12. $ty'' + 2y' + ty = 0$

$$y(0) = 1$$
$$y(\pi) = 0$$

4.5 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

(System of Ordinary differential equations)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีมากกว่าหนึ่งสมการ ก็สามารถหาคำตอบได้โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $x(t)$ และ $y(t)$ จากระบบสมการ

$$x'(t)+y'(t)+x(t)+y(t) = 1 \qquad \text{..........(4.5.1)}$$

$$y'(t)-2x(t)-y(t) = 0 \qquad \text{..........(4.5.2)}$$

เมื่อ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$

วิธีทำ ให้ $L\{x(t)\} = X(s)$ และ $L\{y(t)\} = Y(s)$

ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการ (4.5.1) และ (4.5.2)

จาก (4.5.1) $L\{x'(t)\}+L\{y'(t)\}+L\{x(t)\}+L\{y(t)\} = L\{1\}$

$$\left[sX(s)-x(0)\right]+\left[sY(s)-y(0)\right]+X(s)+Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s+1)X(s)+(s+1)Y(s) = 1+\frac{1}{s}$$

$$X(s)+Y(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{..........(4.5.3)}$$

จาก (4.5.2) $L\{y'(t)\}-2L\{x(t)\}-L\{y(t)\} = L\{0\}$

$$\left[sY(s)-y(0)\right]-2X(s)-Y(s) = 0$$

$$(s-1)Y(s)-2X(s) = 1 \qquad \text{..........(4.5.4)}$$

แก้สมการ (4.5.3) และ (4.5.4) หา $X(s)$ และ $Y(s)$

$2\times(4.5.3)+(4.5.4)$

$$(s+1)Y(s) = \frac{2}{s}+1$$

$$Y(s) = \frac{2+s}{s(s+1)}$$

$$= \frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 2-e^{-t}$$

จาก (4.5.3) แทนค่า Y(s)

$$X(s) = \frac{1}{s} - Y(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= -1 + e^{-t}$$

ตัวอย่าง จงหา y(t) และ z(t) ซึ่งคล้องตามระบบสมการ

$$y''(t) - z''(t) + z'(t) - y(t) = e^t - 2 \qquad \text{..........(4.5.5)}$$

$$2y''(t) - z''(t) - 2y'(t) + z(t) = -t \qquad \text{..........(4.5.6)}$$

เมื่อ $y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0$

วิธีทำ ให้ $L\{y(t)\} = Y(s)$ และ $L\{z(t)\} = Z(s)$

ใส่ผลการแปลงลาปลาซทั้งสองสมการ

จาก (4.5.5) จะได้

$$L\{y''(t)\} - L\{z''(t)\} + L\{z'(t)\} - L\{y(t)\} = L\{e^t\} - L\{2\}$$

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - \left[s^2Z(s) - sz(0) - z'(0)\right] + \left[sZ(s) - z(0)\right] - Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s}$$

$$s^2Y(s) - s^2Z(s) + sZ(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s}$$

$$(s^2-1)Y(s) - s(s-1)Z(s) = -\frac{s-2}{s(s-1)}$$

$$(s+1)Y(s) - sZ(s) = \frac{-(s-2)}{s(s-1)^2}$$

..........(4.5.7)

จากสมการ (4.5.6)

$$2L\{y''(t)\} - L\{z''(t)\} - 2L\{y'(t)\} + L\{z(t)\} = -L\{t\}$$

$$2\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - \left[s^2Z(s) - sz(0) - z'(0)\right] - 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Z(s)- = -\frac{1}{s^2}$$

$$2s^2Y(s) - s^2Z(s) - 2sY(s) + Z(s) = -\frac{1}{s^2}$$

$$2s(s-1)Y(s) - (s^2-1)Z(s) = -\frac{1}{s^2}$$

$$2sY(s) - (s+1)Z(s) = -\frac{1}{s^2(s-1)} \qquad \text{..........(4.5.8)}$$

จากสมการ (4.5.7) และ (4.5.8) แก้สมการหา Y(s) และ Z(s) โดยใช้กฎของโลปิตาล (L'Hopital's rule)

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{(s-2)}{s(s-1)^2} & -s \\ -\frac{1}{s^2(s-1)} & -(s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -s \\ 2s & -(s+1) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(s^2-2s-1)/s(s-1)^2}{s^2-2s-1}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = 1 - e^t + te^t$$

$$Z(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & -\frac{(s-2)}{s(s-1)^2} \\ 2s & -\frac{1}{s^2(s-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -s \\ 2s & -(s+1) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(s^2-2s-1)(2s-1)/s^2(s-1)^2}{s^2-2s-1}$$

$$= \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

ดังนั้น

$$z(t) = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= -t + te^t$$

แบบฝึกหัด 4.4

จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้วิธีผลการแปลงลาปลาซ

1. $$x'' + 2x' + \int_0^t y\,dt = 0$$

$$4x'' - x' + y = e^{-t}$$

เมื่อ $x(0) = 0,\quad x'(0) = 1$

2. $$y'' + 2y + 6\int_0^t z\,dt = -2u(t)$$

$$y' + z' + z = 0$$

เมื่อ $y(0) = -5,\ z(0) = 6$

3. $$2x - y - y' = 4(1 - e^{-t})$$

$$2x' + y = 2(1 + 3e^{-2t})$$

เมื่อ $x(0) = 0 = y(0)$

4. $$x'' - x + 5y' = t$$

$$y'' - 4y - 2x' = -2$$

5. $$(D^2 + D + 1)x + (D - 1)y = u(t)$$

$$(D^2 + 2D + 3)x + (3D^2 + 4D - 3)y = 0$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

เมื่อ D คือ Differential operator