บทที่ 4
ผลการแปลงลาปลาซผกผัน
(The Inverse Laplace Transform)

ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการแปลงฟังก์ชัน f ของตัวแปร t เป็นฟังก์ชัน F ตัวแปร s แต่สำหรับผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นจะแปลงจากฟังก์ชัน F ของตัวแปร s ไปเป็นฟังก์ชัน f ของตัวแปร t

4.1 นิยามและผลการแปลงลาปลาซผกผันของบางฟังก์ชัน

นิยาม ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ จะกล่าวว่า $f(t)$ เป็น**ผลการแปลงลาปลาซผกผัน** (inverse laplace transform) ของ $F(s)$ และเขียนแทนด้วย

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

L^{-1} เรียกว่าตัวดำเนินการผลการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transform operator)

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$

2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$

วิธีทำ 1. เพราะว่า $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

2. เพราะว่า $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

คุณสมบัติผลการแปลงลาปลาซผกผันประการหนึ่งที่สำคัญคือ คุณสมบัติเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.1

คุณสมบัติเชิงเส้น

ถ้า $L^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$ และ $L^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$ แล้ว

$$L^{-1}\{a_1F_1(s) + a_2F_2(s)\} = a_1L^{-1}\{F_1(s)\} + a_2L^{-1}\{F_2(s)\}$$

$$= a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$$

เมื่อ a_1, a_2 เป็นค่าคงตัว

คุณสมบัตินี้ยังคงจริงสำหรับฟังก์ชันมากกว่า 2 ฟังก์ชันขึ้นไป

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s^2+9}\right\}$

วิธีทำ $$L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} - \frac{2s}{s^2+9}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

เพราะว่า $$L\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}$$

ดังนั้น $$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$$

และ $$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9}$$

ดังนั้น $$L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin 3t$$

$$3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \sin 3t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{\sin 3t}{3}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s^2+9}\right\} = 2e^{3t} - \frac{\sin 3t}{3}$$

จากตารางผลการแปลงลาปลาซในบทที่ 3 จะได้ผลการแปลงลาปลาซผกผันของบางฟังก์ชัน

4.1.1 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots$

4.1.2 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

4.1.3 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$

4.1.4 $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

4.1.5 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\sinh at}{a}$

4.1.6 $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$

4.2 คุณสมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน

เนื่องจากผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นสัมพันธ์กัน ดังนั้น ทฤษฎีบทต่าง ๆ ของผลการแปลงลาปลาซในบทที่ 3 จะได้คุณสมบัติผลการแปลงลาปลาซผกผันทันที ดังนี้

ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ **จะได้**

4.2.1 $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$

4.2.2 $L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at)$

4.2.3 $L^{-1}\{F^{n}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$

4.2.4 $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}$

4.2.5 $L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$

4.2.6 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$

4.2.7 $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t) = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการนำคุณสมบัติเหล่านี้ไปใช้ในการหาผลการแปลงลาปลาซ-ผกผัน

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.1

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}$

วิธีทำ

$$s^2-2s+5 = (s^2-2s+1)+4$$
$$= (s-1)^2+4$$
$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

โดย 4.2.1 $= e^t \cos 2t$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{3s-10}{s^2-4s+8}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $s^2-4s+8 = (s^2-4s+4)+4$

$$= (s-2)^2+4$$
$$L^{-1}\left\{\frac{3s-10}{s^2-4s+8}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(3s-6)-4}{(s-2)^2+4}\right\}$$
$$= L^{-1}\left\{\frac{3s-6}{(s-2)^2+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+4}\right\}$$
$$= 3L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+4}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+4}\right\}$$

โดย 4.2.1 $= 3e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t$

$$= e^t(3\cos 2t - 2\sin 2t)$$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.2

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$ กำหนดให้ $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = t\sin t$

วิธีทำ

$$\frac{s}{(s^2+4)^2} = \frac{s}{16\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2+1\right]^2}$$
$$= \frac{1}{16}\,\frac{2\frac{s}{2}}{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2+1\right]^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{2\frac{s}{2}}{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2+1\right]^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{16}L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{2}\right)\right]$$

จากคุณสมบัติข้อ 4.2.2

$$L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} \doteq af(at)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{16}\left[2f(2t)\right] = \frac{1}{8}f(2t)$$

จากโจทย์กำหนดให้ $L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = t\sin t = f(t)$

$$f(2t) = (2t)\sin(2t)$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{8}(2t\sin 2t) = \frac{t\sin 2t}{4}$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.3

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\ln\frac{(s+1)}{(s-1)}\right\}$

วิธีทำ ให้ $F(s) = \ln\frac{(s+1)}{(s-1)}$ เมื่อ $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\left[\ln\frac{s+1}{s-1}\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\ln(s+1)-\ln(s-1)\right]$$

$$= \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}$$

โดยสูตร 4.2.3

$$L^{-1}\{F'(s)\} = (-1)^1 tf(t)$$

$$= -tf(t)$$

ดังนั้น $f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}(e^{-t}-e^{t})$$

$$= \frac{e^t - e^{-t}}{t}$$

$$L^{-1}\left\{\ln\frac{(s+1)}{(s-1)}\right\} = \frac{2\sinh t}{t}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

วิธีทำ จะเห็นว่าโจทย์คล้ายกับตัวอย่างที่ 3 แต่ในที่นี้จะหาโดยใช้สูตร 4.2.3

ให้ $$F(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$$

$$F'(s) = \frac{-2s}{(s^2+4)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\{F'(s)\}$$

$$= -\frac{1}{2}(-1)^1 tf(t)$$

$$= \frac{t}{2}f(t)$$

เมื่อ $F(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$ จะได้

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)}\right\}$$

$$= \frac{\sin 2t}{2}$$

ดังนั้น $$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{t}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$= \frac{t}{4}\sin 2t$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$

วิธีทำ โจทย์ลักษณะอย่างนี้ต้องใช้สูตร 4.2.3 คือ หาอนุพันธ์ของ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

จาก 4.2.3 จะได้

$$f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

ให้ $F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{s^2}{s^2+1}\left(-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{s^2+1}$$

ดังนั้น $f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\}$

$$= \frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{\sin t}{t}$$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.4

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $f(t)$ เมื่อ $F(s) = \frac{s}{(s^2-1)^2}$

วิธีทำ จากสูตร 4.2.4

$$f(t) = tL^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\}$$

$$= tL^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{u}{(u^2-1)^2}du\right\}$$

$$= tL^{-1}\left\{\frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{d(u^2-1)}{(u^2-1)^2}\right\}$$

$$= tL^{-1}\left\{\left.\frac{-1}{2(u^2-1)}\right|_s^\infty\right\}$$

$$= tL^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2-1)}\right\}$$

$$= tL^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{t}{4}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{t}{4}(e^{t} - e^{-t})$$

$$= \frac{t \sinh t}{2}$$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.5

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$

และจาก 4.2.5 $L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\} = u(t-2)\cos 4(t-2)$

$$= \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \cos 4(t-2), & t > 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^3}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \frac{t^2e^{t}}{2!} = \frac{t^2e^{t}}{2} = f(t)$

จาก 4.2.5 จะได้ $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^3}\right\} = u(t-1)f(t-1)$

$$= u(t-1)\,\frac{(t-1)^2e^{t-1}}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{(t-1)^2e^{t-1}}{2}, & t > 1 \end{cases}$$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.6

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}$

วิธีทำ ให้ $F(s) = \frac{1}{s+2}$

$f(t) = e^{-2t}$

จากสูตร 4.2.6 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = \int_0^t e^{-2u}du$$

$$= \left.\frac{e^{-2u}}{-2}\right|_0^t$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$

วิธีทำ ให้ $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$

$$f(t) = \frac{t^2e^{-t}}{2}$$

จาก 4.2.6 $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{u^2e^{-u}}{2}du$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^t u^2e^{-u}du = \bar{u}^2(-e^{-u})\Big|_0^t + 2\int_0^t uL^{-1}udu$$

$$= -t^2e^{-t} + 2\left\{u(-e^{-u})\Big|_0^t + \int_0^t e^{-u}du\right\}$$

$$= -t^2e^{-t} - 2e^{-t} - 2e^{-u}\Big|_0^t$$

$$= -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\} = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)$$

ตัวอย่างการใช้สูตร 4.2.7

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\}$

วิธีทำ ให้ $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$

ดังนั้น $L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}$

และ $f(t) = g(t) = \frac{\sin at}{a}$

จาก 4.2.7 $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t)$

$$= \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \frac{\sin a\lambda}{a} \cdot \frac{\sin a(t-\lambda)d\lambda}{a}$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin a\lambda \sin a(t-\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^t \left[\cos a(2\lambda - t) - \cos at\right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\}$

วิธีทำ โดยใช้สูตร 4.2.7

ให้ $F(s) = \frac{1}{s+2}$ และ $G(s) = \frac{1}{s-3}$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s-3)}\right\} = e^{-2t}*e^{3t}$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda} e^{3(t-\lambda)} d\lambda$$

$$= e^t \int_0^t e^{-5\lambda}\, d\lambda$$

$$= e^t \left[\frac{e^{-5\lambda}}{-5} \Big|_0^t \right]$$

$$= e^t \left[-\frac{e^{-5t}}{5} + \frac{1}{5} \right]$$

$$= \frac{e^t - e^{-4t}}{5}$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\frac{1}{3s-2}$ 1.2 $\frac{1}{s^2+9}$

1.3 $\frac{2s+3}{s^2+4}$ 1.4 $\frac{1}{(s+2)^4}$

1.5 $\frac{s-1}{s^2-9}$ 1.6 $\frac{3s-5}{s^3}$

2. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$ เมื่อ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3. จงหาค่าของ f(t) เมื่อกำหนด

3.1 $F(s) = \frac{5s}{s^2+4s+4}$

3.2 $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+7}$

3.3 $F(s) = \frac{s+3}{(s^2+4)^2}$

4. จงหา f(t) เมื่อกำหนดให้

4.1 $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+4}$

4.2 $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^3}$

4.2 $F(s) = \frac{e^{-s}+e^{-2s}}{s^2-3s+2}$

5. จงหาค่าของ

5.1 $L^{-1}\left\{\ln\frac{(s+2)}{(s-3)}\right\}$

5.2 $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\}$

5.3 $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\}$

6. จงใช้คุณสมบัติของผลการประสานหาค่าของ

6.1 $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s+1)}\right\}$

6.2 $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\}$

6.3 $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s-2)}\right\}$

7. จงใช้สมการ 4.2.6 คือ $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$ หาค่าของ

7.1 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)^2}\right\}$

7.2 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

8. จงแก้สมการ

8.1 $y(t) + \int_0^t y(t-u)e^u du = 2t-3$

8.2 $\int_0^t y(u)y(t-u)du = t^2e^{-t}$

4.3 การใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย (The Use of Partial Fractions)

ในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน นอกจากใช้สูตรในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 แล้ว อาจจะใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยก่อน แล้วจึงใช้สูตรได้ ก่อนอื่นจะกล่าวถึงวิธีแยกเศษส่วนย่อยดังนี้

ขั้นที่ 1 พิจารณา $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ เมื่อ $p(s)$ และ $q(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ของตัวแปร s โดยที่ระดับขั้น (degree) ของ $p(s)$ น้อยกว่าระดับขั้นของ $q(s)$ เช่น

$$F(s) = \frac{2s^2 - s + 5}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

ในที่นี้ $p(s)$ มีระดับขั้นเท่ากับ 2 และ $q(s)$ มีระดับขั้นเท่ากับ 3

ขั้นที่ 2 พิจารณาเทอมส่วน $q(s)$ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $q(s)$ มีเทอมในรูป $(s-a)$ แบบไม่ซ้ำกัน เช่น

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s-a)(s-b)}$$

จะเขียนเศษส่วนย่อยเป็น

$$F(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2 ถ้า $q(s)$ มีเทอมในรูป $(s-a)^n$ จะเขียนเศษส่วนย่อยเป็น

$$F(s) = \frac{p(s)}{(s-a)^n}$$

$$= \frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 3 ถ้า $q(s)$ มีเทอม $(as^2 + bs + c)$

ให้แยกเศษส่วน $\frac{p(s)}{q(s)}$ อยู่ในรูป

$$F(s) = \frac{As + B}{as^2 + bs + c}$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 4 ถ้า q(s) มีเทอมอยู่ในรูป $(as^2+bs+c)^n$ จะแยกเศษส่วน $\frac{p(s)}{q(s)}$ อยู่ในรูป

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c}+\frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2}+\ldots+\frac{A_ns+B_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

เมื่อ $A_1, A_2,\ldots,A_n,\ B_1, B_2,\ldots,B_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 1. $\frac{s-3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}$

2. $\frac{s^2+4}{(s-1)(s+3)^2} = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}$

3. $\frac{3s}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$

4. $\frac{1-s}{(s^2+s+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+s+1}+\frac{Cs+D}{(s^2+s+1)^2}$

ขั้นที่ 3 รวมเศษส่วนย่อยที่แยกแล้วเข้าด้วยกัน แล้วเทียบเศษเท่ากัน

ขั้นที่ 4 หาค่าคงตัวได้ 2 วิธีคือ

1. โดยการเทียบสัมประสิทธิ์
2. โดยการสมมติค่า

ตัวอย่าง จงแยก $\frac{s+1}{s^2+s-6}$ เป็นเศษส่วนย่อย

วิธีทำ

$$\frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+3}$$

$$= \frac{A(s+3)+B(s-2)}{(s-2)(s+3)}$$

$$s+1 = A(s+3)+B(s-2)$$

การหาค่า A, B หาได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$s+1 = (A+B)s+3A-2B$$

$$\therefore\ A+B = 1$$

$$3A-2B = 1$$

แก้สมการหาค่า A, B จะได้

$$A = \frac{3}{5},\ B = \frac{2}{5}$$

วิธีที่ 2 โดยการสมมุติค่า

จากสมการ $s+1 = A(s+3)+B(s-2)$

ให้ $s = 2$

$$3 = 5A$$

$$A = \frac{3}{5}$$

ให้ $s = -3$

$$-2 = -5B$$

$$B = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น $\dfrac{s+1}{s^2+s-6} = \dfrac{3}{5(s-2)} + \dfrac{2}{5(s+3)}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

วิธีทำ โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$= \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$3s+1 = A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)$$

โดยการสมมุติค่า ให้ $s = 1$

$$4 = 2A$$

$$A = 2$$

ให้ $s = 0$ จะได้

$$1 = A-C$$

$$C = 1$$

ให้ $s = -1$ จะได้

$$-2 = 2A-2(C-B)$$

$$B = -2$$

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1}+\frac{(-2s+1)}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2e^t-2\cos t+\sin t$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3}$$

$$= \frac{A(s-2)^3+B(s+1)(s-2)^2+C(s+1)(s-2)+D(s+1)}{(s+1)(s-2)^3}$$

$$5s^2-15s+7 = A(s-2)^3+B(s+1)(s-2)^2+C(s+1)(s-2)+D(s+1)$$

ให้ $s = -1$

$$5(-1)^2-15(-1)+7 = A(-3)^3$$

$$A = -1$$

ให้ $s = 2$

$$5(4)-15(2)+7 = D(3)$$

$$D = -1$$

ให้ $s = 0$

$$7 = -8A+4B-2C+D$$

$$4B-2C = 0$$

ให้ $s = 1$

$$5-15+7 = -A+2B-2C+2D$$

$$2B-2C = -2$$

แก้สมการ $B = 1, \quad C = 2$

ดังนั้น $\dfrac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3} = \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{(s-2)^2}-\dfrac{1}{(s-2)^3}$

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$

$$= -e^{-t}+e^{2t}+2te^{2t}-\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

โดยใช้วิธีการทำให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยเราจะหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้ทันที โดยใช้ **ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์** (Heaviside's expansion theorems) ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.1

ให้ $F(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ เมื่อ $p(s)$ และ $q(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งระดับขั้นของ $p(s)$ น้อยกว่าระดับขั้นของ $q(s)$ ถ้า $q(s)$ มีเทอม $s-a$ ซึ่งไม่ซ้ำกันแล้ว เทอมของ $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ ซึ่งสมนัยกัน จะอยู่ในรูปของ $\dfrac{p(a)}{q'(a)}e^{at}$ หรือ $\phi(a)e^{at}$

เมื่อ $\phi(s)$ คือ ฟังก์ชันที่เหลือหลังจากเอา $(s-a)$ หาร $\dfrac{p(s)}{q(s)}$

พิสูจน์ จาก $F(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$

เอา $s-a$ หาร $\dfrac{p(s)}{q(s)}$ จะได้

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{s-a}$$

$\phi(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้นเขียน $\dfrac{\phi(s)}{s-a}$ เป็นรูปเศษส่วนย่อย

$$\frac{\phi(s)}{s-a} = \frac{A}{s-a}+h(s)$$

เมื่อ $h(s)$ คือ ผลรวมของเศษส่วนย่อยที่เหลือของตัวประกอบ $q(s)$ ยกเว้น $s-a$

ในการหาค่า A คูณตลอดสมการด้วย $s-a$ จะได้

$$\phi(s) = A+h(s)(s-a)$$

$$\frac{p(s)}{q(s)}(s-a) = A+h(s)(s-a)$$

$$\frac{p(s)}{q(s)/(s-a)} = A+h(s)(s-a)$$

$$\lim_{s \to a} \frac{p(s)}{q(s)/(s-a)} = A$$

$$A = \frac{\lim_{s \to a} p(s)}{\lim_{s \to a} \frac{q(s)}{s-a}}$$

พิจารณาลิมิตเมื่อ $s \to a$ ของส่วน จะอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) โดยกฎโลปิตาล (L'Hospital's rule) หาอนุพันธ์ทั้งเศษและส่วนเทียบกับ s จะได้

$$\lim_{s \to a} \frac{q(s)}{s-a} = \lim_{s \to a} \frac{q'(s)}{(s-a)'}$$

$$= \lim_{s \to a} q'(s)$$

$$= q'(a)$$

ดังนั้น

$$A = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{s-a} + h(s)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p(a)/q'(a)}{s-a}\right\} + L^{-1}\{h(s)\}$$

$$= \frac{p(a)}{q'(a)} e^{at} + L^{-1}\{h(s)\}$$

ถ้าเทอมของ $q(s)$ อยู่ในรูปตัวประกอบ $(s-a_1), (s-a_2), \ldots, (s-a_n)$ จะได้คำตอบอยู่ในรูปผลบวกของ $\frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t}$ $i = 1, \ldots, n$ ดังบทแทรก

บทแทรก 4.1

ถ้า $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$ และ $q(s)$ มีตัวประกอบอยู่ในรูปของ $(s-a_1), (s-a_2), \ldots, (s-a_n)$

จะได้ $$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i) e^{a_i t}$$

เมื่อ $\phi(s)$ เป็นฟังก์ชันที่เหลือหลังจากเอา $(s-a_i)$ หาร $\frac{p(s)}{q(s)}$ $i = 1, \ldots, n$

ตัวอย่าง จงหา $f(t)$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{2s^2-4s}{(2s+1)(s^2+1)}$

วิธีทำ

$$F(s) = \frac{2s^2-4s}{(2s+1)(s-i)(s+i)}$$

$$= \frac{s^2-2s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s-i)(s+i)}$$

ในที่นี้ a_i คือ $a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = i, \quad a_3 = -i$

$$p(s) = s^2-2s$$

$$q(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)(s-i)(s+i) = s^3+\frac{s^2}{2}+s+\frac{1}{2}$$

$$q'(s) = 3s^2+s+1$$

เมื่อ $a_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad p(a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$

$$q'(a_1) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{5}{4}$$

เมื่อ $a_2 = i$, $\quad p(a_2) = (i)^2-2i = -1-2i$

$$q'(a_2) = 3(i)^2+(i)+1 = -2+i$$

เมื่อ $a_3 = -i$, $\quad p(a_3) = (-i)^2-2(-i) = -1+2i$

$$q'(a_3) = 3(-i)^2+(-i)+1 = -2-i$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)}e^{a_i t}$$

$$= \frac{p(a_1)}{q'(a_1)}e^{a_1 t}+\frac{p(a_2)}{q'(a_2)}e^{a_2 t}+\frac{p(a_3)}{q'(a_3)}e^{a_3 t}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}}e^{-t/2}-\frac{(1+2i)}{(-2-i)}e^{it}+\frac{-1+2i}{-2-i}e^{-it}$$

$$= e^{-t/2}-\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\right)e^{it}}{\left(i+\frac{1}{2}\right)2i}+\frac{(-1+2i)e^{-it}}{\left(-i+\frac{1}{2}\right)(-2i)}$$

$$= e^{-t/2}-2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

$$= e^{-t/2}-2\sin t$$

ทฤษฎีบท 4.2

ให้ $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ เมื่อ p(s) และ q(s) เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นของ p(s) น้อยกว่าระดับขั้นของ q(s) ถ้า q(s) มีเทอม $(s-a)^{n+1}$ เทอมของ $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ ที่สมนัย

$$\phi_n(s, t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\phi(s)e^{st}\right]$$

เมื่อ $\phi(s)$ เป็นเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนามที่ได้จากเอา $(s-a)^{n+1}$ หาร $\frac{p(s)}{q(s)}$

พิสูจน์

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)^{n+1}}$$

$$= \frac{A_0}{s-a} + \frac{A_1}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^{r+1}} + \ldots + \frac{A_n}{(s-a)^{n+1}} + h(s)$$

เมื่อ A_r ไม่ขึ้นอยู่กับ s และ h(s) เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยที่เหลือของตัวประกอบ q(s) ยกเว้น $(s-a)$

เอา $(s-a)^{n+1}$ คูณตลอด

$$\phi(s) = A_0(s-a)^n + \ldots + A_r(s-a)^{n-r} + \ldots + A_{n-1}(s-a) + A_n + \ldots + (s-a)^{n+1}h(s)$$

ถ้า $s = a$

$$\phi(a) = A_n$$

หาอนุพันธ์ $\phi(s)$

$$\phi'(s) = nA_0(s-a)^{n-1} + \ldots + (n-r)A_r(s-a)^{n-r-1} + \ldots + (n+1)(s-a)^n h(s)$$

$$\phi'(a) = A_{n-1}$$

หาอนุพันธ์อันดับ 2 ของ $\phi(s)$

$$\phi''(s) = n(n-1)A_0(s-a)^{n-2} + \ldots + (n-r)(n-r-1)A_r(s-a)^{n-r-2} + \ldots + (n+1)n(s-a)^{n-1}h(s)$$

$$\phi''(a) = 2!A_{n-2}$$

ทำต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\phi^{(n-r)}(a) = (n-r)!A_r$$

$$A_r = \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!}$$

ดังนั้น $F(s) = \dfrac{\phi(s)}{(s-a)^{n+1}}$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!} \frac{1}{(s-a)^{r+1}} + h(s)$$

และจะได้ $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{r+1}}\right\} + L^{-1}\{h(s)\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!} \frac{t^r e^{at}}{r!} + h(t)$$

แต่ $\dfrac{d^n}{ds^n}(uv) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} u^{n-r}(s)v^r(s)$

เมื่อ $u = \phi(s)$ และ $v = e^{st}$ แล้ว $\dfrac{\partial^r v}{\partial s^r} = t^r e^{st}$ จะได้

$$f(t) = \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\phi(s)e^{st}\right]\right\}_{s=a} + h(t)$$

ตัวอย่าง จงหา $f(t)$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2}$

วิธีทำ เทอมของ $f(t)$ ซึ่งคล้องตาม $s-1$ คือ e^t

พิจารณา $\dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2} = \dfrac{\phi(s)}{(s-2)^2}$

เมื่อ $\phi(s) = \dfrac{1}{s-1}$

$\phi'(s) = \dfrac{-1}{(s-1)^2}$

ในที่นี้ $a = 2$, $\phi(2) = 1$

$\phi'(2) = -1$

จากสูตร $f(t) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!} \frac{t^r e^{at}}{r!} + h(t)$

ในที่นี้ $r = 0$ ถึง 1

$$f(t) = \frac{\phi'(2)}{1!}\frac{t^0 e^{at}}{0!} + \frac{\phi(2)}{0!}\frac{t}{1!}e^{at} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= -1e^{2t} + te^{2t} + e^t$$

$$= (t-1)e^{2t} + e^t$$

ข้อสังเกต

จากทฤษฎีบท 4.2 จะได้

$$f(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi^{(n-r)}(a)}{(n-r)!}\frac{t^r e^{at}}{r!} + h(t)$$

$$= \frac{\phi^{(n)}(a)}{n!}\frac{t^0 e^{at}}{0!} + \frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\frac{te^{at}}{1!} + \frac{\phi^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}\frac{t^2 e^{at}}{2!} + \ldots$$

$$+ \frac{\phi(a)}{0!}\frac{t^n}{n!}e^{at} + h(t)$$

$$= \frac{\phi^{(n)}(a)}{n!}e^{at} + \frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}te^{at} + \frac{\phi^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}\frac{t^2 e^{at}}{2} + \ldots + \phi(a)\frac{t^n}{n!}e^{at} + h(t)$$

เมื่อ $n = 1$ จะได้

$$f(t) = \phi'(a)e^{at} + \phi(a)te^{at}$$ ดังตัวอย่าง

เมื่อ $n = 2$

$$F(s) = \frac{\phi(s)}{(s-a)^{n-1}}$$ จะได้ $f(t)$ ดังนี้

$$f(t) = \frac{\phi''(a)}{2!}e^{at} + \frac{\phi'(a)}{1!}te^{at} + \phi(a)\frac{t^2}{2!}e^{at}$$

$$= \frac{\phi''(a)}{2}e^{at} + \phi'(a)te^{at} + \phi(a)\frac{t^2}{2}e^{at}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)^3}\right\}$

วิธีทำ ให้ $\frac{s}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{\phi(s)}{(s+2)^3}$

เมื่อ

$$\phi(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$\phi'(s) = \frac{(s+1)-s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$$