$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases} - \begin{cases} 0, & t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$$

$$= u(t-2) - u(t-4)$$

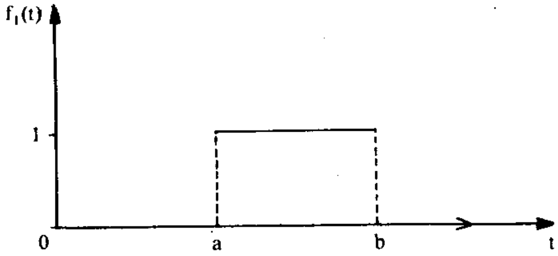
$$L\{f(t)\} = \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-4s})$$

พิจารณาฟังก์ชันขั้นบันได (step function) **เมื่อ** $t > 0,\ a > 0,\ b > 0$

ให้ $$f_1(t) = \begin{cases} 1, & a < t < b \\ 0, & t \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 3.5

สามารถเขียน $f_1(t)$ **ในรูปของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย**

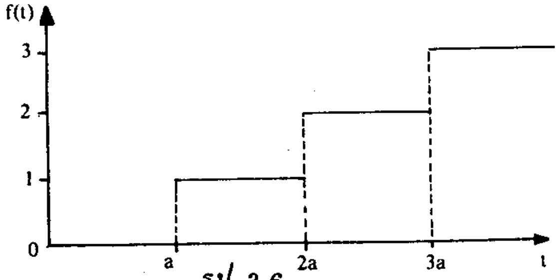
$$f_1(t) = u(t-a) - u(t-b)$$

พิจารณา $$L\{f_1(ft)\} = L\{u(t-a)\} - L\{u(t-b)\}$$

$$= \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

ในทำนองเดียวกันพิจารณาฟังก์ชันขั้นบันไดดังรูป 3.6



รูป 3.6

จะได้ $f(t) = u(t-a)+u(t-2a)+u(t-3a)+\ldots$

และจะได้ $L\{f(t)\} = L\{u(t-a)\}+L\{u(t-2a)\}+L\{u(t-3a)\}+\ldots$

$$= \frac{e^{-as}}{s}+\frac{e^{-2as}}{s}+\frac{e^{-3as}}{s}+\ldots$$

$$= \frac{e^{-as}}{s}(1+e^{-as}+e^{-2as}+\ldots)$$

$$= \frac{e^{-as}}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-as}}\right)$$

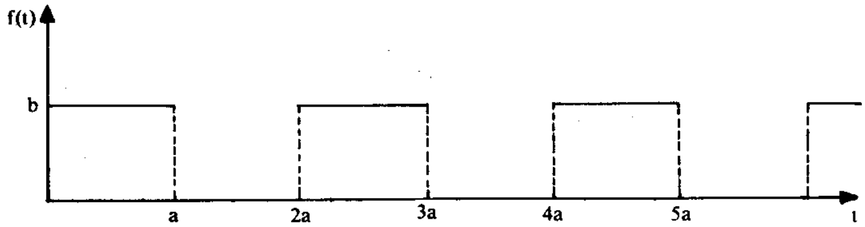
$$= \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$

หมายเหตุ การหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์

$$1+r+r^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

$$= \frac{1}{1-r}, \quad r<1$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซของ f(t) โดยเขียน f(t) ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย



รูป 3.7

วิธีทำ $f(t) = bu(t)-bu(t-a)+bu(t-2a)-bu(t-3a)+\ldots$

$$L\{f(t)\} = bL\{u(t)\}-bL\{u(t-a)\}+bL\{u(t-2a)\}-bL\{u(t-3a)\}+\ldots$$

$$= \frac{b}{s}-\frac{be^{-as}}{s}+\frac{be^{-2as}}{s}-\frac{be^{-3as}}{s}+\ldots$$

$$= \frac{b}{s}(1-e^{-as}+e^{-2as}-e^{-3as}+\ldots)$$

ในที่นี้ $r = -e^{-as} = \frac{1}{e^{as}} < 1$

$$L\{f(t)\} = \frac{b}{s}\left(\frac{1}{1-(-e^{-as})}\right)$$

$$= \frac{b}{s(1+e^{-as})}$$

3.4 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเป็นคาบ

ทฤษฎีบท 3.7 (Periodic functions)

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบ $= a$ นั่นคือ $f(t+a) = f(t)$ จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-as}}$$

พิสูจน์ จากนิยาม

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st} f(t)dt + \int_a^{2a} e^{-st} f(t)dt + \int_{2a}^{3a} e^{-st} f(t)dt + \ldots$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ สำหรับอินทิกรัลพจน์ที่ 2 ขึ้นไปทางขวามือ

สำหรับ $\int_a^{2a} e^{-st} f(t)dt$ ให้ $t = v+a$

$dt = dv$

$$\int_a^{2a} e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-s(v+a)} f(v+a)dv$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\int_{2a}^{3a} e^{-st} f(t)dt$ ให้ $t = v+2a$

จะได้ $\int_{2a}^{3a} e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-s(v+2a)} f(v+2a)dv$

พจน์อื่น ๆ ที่เหลือทำในทำนองเดียวกัน

$$L\{f(t)\} = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + \int_0^a e^{-s(v+a)} f(v+a)dv + \int_0^a e^{-s(v+2a)} f(v+2a)dv + \ldots$$

เพราะว่า f มีคาบ a ดังนั้น $f(v+a) = f(v)$, $f(v+2a) = f(v)$ ฯลฯ

$$L\{f(t)\} = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + e^{-as}\int_0^a e^{-sv} f(v)dv + e^{-2as}\int_0^a e^{-sv} f(v)dv + \ldots$$

$$= \int_0^a e^{-st}f(t)dt + e^{-as}\int_0^a e^{-st}f(t)dt + e^{-2as}\int_0^a e^{-st}f(t)dt + \ldots$$

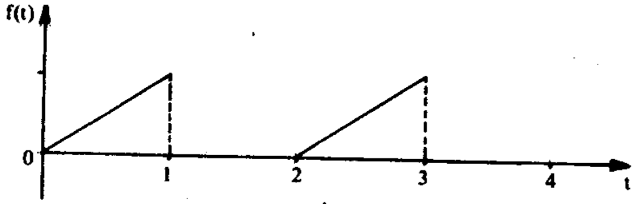
$$= (1 + e^{-as} + e^{-2as} + \ldots)\int_0^a e^{-st}f(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-as}}\int_0^a e^{-st}f(t)dt$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$

คาบของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ 2

วิธีทำ ถ้าเขียนกราฟของ $f(t)$ จะได้ดังนี้



รูป 3.8

จากทฤษฎีบท 3.7

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-as}}$$

ในที่นี้ $a = 2$

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-2s}}$$

$$\int_0^2 e^{-st}f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(0)dt$$

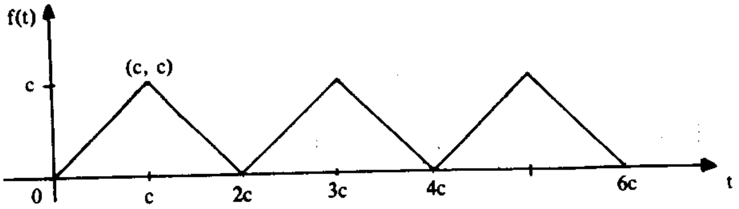
$$= t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) ดังรูป



รูป 3.9

ฟังก์ชัน f(t) นี้เรียกว่าฟังก์ชันฟันเลื่อย (sawtooth function)

วิธีทำ จะเห็นว่า 1 คาบของ f(t) คือ 2c ดังนั้น หาสมการของ f(t) ในช่วง 0 ถึง 2c

เมื่อ $0 < t < c$ จะได้ $f(t) = t$

เมื่อ $c < t < 2c$ หาสมการเส้นตรงจากจุด (c, c) ไปยัง (2c, 0)

โดยใช้สูตร $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เมื่อเส้นตรงผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

แทนค่าในสูตร $\dfrac{f(t) - c}{t - c} = \dfrac{0 - c}{2c - c} = -1$

$$f(t) - c = -t + c$$

$$f(t) = -t + 2c$$

ดังนั้น นิยาม f(t) ใน 1 คาบ โดย

$$f(t) = \begin{cases} t &, \quad 0 < t < c \\ -t + 2c, & c < t < 2c \end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 3.7

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-as}}$$

$$= \frac{\int_0^{2c} e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-2cs}}$$

$$\int_0^{2c} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{c} e^{-st}tdt + \int_c^{2c} e^{-st}(-t+2c)dt$$

$$= \int_0^{c} e^{-st}tdt - \int_c^{2c} e^{-st}tdt + 2c\int_c^{2c} e^{-st}dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน $\int te^{-st}dt = -\dfrac{te^{-st}}{s} + \int \dfrac{e^{-st}}{s}dt$

$$\int_0^{2c} e^{-st}f(t)dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^c + \int_0^c \frac{e^{-st}}{s}dt\right] - \left[-\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_c^{2c} + \int_c^{2c} \frac{e^{-st}}{s}dt\right] + 2c\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_c^{2c}$$

$$= -\frac{ce^{-sc}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^c + \frac{2ce^{-2cs}}{s} - \frac{ce^{-cs}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_c^{2c} - \frac{2ce^{-2cs}}{s} + \frac{2ce^{-cs}}{s}$$

$$= -\frac{e^{-cs}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2cs}}{s^2} - \frac{e^{-cs}}{s^2}$$

$$= \frac{1-2e^{-cs}+e^{-2cs}}{s^2}$$

$$= \frac{(1-e^{-cs})^2}{s^2}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{(1-e^{-cs})^2}{s^2(1-e^{-2cs})}$$

$$= \frac{(1-e^{-cs})^2}{s^2(1-e^{-cs})(1+e^{-cs})}$$

$$= \frac{(1-e^{-cs})}{s^2(1+e^{-cs})}$$

ทฤษฎีบท 3.8

ทฤษฎีการเลื่อนออกไป 2 (Second Shifting theorem)

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

แล้ว $L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

พิสูจน์ จากนิยาม $u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$

$$L\{u(t-a)f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $v = t-a$

$$dv = dt$$

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv$$

$$= e^{-as}F(s)$$

ดังนั้น $L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

หมายเหตุ $$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$$

ถ้าให้ $g(t) = u(t-a)f(t-a)$

$L\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$

ตัวอย่าง ให้ $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **จงหา** $L\{g(t)\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right), & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ในที่นี้ $f(t) = \cos t, \quad a = \frac{\pi}{2}$

$$F(s) = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

โดยทฤษฎีบท 3.8 จะได้

$$L\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

$$= \frac{e^{-\pi/2 s}}{s^2+1}$$

ตัวอย่าง จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < \pi \\ t, & t > \pi \end{cases}$

วิธีทำ

$$f(t) = \sin t + \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \sin t, & t > \pi \end{cases}$$

$$= \sin t + (t - \sin t)u(t-\pi)$$

$$= \sin t + [\pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)]u(t-\pi)$$

โดยทฤษฎีบท 3.8

$$L\{f(t)\} = L\{\sin t\} + L\{[\pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)]u(t-\pi)\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left[\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right]$$

บทแทรกทฤษฎีบท 3.8

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t+a)\}$

พิสูจน์

$$L\{f(t)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)u(t-a)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}f(t)u(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t)u(t-a)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่

ให้ $t = v + a$

$dt = dv$

$$\int_a^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v+a)dv$$

$$= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-sv} f(v+a)dv$$

$$= e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t+a)dt$$

$$= e^{-as}L\{f(t+a)\}$$

จากบทแทรกนี้ จะทำให้การหาค่าผลการแปลงลาปลาซง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < \pi \\ t, & t > \pi \end{cases}$$

$$= \sin t + (t - \sin t)u(t-\pi)$$

$$L\{f(t)\} = L\{\sin t\} + L\{tu(t-\pi)\} - L\{\sin tu(t-\pi)\}$$

โดยบทแทรก

$$L\{tu(t-\pi)\} = e^{-\pi s}L\{t+\pi\}$$

$$= e^{-\pi s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right]$$

$$L\{\sin tu(t-\pi)\} = e^{-\pi s}L\{\sin(t+\pi)\}$$

$$= e^{-\pi s}L\{-\sin t\}$$

$$= -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

ดังนั้น $$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right] - \left[\frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left[\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right]$$

แบบฝึกหัด 3.2

จงเขียนกราฟของข้อต่อไปนี้ (1 – 3)

1. $u(t-2)$
2. $u(t-2)-u(t-1)$
3. $u(t)+u(t-1)+u(t-2)+u(t-3)+\ldots$

4. **จงเขียนฟังก์ชัน** $f(t) = \begin{cases} 4, & t < 3 \\ 2, & t > 3 \end{cases}$ **ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย**

   และหา $L\{f(t)\}$

5. **จงหาผลการแปลงลาปลาซของ**

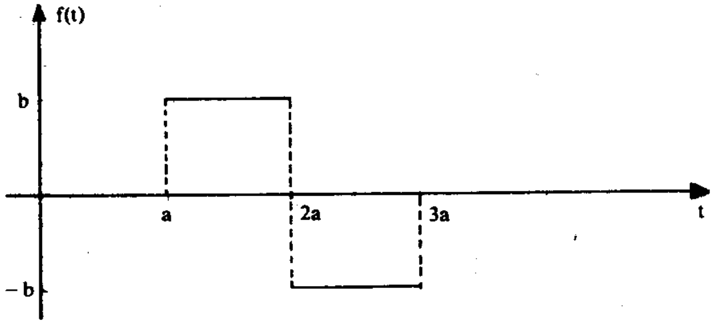
   5.1 $u(1-e^{-t})$

   5.2 $\cos(t-1)u(t-1)$

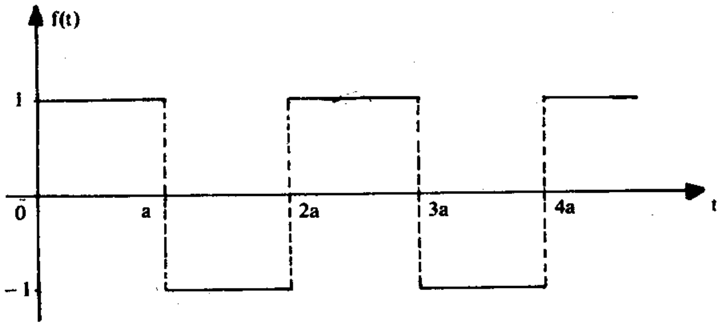
   5.3 $t^2u(t-2)$

จงเขียน $f(t)$ **ให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย และหา** $L\{f(t)\}$ **ด้วย**

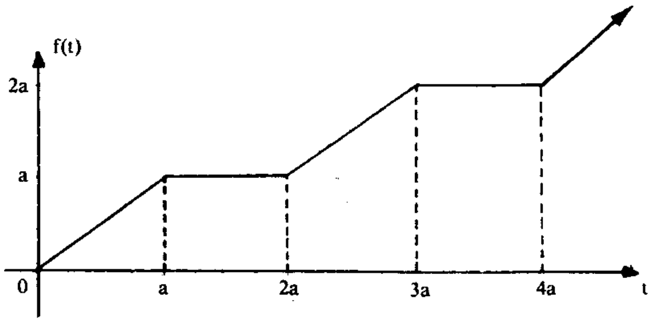
6.



7.



8.



9. **จงใช้ทฤษฎีบทที่** 3.8 **หาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้**

9.1 $G(t) = \begin{cases} 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

9.2 $G(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 < t < 2 \\ t, t > 2 \end{cases}$

9.3 $G(t) = \begin{cases} 0, t < 2 \\ \cos 4(t-2), \quad t > 2 \end{cases}$

3.5 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (Laplace transforms of derivatives)

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ จะต้องหาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ได้ โดยอาศัยทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.9

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ $f'(t)$ ในช่วง $0 \leqslant t \leqslant T$ ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง เมื่อ $t > T$ จะได้

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

พิสูจน์ เพราะว่า $f'(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $0 \leqslant t \leqslant T$

ดังนั้น จะมีช่วงย่อยคือ $(0, T_1)$, $(T_1, T_2), \ldots, (T_n, T)$ ซึ่งในแต่ละช่วง $f'(t)$ มีความต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt = \int_0^{T_1} e^{-st}f'(t)dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st}f'(t)dt + \ldots + \int_{T_n}^{T} e^{-st}f'(t)dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\Big|_0^{T_1} + s\int_0^{T_1} e^{-st}f(t)dt \right] + \left[e^{-st}f(t)\Big|_{T_1}^{T_2} + s\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}f(t)dt \right] + \ldots +$$

$$\left[e^{-st}f(t)\Big|_{T_n}^{T} + s\int_{T_n}^{T} e^{-st}f(t)dt \right]$$

เพราะว่า $f(t)$ มีความต่อเนื่อง

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt = e^{-st}f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

เพราะว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง ถ้า T มีค่ามากพอจะได้

$$|e^{-sT}f(T)| \leqslant |e^{-sT}Me^{\alpha T}| = Me^{-(s-\alpha)T}$$

เมื่อ $T \to \infty$ และ $\lim\limits_{T \to \infty} e^{-st}f(T) = 0$ จะได้

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt$$

$$= s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt - f(0)$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f'(t)$ มีความต่อเนื่อง และ $f''(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ใน $0 \leqslant t \leqslant T$ และถ้า $f(t)$ และ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง เมื่อ $t > T$ จะได้

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

พิสูจน์ ให้ $g(t) = f'(t)$

โดยทฤษฎีบท 3.9

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= sL\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

จากทฤษฎี 3.9 สามารถขยายเป็นกรณีทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.10

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f^{(n-1)}(t)$ มีความต่อเนื่อง และ $f^{(n)}(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนทุกช่วง $0 \leqslant t \leqslant T$ ถ้า $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง เมื่อ $t > T$ จะได้

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(t) = te^{at}$ จงหา $L\{f(t)\}$ โดยใช้ทฤษฎีบท 3.9

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f'(t) &= t(ae^{at}) + e^{at} \\ &= af(t) + e^{at} \\ L\{f'(t)\} &= aL\{f(t)\} + L\{e^{at}\} \end{aligned}$$

แต่ $$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} sL\{f(t)\} - f(0) &= aL\{f(t)\} + L\{e^{at}\} \\ (s-a)L\{f(t)\} &= L\{e^{at}\} + f(0) \end{aligned}$$

แต่ $f(0) = 0$ และ $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

ตัวอย่าง **จงหาค่าของ** $L\{t \sin 2t\}$

วิธีทำ **ให้**

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t \sin 2t \\
f'(t) &= \sin 2t + 2t \cos 2t \\
f''(t) &= 4\cos 2t = 4t \sin 2t \\
f(0) &= 0, \quad f'(0) = 0 \\
L\{f''(t)\} &= s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L\{4\cos 2t - 4t \sin 2t\} &= s^2 L\{t \sin 2t\} \\
4L\{\cos 2t\} - 4L\{t \sin 2t\} &= s^2 L\{t \sin 2t\} \\
(s^2+4)L\{t \sin 2t\} &= 4L\{\cos 2t\} \\
&= 4\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\
L\{t \sin 2t\} &= \frac{4s}{(s^2+4)^2}
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 3.11 (Integration)

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ **จะได้**

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

พิสูจน์ **ให้** $G(t) = \int_0^t f(u)du$

$G'(t) = f(t)$ **และ** $G(0) = 0$

จากทฤษฎีบท 3.9 $L\{G'(t)\} = sL\{G(t)\} - G(0)$

หรือ $L\{f(t)\} = sL\{G(t)\}$

แต่
$$
\begin{aligned}
L\{G(t)\} &= L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} \\
&= \frac{1}{s}L\{f(t)\} \\
&= \frac{F(s)}{s}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

ทฤษฎีบท 3.12

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ จะได้

$$L\left\{\int_a^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(u)du$$

พิสูจน์

$$\int_a^t f(u)du = \int_a^0 f(u)du + \int_0^t f(u)du$$

$$L\left\{\int_a^t f(u)du\right\} = L\left\{\int_a^0 f(u)du\right\} + L\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

$$= \frac{F(s)}{s} + \int_a^0 f(u)du\, L\{1\}$$

$$= \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(u)du$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L\left\{\int_0^t \cos 2u du\right\}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 3.11

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

ในที่นี้

$$f(t) = \cos 2t$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

ดังนั้น $L\left\{\int_0^t \cos 2u du\right\} = \frac{s}{s(s^2+4)}$

$$= \frac{1}{s^2+4}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L\left\{\int_0^1 te^{-3t}\sin 2t\,dt\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

$$L\left\{\int_0^1 te^{-3t}\sin 2t\,dt\right\} = \frac{1}{s}L\{te^{-3t}\sin 2t\}$$

จากสูตร $L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

ในการหา $L\{e^{-3t}\sin 2t\}$ ให้ $L\{t\sin 2t\} = F(s)$

พิจารณา $L\{t\sin 2t\}$ จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะได้

$$L\{t\sin 2t\} = \frac{4s}{(s^2+4)^2} = F(s)$$

$$\begin{aligned} L\{te^{-3t}\sin 2t\} &= \frac{F(s+3)}{s} \\ &= \frac{4(s+3)}{s\left[(s+3)^2+4\right]^2} \\ &= \frac{4(s+3)}{s(s^2+6s+13)^2} \end{aligned}$$

3.6 ผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลผลการประสาน

พิจารณาการกระทำ (operation) **ของสองฟังก์ชัน คือ** f(t) **และ** g(t) **นั่นคือผลการประสานของฟังก์ชัน** f(t) **และ** g(t) **เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์** $f(t)*g(t)$ **และนิยามดังนี้**

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

ทฤษฎีบท 3.13

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ **และ** $L\{g(t)\} = G(s)$ **จะได้**

$$F(s)\cdot G(s) = L\left\{\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

นั่นคือ $F(s)\cdot G(s) = L\{f(t)*g(t)\}$

พิสูจน์ พิจารณา

$$L\{f(t)*g(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right]e^{-st}dt$$

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < t \\ 0, & \lambda > t \end{cases}$$

$$f(\lambda)g(t-\lambda)u(t-\lambda) = \begin{cases} f(\lambda)g(t-\lambda), & \lambda < t \\ 0, & \lambda > t \end{cases}$$

ดังนั้น $$L\left\{\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right\} = \int_0^\infty\int_0^\infty f(\lambda)g(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}d\lambda\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(\lambda)\left[\int_0^\infty g(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt\right]d\lambda$$

$$= \int_0^\infty f(\lambda)\left[\int_0^\lambda g(t-\lambda)\, u(t-\lambda)e^{-st}dt + \int_\lambda^\infty g(t-\lambda)\, u(t-\lambda)e^{-st}dt\right]d\lambda$$

$$= \int_0^\infty f(\lambda)\int_\lambda^\infty g(t-\lambda)e^{-st}dt\,d\lambda$$

ให้ $t-\lambda = y, \qquad dt = dy$

$$L\left\{\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right\} = \int_0^\infty f(\lambda)\left\{\int_0^\infty g(y)e^{-s(\lambda+y)}dy\right\}d\lambda$$

$$= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda}\left\{\int_0^\infty g(y)e^{-sy}dy\right\}d\lambda$$

$$= \left\{\int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda\right\}\left\{\int_0^\infty g(y)e^{-sy}dy\right\}$$

$$= L\{f(t)\}\, L\{g(t)\}$$

คุณสมบัติของผลการประสาน

1. $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$ กฎการสลับที่
2. $f(t)*\left[g(t)+h(t)\right] = f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$ กฎการแจกแจงสำหรับการบวก
3. $f(t)*(kg(t)) = k\left[f(t)*g(t)\right]$ k เป็นค่าคงตัว
4. $f(t)*\left[g(t)*h(t)\right] = \left[f(t)*g(t)\right]*h(t)$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $e^{-t}*e^{-5t}$

วิธีทำ จากนิยาม $e^{-t}*e^{-5t} = \int_0^t e^{-\lambda}e^{-t(t-\lambda)}d\lambda$

$$= e^{5t}\int_0^t e^{-6\lambda}d\lambda$$

$$= e^{5t}\left[\frac{e^{-6\lambda}}{-6}\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[e^{5t}-e^{-t}\right]$$

ตัวอย่าง จงหา F(s) เมื่อ $f(t) = e^{-t}+\int_0^t f(t)\sin(t-\lambda)d\lambda$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงลาปลาซในสมการ จะได้

$$L\{f(t)\} = L\left\{e^{-t}+\int_0^t f(t)\sin(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

$$= L\{e^{-t}\}+L\left\{\int_0^t f(t)\sin(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

$$= \frac{1}{s+1}+L\{f(t)*\sin t\}$$

$$= \frac{1}{s+1}+F(s)\cdot L\{\sin t\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1}+\frac{sF(s)}{s^2+1}$$

$$\left(1-\frac{s}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$F(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2-s+1)}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $L\{e^{-3t} * \cos 2t\}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 3.13
$$L\{e^{-3t} * \cos 2t\} = L\{e^{-3t}\}L\{\cos 2t\} = \frac{1}{s+3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{(s+3)(s^2+4)}$$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 3.13 จะได้

$$F(s)G(s) = L\left\{\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

หรืออาจเขียนในรูป $= L\left\{\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right\}$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงใช้คุณสมบัติ $L\{f'(t)\}$ หาค่าของ $L\{\cos t\}$ กำหนดให้ $L\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$

2. จงแสดงว่า $L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

จงหาผลการแปลงลาปลาซของข้อต่อไปนี้

3. $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\,dt$

4. $\displaystyle\int_0^t \frac{e^t - \cos 2t}{t}\,dt$

5. ถ้า $f(t) = t\sin at$ จงหา

   5.1 แสดงว่า $f'''(t) + a^2f(t) = 2a\cos at$

   5.2 จงหา $L\{f(t)\}$

6. จงหาค่าของ $t*e^t$ และ $L\{t*e^t\}$

7. จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ

   7.1 $f(t) = \displaystyle\int_0^t \sin t\cos(t-\lambda)\,d\lambda$

   7.2 $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\lambda)}\cos 2\lambda\,d\lambda$