# บทที่ 3
# ผลการแปลงลาปลาซ
# (The Laplace Transform)

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวความคิดที่มีประโยชน์ซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แนวความคิดนี้คือผลการแปลงลาปลาซ ซึ่งจะแปลงฟังก์ชัน f ของตัวแปร t เป็นฟังก์ชัน F ตัวแปร s

## 3.1 นิยามและคุณสมบัติมูลฐานของผลการแปลงลาปลาซ

(Definition and Basic properties of the Laplace Transform)

**นิยาม** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง $t$ เมื่อ $t > 0$ ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ เขียนแทนด้วย $L\{f(t)\}$ และ

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad s > 0 \qquad \text{..........(3.1.1)}$$

$L$ เรียกว่าตัวดำเนินการผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform operation)

**ผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน**

1. $f(t) = 1$

$$L\{f(t)\} = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

ถ้า $f(t) = c$ ค่าคงตัว

$$L\{c\} = \int_0^\infty ce^{-st}dt$$

$$= c\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= \frac{c}{s}, \quad s > 0$$

2. $f(t) = t$

$$L\{f(t)\} = L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$L\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0$$

3. $f(t) = t^n$

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t^n, \qquad dv = e^{-st}dt$

$du = nt^{n-1}dt, \qquad v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$$L\{t^n\} = t^n\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)(nt^{n-1}dt)$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$$

$$= \frac{n}{s}L\{t^{n-1}\}$$

สำหรับ $L\{t^{n-1}\}$ ใช้การอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = t^{n-1}, \qquad dv = e^{-st}dt$

$du = (n-1)t^{n-2}dt, \quad v = \frac{-e^{-st}}{s}$

$$L\{t^{n-1}\} = t^{n-1}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right)(n-1)t^{n-2}dt$$

$$= \frac{(n-1)}{s}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-st}dt$$

$$= \frac{(n-1)}{s} L\{t^{n-2}\}$$

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\frac{(n-1)}{s}\,L\{t^{n-2}\}$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วนอีก $n-2$ ครั้ง จะได้

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\frac{(n-1)}{s}\,\frac{(n-2)}{s}\,\frac{(n-3)}{s}\cdots\frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s}\,L\{1\}$$

$$= \frac{n!}{s^n}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{เมื่อ } n = 0,1,2,3,\ldots$$

จากนิยามฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^n dt, \quad n > -1$$

และ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ดังนั้น $L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \quad n > -1$

4. $f(t) = e^{at}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

5. $f(t) = \sin at$

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} \sin at\, e^{-st}dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sin at, \quad dv = e^{-st}dt$

$du = a\cos at\, dt, \quad v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$$\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt = \sin at\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)(a\cos at dt)$$

$$= \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos ate^{-st}dt$$

**โดยการอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง**

**ให้** $u = \cos at, \qquad dv = e^{-st}dt$

$du = -a\sin at dt, \qquad v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$$\int_0^\infty \cos ate^{-st}dt = \cos at\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)(-a\sin at dt)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt$$

$$\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt = \frac{a}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt\right]$$

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt = \frac{a}{s^2}$$

$$\int_0^\infty \sin ate^{-st}dt = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

**ดังนั้น** $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$

**ในทำนองเดียวกันจะได้**

6. $f(t) = \cos at$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

7. $f(t) = \sinh at$

$$L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad a > |a|$$

8. $f(t) = \cosh at$

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|$$

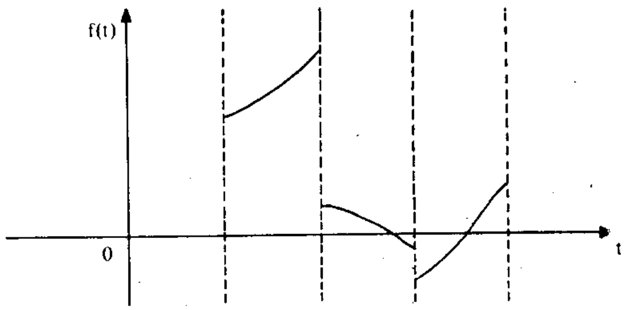
จากนิยามของผลการแปลงลาปลาซจะเห็นว่า ถ้าค่าอินทิกรัล $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ หาค่าได้ นั่นคือผลการแปลงลาปลาซของ f(t) หาค่าได้หรือลู่เข้า (converge) แต่ถ้าค่าอินทิกรัลนั้นหาไม่ได้

จะกล่าวว่าผลการแปลงลาปลาซของ f(t) ลู่ออก (diverge) ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันใดหาผลการแปลงลาปลาซได้นั้นจะอาศัยคุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้

**นิยาม** ฟังก์ชัน f(t) เรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ** (piecewise continuity) บนช่วง $[a, b]$ ถ้า

1. สามารถแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ ที่นับได้ถ้วน (finite) ซึ่งแต่ละช่วงย่อยนี้ f(t) มีความต่อเนื่อง
2. สามารถหาค่าลิมิตข้างซ้าย และลิมิตข้างขวาของ f(t) ได้

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ แสดงดังรูป




*รูป 3.1*

**ตัวอย่าง** พิจารณาฟังก์ชัน f(t) นิยามโดย

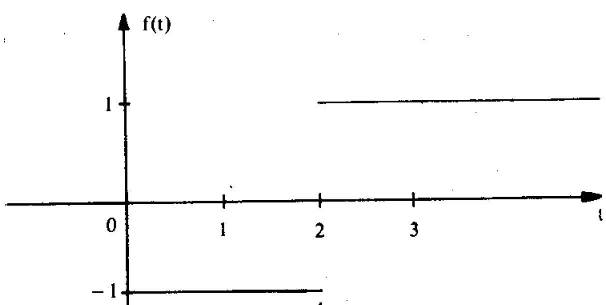
$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

จะได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ทุกค่า t บน $0 \leqslant t \leqslant b$ สำหรับ $b > 0$ และ

$$\lim_{t \to 2^-} f(t) = -1$$

$$\lim_{t \to 2^+} f(t) = 1$$

เขียนกราฟได้ดังนี้




*รูป 3.2*

**นิยาม** ฟังก์ชัน $f(t)$ เรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง** (Function of exponential order) ถ้ามีค่าคงตัว $\alpha$ และค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ T และ M ซึ่งทำให้ $|f(t)| \geqslant Me^{\alpha t}$ สำหรับทุกค่า $t > T$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ f เป็นฟังก์ชันของอันอับชี้กำลัง ถ้ามีค่าคงตัว $\alpha$ ซึ่งทำให้ $e^{-\alpha t}|f(t)|$ **มีขอบเขต** (bounded) สำหรับค่า t ที่ใหญ่พอ

**ตัวอย่าง** ทุกฟังก์ชันที่มีขอบเขตเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง ซึ่งมีค่า $\alpha = 0$ เพราะว่า

$$|f(t)| \leqslant M \cdot e^{0t}$$

ฟังก์ชันที่มีขอบเขต เช่น sin at, cos at เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง

**ตัวอย่าง** ฟังก์ชัน $f(t) = t^n$ เมื่อ $n > 0$

พิจารณา $e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t}t^n$

สำหรับ $\alpha > 0$ จะได้ $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\alpha t}t^n = 0$

ดังนั้น มี $M > 0$ และ $T > 0$ ซึ่ง

$$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t}t^n < M$$

นั่นคือ $f(t) = t^n$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง

**ตัวอย่าง** $f(t) = e^{t^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง

เพราะว่า $e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{t^2-\alpha t}$

เมื่อ $t \to \infty$ ค่า $e^{t^2-\alpha t}$ ไม่มีขอบเขตทุกค่า $\alpha$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ จะหาค่าได้หรือไม่นั้นจะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.1**

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $0 \leqslant t \leqslant T$ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง สำหรับ $t > T$ จะได้ว่า $L\{f(t)\}$ หาค่าได้ (exists) สำหรับ $s > \alpha$

**พิสูจน์** จากนิยาม $F(s) = L\{f(t)\}$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

เพราะว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0, T]$

$\therefore$ $e^{-st}f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0, T]$

ดังนั้น $\int_0^T e^{-st}f(t)dt$ หาค่าได้

พิจารณา
$$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt\right| \leqslant \int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt$$
$$\leqslant \int_T^\infty e^{-st}Me^{\alpha t}dt$$
$$\leqslant M\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$$
$$= \frac{M}{s-\alpha}, \qquad s > \alpha$$

ดังนั้น $L\{f(t)\}$ หาค่าได้

## 3.2 คุณสมบัติบางประการของผลการแปลงลาปลาซ

**ทฤษฎีบท 3.2 คุณสมบัติเชิงเส้น** (linearity property)

ถ้า $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ และ $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$ แล้ว
$$L\{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\} = a_1L\{f_1(t)\} + a_2L\{f_2(t)\}$$
$$= a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$$

เมื่อ $a_1$, $a_2$ เป็นค่าคงตัว

**พิสูจน์**
$$L\{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\}dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}a_1f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}a_2f_2(t)dt$$
$$= a_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt + a_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt$$
$$= a_1L\{f_1(t)\} + a_2L\{f_2(t)\}$$
$$= a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$$

ถ้ามีฟังก์ชันมากกว่าสองฟังก์ชัน คุณสมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริง ในการหาสูตรผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน sin at, cos at, sinh at, cosh at อาจจะกระจายให้อยู่ในรูปฟังก์ชันชี้กำลังแล้วใช้คุณสมบัติเชิงเส้นหาค่าได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** จงแสดงว่า $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\cos at = \dfrac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$

$$
\begin{aligned}
L\{\cos at\} &= L\left\{ \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{2}L\{e^{iat}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-iat}\} \\
&= \frac{1}{2(s-ia)} + \frac{1}{2(s+ia)} \\
&= \frac{s+ia+s-ia}{2(s-ia)(s+ia)} \\
&= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}
$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่า $L\{\sinh at\}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\sinh at = \dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

$$
\begin{aligned}
L\{\sinh at\} &= L\left\{ \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{2}L\{e^{at}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\} \\
&= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|
\end{aligned}
$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\{5\sin 2t - t^2 + 2e^{-3t}\}$

**วิธีทำ**

$$
\begin{aligned}
L\{5\sin 2t - t^2 + 2e^{-3t}\} &= 5L\{\sin 2t\} - L\{t^2\} + 2L\{e^{-3t}\} \\
&= 5\left(\frac{2}{s^2+4}\right) - \frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s+3} \\
&= \frac{10}{s^2+4} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s+3}
\end{aligned}
$$

**ทฤษฎีบท 3.3 ทฤษฎีการเลื่อนออกไป 1** (First Shifting Theorem)

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

**พิสูจน์**

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$= F(s-a)$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\{e^{3t}t^2\}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} = F(s)$

ดังนั้น $L\{e^{3t}t^2\} = F(s-3)$

$$= \frac{2}{(s-3)^3}$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\{e^{at}\sin bt\}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} = F(s)$

ดังนั้น $L\{e^{at}\sin bt\} = F(s-a)$

$$= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\{e^{-2t}\cos 4t\}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16} = F(s)$

ดังนั้น $L\{e^{-2t}\cos 4et\} = F(s+2)$

$$= \frac{(s+2)}{(s+2)^2+16}$$

ดังนั้น จากสูตรผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน 8 สูตร จะมีเพิ่มขึ้นอีกโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 3.3 ดังนี้

## ตารางผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่าง ๆ

| | $f(t)$ | $F(s)$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\frac{1}{s}$ | $s > 0$ |
| 2 | $1$ | $\frac{1}{s^2}$ | $s > 0$ |
| 3 | $t^n (n = 1,2,\ldots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $s > 0$ |
| 4 | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $s > a$ |
| 5 | $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $s > 0$ |
| 6 | $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $s > 0$ |
| 7 | $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $s > \|a\|$ |
| 8 | $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $s > \|a\|$ |
| 9 | $e^{at}t^n \ (n = 1,2,\ldots)$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | $s > a$ |
| 10 | $e^{at} \sin bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ | $s > a$ |
| 11 | $e^{at} \cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ | $s > a$ |
| 12 | $e^{at} \sinh bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$ | $s > a+\|b\|$ |
| 13 | $e^{at} \cosh bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$ | $s > a+\|b\|$ |

**ทฤษฎีบท 3.4**

**คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล** (Change of scale property)

**ถ้า** $L\{f(t)\} = F(s)$ **จะได้**

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

**พิสูจน์** $$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(at)dt$$

**ให้** $u = at$

$$du = adt$$

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} f(u)\left(\frac{du}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du$$

$$= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

**ตัวอย่าง** **จงหาค่าของ** $L\{t \sin at\}$ **กำหนดให้** $L\{t \sin t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

**วิธีทำ** **เพราะว่า** $L\{at \sin at\} = aL\{t \sin at\}$

**โดยทฤษฎีบท** 3.4

$$L\{at \sin at\} = L\{f(at)\}$$

$$= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{2\frac{s}{a}}{\left[\left(\frac{s}{a}\right)^2+1\right]^2}\right\}$$

$$= \frac{2sa^2}{(s^2+a^2)^2}$$

**ดังนั้น** $L\{t \sin at\} = \frac{1}{a}L\{at \sin at\}$

$$= \frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}, \qquad s > 0$$

**ทฤษฎีบท 3.5**

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ **แล้วเมื่อ** $n = 1,2,3,\ldots$

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

**พิสูจน์** $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

**เมื่อ** $n = 1$ $\frac{dF}{ds} = F'(s)$

$$= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt$$

$$= -L\{tf(t)\}$$

ดังนั้น $L\{tf(t)\} = -F'(s)$

เมื่อ n ใด ๆ

$$\frac{d^nF}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[e^{-st}f(t)\right]dt$$

$$= (-1)^n\int_0^\infty e^{-st}\left[t^nf(t)\right]dt$$

$$= (-1)^nL\{t^nf(t)\}$$

ดังนั้น $L\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}$

**ตัวอย่าง** **จงหาค่าของ** $L\{t^2 \sin bt\}$

**วิธีทำ** **จากทฤษฎีบท** 3.5 **จะได้**

$$L\{t^2 \sin bt\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)\right]$$

เมื่อ $F(s) = L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$

ดังนั้น $\frac{d}{ds}\left[F(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[\frac{b}{s^2+b^2}\right]$

$$= -\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)\right] = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

$$L\{t^2 \sin bt\} = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

**ตัวอย่าง** **จงหาค่าของ** $L\{t^2e^{-2t}\}$

**วิธีทำ** **จากทฤษฎีบท** 3.5 **จะได้**

$$L\{t^2e^{-2t}\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}[F(s)]$$

**เมื่อ** $F(s) = L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$

**ดังนั้น** $\frac{d}{ds}[F(s)] = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]$

$$= -\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}[F(s)] = \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{(s+2)^2}\right]$$

$$= \frac{2}{(s+2)^3}$$

**นั่นคือ** $L\{t^2e^{-2t}\} = \frac{2}{(s+2)^3}$

**หมายเหตุ โจทย์** $L\{t^2e^{-2t}\}$ **อาจใช้ทฤษฎีบทที่** 3.3 **ได้ คืออยู่ในรูป**

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

**ดังนั้น** $L\{t^2e^{-2t}\} = \frac{2!}{(s+2)^3}$

**ตัวอย่าง** **จงหาค่าของ** $L\{t^2\cos t\}$

**วิธีทำ** $L\{t^2\cos t\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\{\cos t\}$

$$L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{d}{ds}L\{\cos t\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}L\{\cos t\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{(s^2+1)^2(2s)-(s^2-1)2(s^2+1)(2s)}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{2s^5 - 4s^3 - 6s}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{(2s^3 - 6s)(s^2+1)}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{2s^3 - 6s}{(s^2+1)^3}$$

**ทฤษฎีบท 3.6**

ถ้า $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ หาค่าได้ และ $L\{f(t)\} = F(s)$ แล้วจะได้

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du$$

**พิสูจน์** จากที่กำหนดให้ $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ หาค่าได้ เพื่อให้ $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$ หาค่าได้

ให้ $g(t) = \frac{f(t)}{t}$

หรือ $f(t) = tg(t)$

$$\begin{aligned} F(s) &= L\{f(t)\} \\ &= L\{tg(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}L\{g(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}G(s) \end{aligned}$$

ดังนั้น $G(s) = -\int_c^s F(u)du$

$$= \int_s^c F(u)du$$

เพราะว่า $g(t)$ คล้องตามเงื่อนไขของการหาค่าได้ของผลการแปลงลาปลาซ

ดังนั้น $\lim\limits_{s \to \infty} G(s) = 0$ นั่นคือ $c \to \infty$

$$G(s) = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

$$= \int_s^{\infty} F(u)du$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\lim_{t \to 0} \frac{1-e^{-t}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-t}}{1}$

$$= 1$$

และ $L\{1-e^{-t}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

จากทฤษฎีบท 3.6

$$L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_s^{k}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[\ln u - \ln(u+1)\right]\Big|_s^k$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

**วิธีทำ** $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du$

เมื่อ $F(s) = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_s^{k} \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \tan^{-1} u\Big|_s^k$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[\tan^{-1} k - \tan^{-1} s\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

$$= \cot^{-1} s$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

## แบบฝึกหัด 3.1

**จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้**

1. $4e^{-3t} + t^2$
2. $\sin 2t - 3\cos 3t$
3. $\sin t \cos t$
4. $\cos^2 2t$
5. $\sin(2t - 3)$
6. $e^{-3t} \cos 2t$
7. $t^2 \sin t$
8. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leqslant 2 \\ 2, & 2 < t \end{cases}$
9. $\sinh^2 t$
10. $\dfrac{\sin kt}{t}$

**จงเปลี่ยน** sinh at **และ** cosh at **ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลยกกำลัง แล้วหาค่าของข้อ** 11. – 14.

11. $L\{\cosh at \sin at\}$
12. $L\{\sinh at \cos at\}$
13. $L\{\cosh at \cosh bt\}$
14. $L\{\sinh at \sinh bt\}$
15. **ถ้า** $L\{f(t)\} = \dfrac{s^2 - 1}{(2s-1)(s+3)}$ **จงหาค่าของ** $L\{f(3t)\}$
16. **จงหาค่าของ** $L\left\{\dfrac{1 - \cos 2t}{t}\right\}$
17. **จงแสดงว่า** $L\left\{\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\dfrac{s+b}{s+a}\right)$
18. **จงแสดงว่า** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \ln 2$
19. **จงแสดงว่า** $L\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2 + b^2}{s^2 + a^2}\right)$

## 3.3 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

(Laplace Transform of unit step function)

**นิยาม ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย นิยามดังนี้**

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

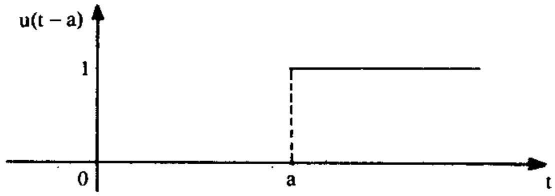
**โดยทั่วไป** $$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

**พิจารณาผลการแปลงลาปลาซของ** $u(t)$ **และ** $u(t-a)$ **จะได้**

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{u(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)dt \\ &= \int_0^a e^{-st}u(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}u(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt \\ &= -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_a^\infty \\ &= \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

**เขียนกราฟของ** $u(t-a)$ **ดังนี้**




*รูป 3.3*

**ตัวอย่าง** จงเขียนฟังก์ชัน $f(t) = \begin{cases} 8, & t < 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases}$ ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย และหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$

**วิธีทำ**

$$f(t) = \begin{cases} 8, & t < 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 + \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -2, & t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 - 2\begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 - 2u(t-2)$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = L\{8 - 2u(t-2)\}$$

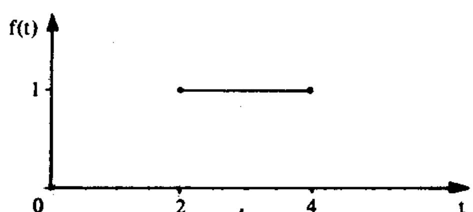
$$= 8L\{1\} - 2L\{u(t-2)\}$$

$$= \frac{8}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$= \frac{8 - 2e^{-s}}{s}$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 2 \\ 1, & 2 \leqslant t < 4 \\ 0, & t \geqslant 4 \end{cases}$

**วิธีทำ**




*รูป 3.4*