พิสูจน์ จากนิยาม $\mathscr{F}\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-i\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)e^{i\omega t}\right]^* dt$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right]^*$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}dt\right]^*$$

$$= F^*(-\omega)$$

จาก $$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(t)f_2(t)\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega$$

ให้ $f_1(t) = f(t)$ และ $f_2(t) = f^*(t)$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F-(\omega)F^*\left[-(-\omega)\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

เพราะว่า $f(t)f^*(t) = |f(t)|^2$

และ $F(\omega)F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะเห็นว่า

$$F(\omega) = 2F_c(\omega)$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2.6 จะได้

$$2\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\infty} |2F_c(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_c(\omega)|^2 d\omega \qquad \text{..........(2.5.2)}$$

ถ้า f(t) **เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้**

$$F(\omega) = -2iF_s(\omega)$$

และจะได้ $$2\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}2\int_0^\infty |-2iF_s(\omega)|^2 d\omega$$

นั่นคือ $$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |F_s(\omega)|^2 d\omega \qquad \text{..........(2.5.3)}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

วิธีทำ จากสูตร (2.5.1) จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

ให้ $$f(t) = e^{-at}u(t)$$

จะได้
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathscr{F}\{f(t)\} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \\ |F(\omega)|^2 &= \left(\frac{1}{a+i\omega}\right)\left(\frac{1}{a-i\omega}\right) \\ &= \frac{1}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

แทนค่าในสูตร (2.5.1) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2+\omega^2} &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \\ &= 2\pi\int_0^\infty e^{-2at}dt \end{aligned}$$

$$= 2\pi\left[\left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty}\right]$$

$$= \frac{\pi}{a}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{\pi}{a}$.

เมื่อ $a = 1$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{(4+t^2)^2}\,dt$ กำหนดให้ $\mathscr{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

วิธีทำ จากสูตร (2.5.1) จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-2|t|}|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2(2)}{4+\omega^2}\right|^2d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{(4+\omega^2)^2}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{(4+\omega^2)^2}d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-2|t|}|^2dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4t}dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[2\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt\right]$$

$$= \pi\left[\frac{e^{-4t}}{-4}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4}\right]$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(4+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & t \geqslant 1 \end{cases}$ จงหาค่าของ

1. ผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์

2. จงหาค่าของ $\int_0^{\infty} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right)^2 dt$

วิธีทำ 1. จากสูตรผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์

$$\mathscr{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\sin \omega t dt$$

$$= \int_0^1 (1)\sin \omega t dt + \int_1^{\infty} (0)\sin \omega t dt$$

$$= -\frac{\cos \omega t}{\omega}\Big|_0^1$$

ดังนั้น $F_s(\omega) = \frac{1-\cos\omega}{\omega}$.

2. จากสูตร (2.5.3)

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} |F_s(\omega)|^2 d\omega$$

$$\therefore \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \left|\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right|^2 d\omega = \int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_1^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^1 (1)dt = 1$$

ดังนั้น $\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. ถ้า $F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$ จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)\cos\omega_0 t$

2. ถ้า $\mathscr{F}\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{a+i\omega}$ เมื่อ $t > 0$ จงหา $\mathscr{F}\{f(t+3)\}$

3. ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ และ $\mathscr{F}\{f''(t)\}$ หาค่าได้ จงแสดงว่า

$$\mathscr{F}\{f''(t)\} = (i\omega)^2F(\omega)$$

4. ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ จงแสดงว่า $\mathscr{F}\{f(at)e^{i\omega_0 t}\} = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{a}\right)$

5. จงหา $f(t)*g(t)$ เมื่อ

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

6. จงใช้ผลการประสานหาค่าของ $\mathscr{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(2+i\omega)^2}\right\}$

7. จงใช้ผลการประสานหาค่าของ $\mathscr{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(2+i\omega)(i\omega-1)}\right\}$ และเปรียบเทียบผลกับการกระจาย $\dfrac{1}{(2+i\omega)(i\omega-1)}$ เป็นเศษส่วนย่อยก่อน

8. กำหนดให้ $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ และ $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(\omega)$ จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega$$

9. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 at}{t^2}dt$ โดยใช้ทฤษฎีบทปาร์เซอวาล

10. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dt}{(a^2+t^2)^2}$ โดยทฤษฎีบทปาร์เซอวาล

2.7 การประยุกต์ของผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

(Application of Fourier transform to linear differential equations)

จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

สำหรับ $f(t) = e^{at}$ เมื่อ $t > 0$

$$\mathscr{F}\{e^{at}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(i\omega - a)t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-(i\omega - a)t}}{-(i\omega - a)}\right|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i\omega - a}, \quad \text{Re}a < 0$$

พิจารณา $f(t) = te^{at}$ เมื่อ $t > 0$ และ $\text{Re}a < 0$

$$\mathscr{F}\{te^{at}\} = \int_{-\infty}^{\infty} te^{at}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} te^{-(i\omega - a)t}dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t, \quad dv = e^{-(i\omega - a)t}dt$

$du = dt, \quad v = \dfrac{e^{-(i\omega - a)t}}{-(i\omega - a)}$

$$\mathscr{F}\{te^{at}\} = t\left.\frac{e^{-(i\omega - a)t}}{-(i\omega - a)}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(i\omega - a)t}}{(i\omega - a)}dt$$

$$= 0 + \frac{1}{i\omega - a}\left[\frac{e^{-(i\omega - a)t}}{-(i\omega - a)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(i\omega - a)(i\omega - a)}$$

$$= \frac{1}{(i\omega - a)^2}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $f(t) = t^2e^{at}, \quad t > 0, \quad \text{Re}\, a < 0$ จะได้

$$\mathscr{F}\{t^2e^{at}\} = \int_0^{\infty} t^2e^{at}e^{-i\omega t}dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\mathscr{F}\{t^2e^{at}\} = \frac{2}{(i\omega - a)^3}$$

โดยการใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction)

สำหรับ $f(t) = t^{k-1}e^{at}, \quad t > 0, \quad \text{Re}\, a < 0$

จะได้ $\mathscr{F}\{t^{k-1}e^{at}\} = \dfrac{(k-1)!}{(i\omega - a)^k}$

หรือ $\mathscr{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(i\omega - a)^k}\right\} = \dfrac{t^{k-1}e^{at}}{(k-1)!}$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0x = g(t) \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.1)$$

ใส่ผลการแปลงฟูริเยร์ทั้งสองข้างของสมการ (2.7.1) และจากสูตร

$$\mathscr{F}\{f^n(t)\} = (i\omega)^n\mathscr{F}\{f(t)\}$$

จะได้ $\left[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_0\right]\mathscr{F}\{x(t)\} = \mathscr{F}\{g(t)\}$

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = \frac{1}{a_n(i\omega)^n + \ldots + a_0}\mathscr{F}\{g(t)\}$$

ให้ $\qquad Y(s) = \dfrac{1}{a_ns^n + \ldots + a_0}$

ดังนั้น $\qquad Y(i\omega) = \dfrac{1}{a_n(i\omega)^n + \ldots + a_0}$

และ $\mathscr{F}\{x(t)\} = Y(i\omega)\mathscr{F}\{g(t)\}$

ถ้า $Y(i\omega) = \mathscr{F}\{h(t)\}$ และ $h(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{x(t)\} &= \mathscr{F}\{h(t)\}\mathscr{F}\{g(t)\}\\ &= \mathscr{F}\{h(t)*g(t)\}\\ x(t) &= h(t)*g(t)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $x'' + 5x' + 6x = e^t$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงฟูริเยร์ตลอดสมการ

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{x''\} + 5\mathscr{F}\{x'\} + 6\mathscr{F}\{x\} &= \mathscr{F}\{e^t\}\\ \left[(i\omega)^2 + 5(i\omega) + 6\right]\mathscr{F}\{x\} &= \mathscr{F}\{e^t\}\\ \mathscr{F}\{x\} &= \frac{1}{(i\omega)^2 + 5(i\omega) + 6}\mathscr{F}\{e^t\}\end{aligned}$$

ให้
$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\\ &= \frac{1}{(s+3)(s+2)}\\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\\ Y(i\omega) &= \frac{1}{i\omega + 2} - \frac{1}{i\omega + 3}\end{aligned}$$

ให้ $Y(i\omega) = \mathscr{F}\{h(t)\}$

ดังนั้น
$$h(t) = \begin{cases} e^{-2t} - e^{-3t}, & t > 0\\ 0, & t < 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= h(t)*e^t\\ &= \int_0^{\infty}(e^{-2u} - e^{-3u})e^{t-u}\,du\\ &= e^t\left[\int_0^{\infty} e^{-3u}du - \int_0^{\infty} e^{-4u}du\right]\\ &= e^t\left[\frac{e^{-3u}}{-3}\Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-4u}}{-4}\Big|_0^{\infty}\right]\end{aligned}$$

$$= e^t\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{e^t}{12}$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $x''+3x'+2x = f(t)$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ 1, & t>1 \end{cases}$

วิธีทำ ใส่ผลการแปลงฟูริเยร์ตลอดสมการ

$$\mathcal{F}\{x''\}+3\mathcal{F}\{x'\}+2\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\left[(i\omega)^2+3(i\omega)+2\right]\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{x\} = \frac{1}{(i\omega)^2+3(i\omega)+2}\mathcal{F}\{f(t)\}$$

ให้ $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$Y(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1}-\frac{1}{i\omega+2}$$

ให้ $Y(i\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

ดังนั้น $h(t) = \begin{cases} e^{-t}-e^{-2t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$$x(t) = h(t)*f(t)$$

$$= \int_0^{\infty}(e^{-u}-e^{-2u})f(t-u)du$$

$f(t-u) = \begin{cases} 0, & t-u<0 \\ 1, & t-u>0 \text{ หรือ } t>u \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t (e^{-u} - e^{-2u})du \\
&= \left.\frac{e^{-u}}{-1}\right|_0^t \left.\frac{-e^{-2u}}{-2}\right|_0^t \\
&= -e^{-t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 2.3

จงแก้สมการ

1. $x'' + 4x' - 5x = 0$
2. $x'' + 3x' + 2x = e^{t}$
3. $x'' + 4x = f(t)$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
4. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{-2t}$

2.8 การประยุกต์ของผลการแปลงฟูริเยร์กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

(Application of Fourier transform to partial differential equations)

ในที่นี้จะพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น (initial – value problem) ของสมการความร้อน สมการคลื่น และสมการลาปลาซ

ตัวอย่าง พิจารณาสมการความร้อน

D.E. $u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$

I.C. $u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

$|u(x, t)| < M$ เมื่อ M เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ สมมติให้คำตอบของสมการคือ $u(x, t)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|dx < \infty$ โดยผลการแปลงฟูริเยร์

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, t)e^{isx}ds = \mathscr{F}^{-1}\{U(s, t)\}$$

เมื่อ $U(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx = \mathscr{F}\{u(x, t)\}$

หาอนุพันธ์ของ U เทียบกับ t

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t)e^{-isx}dx$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน และกำหนด $u_x(x, t) \to 0$ เมื่อ $x \to \pm\infty$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left[e^{-isx}u_x(x, t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + is\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-isx}dx\right]$$

$$= isk\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= isk\left[e^{-isx}u(x, t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + is\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx \right]$$

ให้ $u(x, t) \to 0$ เมื่อ $x \to \pm\infty$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (is)^2 k\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -s^2 kU(s, t)$$

คำตอบของสมการคือ

$$U(s, t) = Ae^{-s^2kt}$$

จาก I.C

$$U(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-isx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$$

$$= F(s)$$

ดังนั้น $A = F(s)$

$$U(s, t) = F(s)e^{-s^2kt}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, t)e^{isx}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2kt} F(s)e^{isx}ds$$

ตัวอย่าง สมการคลื่น

D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

I.C. $u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

$u_t(x, 0) = 0$

วิธีทำ เหมือนสมการความร้อน ให้ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการ ซึ่ง

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|dx < \infty, \quad t > 0$$

โดยสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, t)e^{isx}ds$$

$$U(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= c^2\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t)e^{-isx}dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $u_x(x, t) \to 0$ เมื่อ $x \to \pm\infty$ และ

$u(x, t) \to 0$ เมื่อ $x \to \pm\infty$

จะได้ $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -c^2s^2U(s, t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(s, t) + c^2s^2U(s, t) = 0$$

คำตอบทั่วไปคือ

$$U(s, t) = A(s)e^{isct} + B(s)e^{-isct}$$

เมื่อ $A(s)$, $B(s)$ เป็นค่าคงตัวเมื่อเทียบกับ t

$$U(s, 0) = \mathscr{F}\{u(x, 0)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-isx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = F(s)$$

$$U(s, 0) = A(s) + B(s) = F(s) \qquad \text{..........(2.8.1)}$$

$$U_t(s, 0) = \mathscr{F}\{u_t(x, 0)\}$$

$$= 0$$

แต่ $U_t(s, t) = isc\, A(s)e^{isct} - isc\, B(s)e^{-isct}$

$$U_t(s, 0) = isc\left[A(s) - B(s)\right] = 0 \qquad \text{.........(2.8.2)}$$

แก้สมการ (2.8.1) และ (2.8.2) จะได้

$$A(s) = B(s) = \frac{F(s)}{2}$$

$$U(s, t) = \frac{F(s)}{2}e^{isct} + \frac{F(s)}{2}e^{-isct}$$

จากคุณสมบัติการเลื่อนออกไป 1 (time – shifting property) จะได้

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(s)e^{isct}\} = f(x+ct)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(s)e^{-isct}\} = f(x-ct)$$

$$u(x, t) = \mathscr{F}^{-1}\{U(s, t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\{F(s)e^{isct}\} + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\{F(s)e^{-isct}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการลาปลาซ

D.E. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ 0 < y < \infty$

B.C. $u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

$|u(x, y)| < M, \quad -\infty < x < \infty, \ 0 < y < \infty$

ปัญหานี้มีชื่อว่าปัญหาของดีริคเลต (Dirichlet's problem) สำหรับสมการของลาปลาซ

วิธีทำ ให้คำตอบของสมการคือ $u(x, y)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|dx < \infty$
โดยผลการแปลงฟูริเยร์

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, y)e^{isx}ds$$

$$U(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{-isx}dx$$

หาอนุพันธ์ของ U เทียบกับ y 2 ครั้ง

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{yy} e^{-isx} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-isx} dx$$

กำหนดให้ $u(x, y)$ และ $u_x(x, y)$ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $t \to \pm\infty$ จะได้

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\left[u_x e^{-isx} + isue^{-isx}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right] + s^2 \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-isx} dx$$

$$= s^2 U$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - s^2 U = 0$$

คำตอบทั่วไปคือ

$$U(s, y) = A(s)e^{sy} + B(s)e^{-sy}$$

เนื่องจาก $u(x, y)$ มีขอบเขต ดังนั้น $U(s, y)$ มีขอบเขตเมื่อ $y \to \infty$ ให้ $A(s) = 0$

$$U(s, y) = B(s)e^{-sy}, \quad s > 0$$

$$U(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-isx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx = F(s)$$

$$B(s) = F(s)$$

$$U(s, y) = F(s)e^{-sy}, \qquad s > 0$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $s < 0$ ให้ $B(s) = 0$ จะได้

$$U(s, y) = F(s)e^{sy}, \quad s < 0$$

ดังนั้น $$U(s, y) = F(s)e^{-|s|y}, \quad -\infty < s < \infty$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, y)e^{isx} ds$$

หรือ $$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-isz}dz\right)e^{-|s|y}e^{isx}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-z)-|s|y}ds\right]dz$$

พิจารณา $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-z)-|s|y}ds = \int_{-\infty}^{0} e^{is(x-z)-|s|y}ds + \int_{0}^{\infty} e^{is(x-z)-|s|y}ds$$

$$= \left.\frac{e^{is(x-z)+sy}}{i(x-z)+y}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{is(x-z)-sy}}{i(x-z)-y}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i(x-z)+y} - \frac{1}{i(x-z)-y}$$

$$= \frac{2y}{(x-z)^2+y^2}$$

ดังนั้น $$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{y}{(x-z)^2+y^2}dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(z)}{(x-z)^2+y^2}dz \qquad \text{..........(2.8.3)}$$

เรียกสมการ (2.8.3) ว่า Poisson's integral formula for the half plane

สำหรับโดเมนซึ่งเป็นครึ่งช่วงอนันต์ จะอาศัยสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์ไซน์ หรือสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์โคไซน์

ตัวอย่าง D.E. $u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0, \quad t > 0$

I.C. $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty$

วิธีทำ ให้ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการ และ $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x, t)|dx < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} U_s(s, t)\sin sx\,ds$$

เมื่อ $$U_s(s, t) = \int_{0}^{\infty} u(x, t)\sin sx\,dx$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} = \int_0^\infty u_t(x, t) \sin sx dx$$

$$= k\int_0^\infty u_{xx}(x, t) \sin sx dx$$

$$= k\left[u_x \sin sx - ksu \cos sx\Big|_0^\infty\right] - ks^2\int_0^\infty u \sin sx dx$$

ถ้า $u(x, t)$ และ $u_x(x, t)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t \to \infty$

จะได้ $$\frac{\partial U_s}{\partial t} = -s^2kU_s$$

$$U_s(s, t) = Ae^{-s^2kt}$$

$$U_s(s, 0) = \int_0^\infty f(x) \sin sx dx$$

$$= F_s(s)$$

และ $$A = F_s(s)$$

$$U_s(s, t) = F_s(s)e^{-s^2kt}$$

ดังนั้น $$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^2kt}F_s(s) \sin sx ds$$

แบบฝึกหัด 2.4

จงแก้ปัญหาค่าขอบโดยวิธีผลการแปลงฟูริเยร์

1. $$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= f(t), && t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, && 0 < x < \infty \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), && -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, && 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 1 \\ u_x(0, y) &= 0 \\ u_y(x, 0) &= 0 \\ u(x, 1) &= f(x). \end{aligned}$$