ทฤษฎีบทที่ 2.3

ให้ f(t) เป็นฟังก์ชันจริง ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\}$ เป็นค่าจริง จะได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ และถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\}$ เป็นจินตภาพแท้ (pureimaginary) จะได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

พิสูจน์ ให้ $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$

จะได้ $$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\}$ เป็นค่าจริง นั่นคือ $X(\omega) = 0$

เพราะว่า $\sin \omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่ และ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0$ จะได้ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่

และ $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$$

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ เป็นจินตภาพแท้ จะได้ $R(\omega) = 0$

เพราะว่า $\cos \omega t$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 0$
ดังนั้น f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

และ $$f(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทที่ 2.2 และ 2.3 จะสรุปได้ว่า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง และ

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

จะได้

$$\mathscr{F}\{f_e(t)\} = R(\omega)$$

$$\mathscr{F}\{f_o(t)\} = iX(\omega)$$

เมื่อ $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ และ $f_e(t)$ เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ $f_o(t)$ เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบคี่

2.3 ผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์และฟูริเยร์โคไซน์

(Fourier sine and cosine transforms)

จากทฤษฎีบทที่ 2.1 อินทิกรัลฟูริเยร์ และตัวอย่างถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega t\left[\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx\right]d\omega$$

ให้ $F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$

ถ้า $f(t)$ นิยามได้ในช่วง $0 < t < \infty$ จะเรียก $F_s(\omega)$ ว่า **ผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์** (Fourier sine transform) **ของ** $f(t)$ และเขียนแทนด้วย

$$\mathscr{F}_s\{f(t)\} = F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$$

และ $f(t) = \mathscr{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega t$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

พิจารณา $\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\lambda(t-x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\cos\omega(t-x)dx + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$

$$= -\int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= -\int_0^{-(-\infty)} f(-x)\cos\omega(t+x)d(-x)$$

$$+\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} f(x)\cos\omega(t+x)dx + \int_0^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= 2\cos\omega t\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

ให้ $F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$

ถ้า $f(t)$ นิยามได้ในช่วง $0 < t < \infty$ เรียก $F_c(\omega)$ ว่า **ผลการแปลงฟูริเยร์โคไซน์** (Fourier cosine transform) **ของ** $f(t)$ เขียนแทนด้วย

$$\mathscr{F}_c\{f(t)\} = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

และ $$f(t) = \mathscr{F}_c^{-1}\{F_c(s)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ \frac{1}{2}, & t = 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์ของ $f(t)$

วิธีทำ จาก $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$

$$= \int_0^{3} f(t)\sin\omega t dt + \int_3^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$= \int_0^{3} (1)\sin\omega t dt + \int_3^{\infty} (0)\sin\omega t dt$$

$$= -\frac{\cos\omega t}{\omega}\Big|_0^3$$

$$= \frac{1-\cos 3\omega}{\omega}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(t) = e^{-at}$ เมื่อ $t > 0, a > 0$ จงหา

1. ผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์ของ $f(t)$
2. ผลการแปลงฟูริเยร์โคไซน์ของ $f(t)$

วิธีทำ 1. จาก $F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt$

$$= \int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt$$

พิจารณา $\int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt = -\frac{e^{-at}\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{a}\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t dt$

$$= \frac{\omega}{a}\left[-\frac{e^{-at}\cos\omega t}{a}\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{a}\int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt\right]$$

$$\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt = \frac{\omega}{a^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-at}\sin\omega t dt = \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\therefore\ F_s(\omega) = \mathscr{F}_s\{e^{-at}\} = \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

2. จาก $F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt$

$$= \int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t dt$$

จะได้ $\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t dt = \frac{-e^{-at}\cos\omega t}{a}\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{a}e^{-at}\sin\omega t dt$

$$= \frac{1}{a} - \frac{\omega}{a}\left[-\frac{e^{-at}\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{a}\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t dt\right]$$

$$\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\int_0^\infty e^{-at}\cos\omega t dt = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at}\cos\omega t dt = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

ดังนั้น $F_c(\omega) = \mathscr{F}_c\{e^{-at}\} = \frac{a}{a^2+\omega^2}$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega^2+1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}, t > 0$

วิธีทำ จาก $\mathscr{F}_c\{e^{-at}\} = \frac{a}{a^2+\omega^2}$

$$\mathscr{F}_c\{e^{-t}\} = \frac{1}{\omega^2+1}$$

และ $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega$

ให้ $f(t) = e^{-t}$

ดังนั้น $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega^2+1} d\omega = e^{-t}$

นั่นคือ $\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\omega^2+1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาอินทิกรัลฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

1.1 $$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1 \\ -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < \infty \end{cases}$$

1.2 $$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leqslant -1 \\ 1+t, & -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1-t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0, & 1 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

2. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$ เมื่อ

1.1 $$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & t \leqslant 0 \\ e^{-at}, & t \geqslant 0 \end{cases}, a > 0$$

1.2 $$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < \infty \end{cases}$$

1.3 $$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & t^2 \leqslant 1 \\ 0, & t^2 \geqslant 1 \end{cases}$$

1.4 $$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t^2 \leqslant \pi^2 \\ 0, & t^2 \geqslant \pi^2 \end{cases}$$

1.5 $$f(t) = \frac{1}{t^2+4}$$

3. จงแสดงว่า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$$

และ $$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega) \cos \omega t d\omega$$

4. จากข้อ 2(1.3) จงหาค่าของ $\int_0^{\infty} \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^3} \right) \cos \frac{t}{2}\, dt$

5. ถ้า f(t) เป็นส่วนจินตภาพแท้ (pure imaginary) นั่นคือ

$$f(t) = ig(t)$$

เมื่อ g(t) เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่าส่วนจริง และส่วนจินตภาพของ $F(\omega)$ คือ

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt$$

และ

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt$$

และแสดงว่า $R(\omega)$ และ $X(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่ และฟังก์ชันคู่ตามลำดับ

6. ให้ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & t \geqslant 1 \end{cases}$ จงหา

6.1 ผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์

6.2 ผลการแปลงฟูริเยร์โคไซน์

7. จงใช้ผลข้อ 6 หาค่าของ

7.1 $\int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right)^2 dt$

7.2 $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2}\, dt$

8. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ไซน์ของ e^{-t}, $t \geqslant 0$ และแสดงว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{t \sin mt}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$$

9. จากข้อ 1(1.2) จงแสดงว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

2.4 คุณสมบัติของผลการแปลงฟูริเยร์

จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ สรุปคุณสมบัติต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. **คุณสมบัติการเป็นเชิงเส้น** (linearity property)

ถ้า $F_1(\omega) = \mathscr{F}\{f_1(t)\}$ และ $F_2(\omega) = \mathscr{F}\{f_2(t)\}$ a_1, a_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง (arbitrary constant) จะได้

$$\mathscr{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

พิสูจน์ จากผลการแปลงฟูริเยร์

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} e^{-i\omega t} dt \\
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)
\end{aligned}$$

2. **คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล** (Scaling property)

ถ้า a เป็นค่าคงตัวจริง (real constant) และ $F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$ จะได้

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

พิสูจน์ สำหรับ $a > 0$

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt$$

ให้ $at = u$

$adt = du$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du \\
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)t} dt \\
&= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

สำหรับ $a < 0$ ให้ $at = u$ จะได้ $adt = d\omega$

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)u}\,du$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

ดังนั้น $\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

2.1 ถ้า $\mathscr{F}\{f(at)\} = F(\omega)$ จะได้

$$\mathscr{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$$

พิสูจน์ จาก $\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

เมื่อ $a = -1$

$$\mathscr{F}\{f(-t)\} = \frac{1}{|-1|}F(-\omega)$$

$$= F(-\omega)$$

3. คุณสมบัติการเลื่อน 1 หรือ Time – shifting property

ถ้า $\mathscr{F}\{f(at)\} = F(\omega)$ และ t_0 เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

พิสูจน์

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt$$

ให้ $t - t_0 = u$

$dt = du$

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(t_0+u)}du$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du$$

$$= e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

4. คุณสมบัติการเลื่อน 2 หรือ frequency – shifling property

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ω_0 เป็นค่าคงตัวจริง จะได้

$$\mathscr{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

พิสูจน์ จากนิยาม $\mathscr{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\}e^{-i\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(\omega_0-\omega)t}dt$$

$$= F(\omega-\omega_0)$$

5. **คุณสมบัติสมมาตร** (Symmetry property)

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ **จะได้**

$$\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

พิสูจน์ จากนิยาม $\mathscr{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

แทนค่า t ด้วย $-t$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก t เป็น ω จะได้

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt = \mathscr{F}\{F(t)\}$$

6. **คุณสมบัติผลการแปลงฟูริเยร์ของอนุพันธ์ของ** $f(t)$

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ และ $f(t)$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ t เข้าใกล้ $\pm\infty$ **จะได้**

$$\mathscr{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega) = i\omega \ \mathscr{F}\{f(t)\}$$

พิสูจน์ จากนิยาม $\mathscr{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = e^{-i\omega t}$ และ $dv = f'(t)$ **จะได้**

$$du = (-i\omega)e^{-i\omega t}dt \quad \text{และ } v = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

เมื่อ $t \to \pm\infty$ จะได้ $f(t) \to 0$

ดังนั้น $$\mathscr{F}\{f'(t)\} = i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= i\omega\, F(\omega)$$

ในทำนองเดียวกันถ้าผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f''(t), f'''(t), \ldots$ หาค่าได้ จะได้สูตรทั่วไปคือ

$$\mathscr{F}\{f^n(t)\} = (i\omega)^n F(\omega) = (i\omega)^n \mathscr{F}\{f(t)\} \quad n = 1,2,\ldots$$

ตัวอย่าง ถ้า $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ และ $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \dfrac{1}{a+i\omega}$

จงหา $\mathscr{F}\{f(t-2)\}$

วิธีทำ จากคุณสมบัติการเลื่อน 1

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

แทนค่า $$\mathscr{F}\{f(t-2)\} = F(\omega)e^{-2i\omega}$$

$$= \frac{e^{-2i\omega}}{a+i\omega}$$

ตัวอย่าง ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ จงหาการผลแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)\sin\omega_0 t$

วิธีทำ เพราะว่า $\sin\omega_0 t = \dfrac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$

ดังนั้น $$\mathscr{F}\{f(t)\sin\omega_0 t\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2i}f(t)e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i}f(t)e^{-i\omega_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\mathscr{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} - \frac{1}{2i}\mathscr{F}\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\}$$

$$= \frac{1}{2i}F(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2i}F(\omega+\omega_0)$$

$$= \frac{i}{2}\left[F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)\right]$$

ตัวอย่าง ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ จงแสดงว่า

$$\mathscr{F}\{-itf(t)\} = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

วิธีทำ เพราะว่า $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[-it]e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{-itf(t)\}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \mathscr{F}\{itf(t)\}$$

2.5 ผลการประสาน (Convolution)

ในการหาค่าผลการแปลงฟูริเยร์ จะเห็นว่าอาจจะต้องอาศัยการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันหรือตัวแปรอื่น เพื่อจะหาค่าได้ ดังนั้น อาจจะต้องอาศัยคุณสมบัติของผลการประสาน

นิยาม ให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ **ผลการประสาน** ของฟังก์ชัน $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ คือ $f(t)$ และ

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$

และใช้สัญลักษณ์

$$f(t) = f_1(t)*f_2(t)$$

นั่นคือ $f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$

จะเห็นว่า ถ้า $f_1(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$ และ $f_2(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$

จะได้ $f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx$

ตัวอย่าง จงหาผลการประสานของ e^{-t} และ e^{5t} เมื่อ $t > 0$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
e^{-t}*e^{5t} &= \int_0^t e^{-x}\cdot e^{5(t-x)}\,dx \\
&= e^{5t}\int_0^t e^{-6x}dx \\
&= e^{5t}\left[\frac{e^{-6x}}{-6}\Big|_0^t\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[e^{5t}-e^{-t}\right]
\end{aligned}
$$

คุณสมบัติของผลการประสาน

1. $f_1(t)*f_2(t) = f_2(t)*f_1(t)$ กฎการสลับที่ (commutative law)
2. $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t) = f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$ กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)
3. $f_1(t)*[kf_2(t)] = k[f_1(t)*f_2(t)]$ k เป็นค่าคงตัว
4. $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)] = [f_1(t)*f_2(t)]+[f_1(t)*f_3(t)]$

พิสูจน์ 1. จากนิยาม $f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $t-x = y$

$dx = -dy$

$$
\begin{aligned}
f_1(t)*f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y)f_2(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)f_1(t-y)dy \\
&= f_2(t)*f_1(t)
\end{aligned}
$$

2. ให้ $g(t) = f_1(t)*f_2(t)$

และ $h(t) = f_2(t)*f_3(t)$

ดังนั้น $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(t-y)dy$

และ $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)f_3(t-z)dz$

ในที่นี้ต้องการแสดงว่า

$$g(t)*f_3(t) = f_1(t)*h(t)$$

พิจารณา
$$g(t)*f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_3(t-x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy\right]f_3(t-x)dx$$

แทนค่า $z = x-y$ และสลับอันดับของการอินทิเกรต จะได้

$$g(t)*f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)f_3(t-y-z)dz\right]dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)h(t-y)dy$$
$$= f_1(t)*h(t)$$

นั่นคือ $\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t) = f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$

3. $$f_1(t)*\left[kf_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\left[kf_2(t-x)\right]dx$$
$$= k\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$$
$$= k\left[f_1(t)*f_2(t)\right]$$

4. $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)[f_2(t-x)+f_3(t-x)]\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_3(t-x)dx$$

$$= f_1(t)*f_2(t) + f_1(t)*f_3(t)$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 (The time convolution theorem)

ถ้า $\mathscr{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ และ $\mathscr{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ **จะได้**

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

พิสูจน์ จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f_1(t)*f_2(t)$ จะได้

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx\right]e^{-i\omega t}dt$$

สลับอันดับของการอินทิเกรต จะได้

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-i\omega t}dt\right]dx$$

จากคุณสมบัติการเลื่อน 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-i\omega t}dt = F_2(\omega)e^{-i\omega x}$$

ดังนั้น $\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)F_2(\omega)e^{-i\omega x}dx$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-i\omega x}dx\right]F_2(\omega)$$

$$= F_1(\omega)F_2(\omega)$$

ทฤษฎีบทที่ 2.5 (The frequency convolution theorem)

ถ้า $\mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = f_1(t)$ และ $\mathscr{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = f_2(t)$ จะได้

$$\mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)*F_2(\omega)\} = 2\pi f_1(t)f_2(t)$$

หรือ
$$\mathscr{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy$$

พิสูจน์ จากนิยาม

$$\mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)*F_2(\omega)\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy\right\}e^{-i\omega t}d\omega$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $\omega - y = x$ และสลับอันดับของการอินทิเกรต

$$\mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)*F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{i(x+y)t}dx\right\}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)e^{iyt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{ixt}dx\right\}dy$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

$$= 2\pi[f_1(t)f_2(t)]$$

นั่นคือ
$$\mathscr{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$$

ตัวอย่าง จงใช้ผลการประสานหาค่าของ $f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)(i\omega-3)}\right\}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง $\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = e^{-at},\ t > 0, a > 0$

หรือ
$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = e^{-at}u(t)$$

เมื่อ $$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } t < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } t > 0 \end{cases}$$

$u(t)$ **คือฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย**

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega-3}\right\} = e^{3t}u(t)$$

$$f(t) = e^{-t}u(t)*e^{3t}u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}u(x)e^{3(t-x)}u(t-x)dx$$

$$= e^{3t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)u(t-x)e^{-4x}dx$$

เพราะว่า $u(x) = 0, \quad x < 0$

และ $u(t-x) = 0, \quad t < x$

ดังนั้น $$u(x)u(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } t < x < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < t \end{cases}$$

ดังนั้น $$f(t) = e^{3t}\int_0^t e^{-4x}dx$$

$$= e^{3t}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\Big|_0^t\right]$$

$$= e^{3t}\left[\frac{1}{4} - \frac{e^{-4t}}{4}\right]$$

$$= \left(\frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-t}}{4}\right)u(t)$$

ตัวอย่าง **ให้** $\mathscr{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ **และ** $\mathscr{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ **จงพิสูจน์ว่า**

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega$

เมื่อ $f_2^*(t)$ คือ จำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $f_2(t)$

พิสูจน์ 1. จากทฤษฎีบทที่ 2.4 "time convolution" จะได้

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

หรือ $$f_1(t)*f_2(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)F_2(\omega)\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

2. จากทฤษฎีบทที่ 2.5 "frequency convolution" จะได้

$$\mathscr{F}^{-1}\{F_1(\omega)*F_2(\omega)\} = 2\pi f_1(t)\cdot f_2(t)$$

$$F_1(\omega)*F_2(\omega) = 2\pi\mathscr{F}\{f_1(t)\cdot f_2(t)\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(\omega-x)dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t}dt$$

ให้ $\omega = 0$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)F_2(-x)dx$$

เปลี่ยนตัวแปร

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

พิจารณา $$\mathscr{F}\{f_2^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_2(t)e^{i\omega t}\right]^*dt$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{i\omega t}dt\right]^*$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i(-\omega)t}dt\right]^*$$

$$= F_2^*(-\omega)$$

แทนค่า $f_2(t)$ ด้วย $f_2^*(t)$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(-(-\omega))d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega$$

2.6 ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (Parseval's Theorem)

จากตัวอย่างข้างต้น จะสรุปได้ดังนี้

ถ้า $\mathscr{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ และ $\mathscr{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(t)f_2(t)\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

และถ้า $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะได้

$$F_2(-\omega) = F_2^*(\omega)$$

ดังนั้น
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(t)f_2(t)\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega$$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล

ถ้า $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2d\omega \qquad \text{..........(2.5.1)}$$