บทที่ 2
ผลการแปลงฟูริเยร์
(Fourier transform)

ในบทที่ 1 ได้ศึกษาถึงการกระจายฟังก์ชัน f(x) มีคาบ 2L เป็นอนุกรมฟูริเยร์ ในบทนี้จะกล่าวถึงในกรณีที่ L เข้าใกล้ ∞ ซึ่งจะทำให้เราพิจารณาถึงอินทิกรัลฟูริเยร์ (Fourier integral) โดยใช้การกระจาย f(x) เป็นอนุกรมฟูริเยร์ก่อน นอกจากนั้นยังจะศึกษาถึงการประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์

2.1 อินทิกรัลฟูริเยร์ (Fourier integrals)

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติเรียบเป็นช่วง ๆ (piecewise smooth) บนช่วง $-\infty < t < \infty$ ดังนี้และสามารถแทน f(t) ในช่วง $-L < t < L$ ด้วยอนุกรมฟูริเยร์

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad \text{..........(2.1.1)}$$

เมื่อ $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

แทนค่า a_n, b_n ใน (2.1.1)

$$f(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right) + \left(\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi t}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)dx$$

ถ้า f(x) อินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บน $(-\infty, \infty)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ จะได้

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| = \frac{1}{2L}\left|\int_{-L}^{L} f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

เมื่อ $L \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \to 0$

พิจารณา f(t) เมื่อ $L \to \infty$ จะได้

$$f(t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}(t-x)dx$$

ให้

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

$$I(\omega; L) = \int_{-L}^{L} f(x) \cos \omega(t-x)dx$$

ดังนั้น

$$f(t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I(\omega_n; L)\Delta\omega$$

เมื่อ $L \to \infty$ และ $\Delta\omega \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(\omega_n; L)\Delta\omega = \int_0^{\infty} I(\omega; L)d\omega$$

ดังนั้น $f(t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} I(\omega; L)d\omega$

$$= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(x) \cos \omega(t-x)dx\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x)dx\right] d\omega$$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 อินทิกรัลฟูริเยร์ (Fourier Integral Theorem)

ถ้า f(t) นิยามได้บน $-\infty < t < \infty$ และมีคุณสมบัติเรียบเป็นช่วง ๆ (piecewise smooth) และอินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บน $(-\infty, \infty)$ แล้ว

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx\,d\omega$$

เรียกสมการนี้ว่าสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์

ถ้า f มีความต่อเนื่องทุกค่า t บน $(-\infty, \infty)$ จะได้

$$f(t+) = f(t-) = f(t)$$

สูตรอินทิกรัลฟูริเยร์ คือ

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx\,d\omega$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

วิธีทำ จากสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx\,d\omega$$

พิจารณา $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx$

$$+ \int_{1}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos\omega(t-x)\,dx$$

$$= \frac{\sin\omega(t-x)}{-\omega}\Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left[\sin\omega(t-1) - \sin\omega(t+1)\right]$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left[\sin\omega t\cos\omega - \cos\omega t\sin\omega - (\sin\omega t\cos\omega + \cos\omega t\ \sin\omega)\right]$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left[-2\cos\omega t\sin\omega\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\cos\omega t\ \sin\omega$$

ดังนั้น $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega t\sin\omega}{\omega}\,d\omega$

จะเห็นว่าเมื่อ $t = 0$ **จะได้** $f(t) = 1$

นั่นคือ $\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่จะได้

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega t\left[\int_0^\infty f(x)\ \sin\omega x dx\right]d\omega$$

วิธีทำ จากสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dxd\omega$$

พิจารณา $\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\cos\omega(t-x)dx + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$

$$= -\int_0^{-\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dx + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= -\int_0^{-(-\infty)} f(-x)\cos\omega(t+x)d(-x) + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= -\int_0^\infty f(x)\cos\omega(t+x)dx + \int_0^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)\big[(\cos\omega t\cos\omega x + \sin\omega t\sin\omega x) -$$

$$(\cos\omega t\cos\omega x - \sin\omega t\sin\omega x)\big]dx$$

$$= 2\sin\omega t\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$$

ดังนั้น $$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega t\Big[\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx\Big]d\omega$$

2.2 ผลการแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transforms)

จากสูตรอินทิกรัลฟูริเยร์

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega(t-x)dx\Big]d\omega$$

เพราะว่า $\cos\omega(t-x) = \frac{1}{2}\big[e^{i\omega(t-x)} + e^{-i\omega(t-x)}\big]$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\omega(t-x)}dxd\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega(t-x)}dxd\omega$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรให้ $\omega = -\lambda,\ d\omega = -d\lambda$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega(t-x)}dxd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\lambda(t-x)}dxd\lambda$$

เพราะฉะนั้น $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\omega(t-x)}dxd\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\lambda(t-x)}dxd\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\omega(t-x)}dxd\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right\}e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{..........(2.2.1)}$$

เรียก f(t) ในสมการ (2.2.1) ว่า **อินทิกรัลฟูริเยร์ในรูปชี้กำลัง**

ให้
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \text{..........(2.2.2)}$$

ดังนั้น
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{..........(2.2.3)}$$

นิยาม เรียก $F(\omega)$ จาก (2.2.2) ว่า **ผลการแปลงฟูริเยร์ของ** f(t) (Fourier transform of f(t)) และเรียก f(t) จาก (2.2.3) ว่า **ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันของ** $F(\omega)$ (Inverse Fourier transform of $F(\omega)$) และใช้ตัวดำเนินการของผลการแปลงฟูริเยร์คือ $\mathscr{F}$ ตัวดำเนินการของผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันคือ $\mathscr{F}^{-1}$

นั่นคือ $F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

และ $f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ f(t) เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| \geqslant a \end{cases}$

วิธีทำ จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ของ f(t)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-a}^{a} f(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{a}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i} \right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin \omega a$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

เมื่อ $a > 0$

วิธีทำ จากนิยามผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-at})e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt$$

$$= \left. -\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a+i\omega}$$

นั่นคือ $\mathscr{F}\{e^{-at}\} = \frac{1}{a+i\omega}, \quad t > 0, a > 0$

หรือ $\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = e^{-at}, \quad t > 0, a > 0$

พิจารณาผลการแปลงฟูริเยร์ของ **ฟังก์ชันอิมพัลซ์หนึ่งหน่วย** (unit impluse function) $\delta(t)$ หรือ **ฟังก์ชันเดลต้า** (delta function) ซึ่งนิยามโดย

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

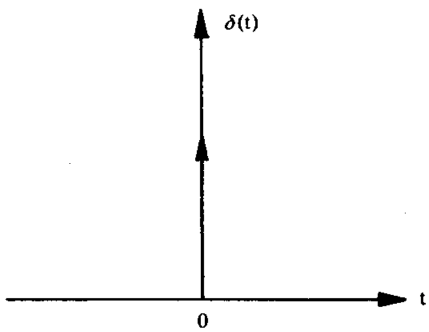
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt$$

$$= 1, \ \varepsilon > 0$$

จากนิยาม $\delta(t)$ จะเห็นว่า $\delta(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นที่ $t = 0$ ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์

ดังนั้นทำให้ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt$ หาค่าได้

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $\delta(t)$ ซึ่งเขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 2.1

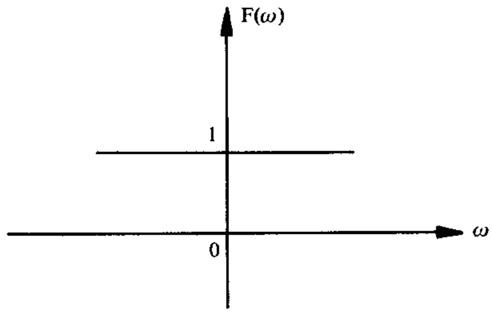
วิธีทำ จากนิยาม $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$F(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= e^{-i\omega t}\big|_{t=0}$$

$$= 1$$

กราฟของผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันอิมพัลซ์หนึ่งหน่วยดังรูป 2.2



รูป 2.2

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega$

วิธีทำ จาก $\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}\{1\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega$$

พิจารณา **ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย** (unit step function) ซึ่งนิยามโดย

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่าในการหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ u(t) โดยใช้นิยามนั้นหาไม่ได้ เพราะว่า

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$F(u(t)) = \int_{0}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} (1)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_0^{\infty}$$

$$= \left. \frac{\cos \omega t - i \sin \omega t}{-i\omega} \right|_0^{\infty}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้

ในการหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $u(t)$ จะต้องอาศัยคุณสมบัติของการแปลงฟูริเยร์และคุณสมบัติของฟังก์ชัน $\delta(t)$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้

1. $F(\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$

2. $f(t) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega$

วิธีทำ 1. จากนิยาม $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

แต่ $e^{-i\omega t} = \cos(i\omega)t + i \sin (i\omega)t$

$= \cos \omega t - i \sin \omega t$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

เพราะว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $f(t) \cos \omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 0$$

และ $f(t) \sin \omega t$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$F(\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

2. จากนิยาม $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t d\omega$$

จาก $F(\omega) = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$

จะแสดงว่า $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$F(-\omega) = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(-\omega)t dt$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$= -F(\omega)$$

ดังนั้น $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

และ $F(\omega)\sin\omega t$ เป็นฟังก์ชันคู่

$F(\omega)\cos\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่

นั่นคือ $f(t) = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t d\omega$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

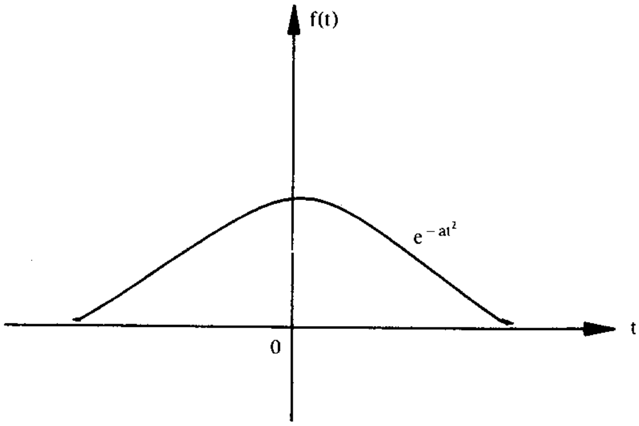
$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

และ $\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t d\omega$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = e^{-at^2}, a > 0$ คือ

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{e^{-at^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$$

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(t) = e^{-at^2}, a > 0$ คือ



รูป 2.1

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{e^{-at^2}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t^2+\frac{i\omega t}{a}\right)}dt$$

พิจารณาเทอม $t^2 + \frac{i\omega t}{a}$ $= \left\{t^2+\frac{i\omega t}{a}+\left(\frac{i\omega}{2a}\right)^2\right\}-\left(\frac{i\omega}{2a}\right)^2$

$$= \left[t+\frac{i\omega}{2a}\right]^2+\frac{\omega^2}{4a^2}$$

คูณตัวถูกอินทิเกรตด้วย $e^{-\omega^2/4a^2}$ จะได้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4a^2}e^{-a\left[t+\frac{i\omega}{2a}\right]^2}dt$$

$$= e^{-\omega^2/4a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\sqrt{a}\left[t+\frac{i\omega}{2a}\right]\right\}^2}dt$$

เปลี่ยนตัวแปรใหม่ โดยให้

$$\sqrt{a}\left[t + \frac{i\omega}{2a}\right] = y$$

$$\sqrt{a}dt = dy$$

จะได้ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\sqrt{a}\left[t+\frac{i\omega}{2a}\right]\right\}^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$

ให้ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$

ดังนั้น $F(\omega) = \mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right]$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$$

ถ้า $a = \frac{1}{2}$ จะได้

$$\mathscr{F}\left[e^{-t^2/2}\right] = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$$

หมายเหตุ **ฟังก์ชัน** $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเกาส์เซียน** (Gaussian function)

ผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t)$ ในรูปจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง (real function)

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$$

เขียนได้ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

เมื่อ $R(\omega)$ **คือส่วนจริง** (real part) **และ** $X(\omega)$ **คือ ส่วนจินตภาพ** (imaginary part)

ในการหา $R(\omega)$ และ $X(\omega)$ **จะหาได้จากนิยามของ** $F(\omega)$ และการแทนค่า

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

จากสูตร $\displaystyle F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

ดังนั้น $R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

พิจารณา $R(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega)t dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$= R(\omega)$$

ดังนั้น $R(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่

พิจารณา $X(-\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin (-\omega)t dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$= -X(\omega)$$

นั่นคือ $X(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

นิยาม ให้ $F^*(\omega)$ เป็น **จำนวนเชิงซ้อนสังยุค** (complex conjugate) **ของ** $F(\omega)$

ดังนั้น $F^*(\omega) = R(\omega) - iX(\omega)$

จะเห็นว่า $F^*(\omega) = R(\omega) - iX(\omega)$

$$= R(-\omega) + iX(-\omega)$$

$$= F(-\omega)$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2

$f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง (real function) ก็ต่อเมื่อ $F(-\omega) = F^*(\omega)$

พิสูจน์ $(\rightarrow)$ ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง ได้แสดงแล้วว่า $F(-\omega) = F^*(\omega)$

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $F(-\omega) = F^*(\omega)$

จาก
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)+iX(\omega)\right]\left[\cos\omega t + i\sin\omega t\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)\cos\omega t - X(\omega)\sin\omega t\right]d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t\right]d\omega$$

ให้
$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)\cos\omega t - X(\omega)\sin\omega t\right]d\omega$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t\right]d\omega$$

$$F(-\omega) = R(-\omega)+iX(-\omega)$$
$$F^*(\omega) = R(\omega)-iX(\omega)$$

เพราะว่า $F(-\omega) = F^*(\omega)$ นั่นคือ

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad \text{และ} \quad X(-\omega) = -X(\omega)$$

นั่นคือ $R(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $X(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $R(\omega)\sin\omega t$ และ $X(\omega)\cos\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่

$\therefore$ $R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $f_2(t) = 0$

ดังนั้น $f(t) = f_1(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง