สำหรับ $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่

ให้
$$t = -x$$
$$dt = -dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(-x)dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

เพราะว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $f(-t) = f(t)$

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(t)dt$$

ดังนั้น
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$
$$= 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

ข้อ 5 พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 4

ข้อสังเกต การคูณฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่คล้ายกับการคูณของจำนวนที่มีเครื่องหมายบวกและลบ คือ
$$(a)(a) = a^2$$
$$(-a)(-a) = a^2$$
และ $(a)(-a) = -a^2$

พิจารณาฟังก์ชัน f(t) ใด ๆ จะแสดงว่า f(t) สามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันส่วนประกอบ (component functions) 2 ฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันหนึ่งเป็นฟังก์ชันคู่และอีกฟังก์ชันหนึ่งเป็นฟังก์ชันคี่

เพราะว่า
$$f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t) - f(-t) + f(t)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] + \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

ให้ $f_e(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$

และ $f_0(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$

ดังนั้น $f(t) = f_e(t)+f_0(t)$

จะได้ว่า $f_e(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

เพราะว่า $f_e(-t) = \frac{1}{2}\left[f(-t)+f(t)\right]$

$= f_e(t)$

และ $f_0(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

เพราะว่า $f_0(-t) = \frac{1}{2}\left[f(-t)-f(t)\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$

$= -f_0(t)$

นิยาม ถ้า $f(t)$ เขียนได้ในรูปของ

$$f(t) = f_e(t)+f_0(t)$$

$f_e(t)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันส่วนประกอบคู่** และ $f_e(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$

$f_0(t)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันส่วนประกอบคี่** และ $f_0(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ $f(t)$ เมื่อ $f(t) = e^t$

วิธีทำ เพราะว่า $f_e(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^t+e^{-t}\right]$

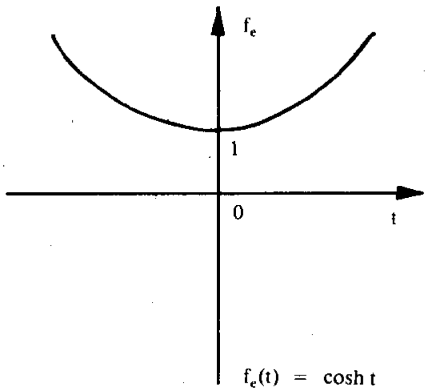
$= \cosh t$

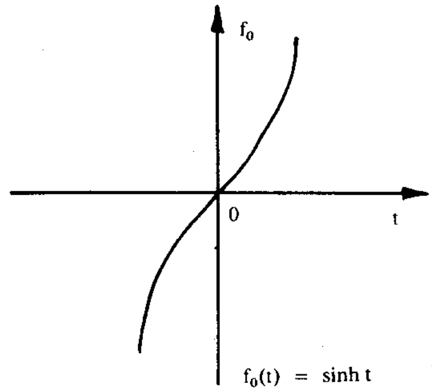
และ $f_0(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^t-e^{-t}\right]$

$= \sinh t$

กราฟของ $f_e(t)$ และ $f_0(t)$ คือ





รูป 1.7

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันส่วนประกอบคู่และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ $f(t) = t\sin t - \sin 2t$

วิธีทำ จาก

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t\sin t - \sin 2t \\
f(-t) &= (-t)\sin(-t) - \sin 2(-t) \\
&= t\sin t + \sin 2t \\
f_e(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sin t - \sin 2t + t\sin t + \sin 2t\right] \\
&= t\sin t \\
f_0(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sin t - \sin 2t - t\sin t - \sin 2t\right] \\
&= -\sin 2t
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

   1.1 $2x - x^2 + x^3$

   1.2 $2x^6 - 4x^2 + 5$

   1.3 $x \sin x$

   1.4 $e^x + e^{-x}$

   1.5 $3e^x$

   1.6 $(\cos x)^2$

   1.7 $\tan 3x$

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

   2.1 $f(t) = \begin{cases} 3, & -4 < t < 0 \\ -3, & 0 < t < 4 \end{cases}$ มีคาบ $= 8$

   2.2 $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ มีคาบ $= 2\pi$

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

4. ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ใน $(-a, a)$ จงแสดงว่า
   $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่
   และ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

5. จงหาฟังก์ชันส่วนประกอบคู่และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ

   5.1 $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

   5.2 $f(t) = \dfrac{t+2}{t-2}$

   5.3 $f(t) = t\cos t - \cos 3t$

1.6 อนุกรมฟูริเยร์ไซน์และอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

(Fourier sine and cosine series)

1. เมื่อ f(x) **เป็นฟังก์ชันคี่** ในช่วง $[-L, L]$ จากอนุกรมฟูริเยร์ (1.4.1)

จะได้ $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

และ $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

เพราะว่า $\cos\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่

และ $\sin\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ จะได้

$a_n = 0$ ทุกค่า n

และ $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ จะมีแต่เทอมไซน์เท่านั้น และเรียกว่าเป็น **อนุกรมฟูริเยร์ไซน์**

คือ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leqslant x \leqslant L$

เมื่อ $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1,2,\ldots$

2. เมื่อ f(x) เป็น **ฟังก์ชันคู่** ในช่วง $[-L, L]$ พิจารณา a_n และ b_n เช่นเดียวกัน จะได้

$f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่

และ $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 0,1,2,\ldots$

และ $b_n = 0$ ทุกค่า n

อนุกรมฟูริเยร์จึงมีแต่เทอมโคไซน์ และเรียกว่า **อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ $$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = |x|$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x)$ จึงมีแต่เทอมโคไซน์

นั่นคือ $b_n = 0$ ทุกค่า n

และ $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos 0\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \pi$$

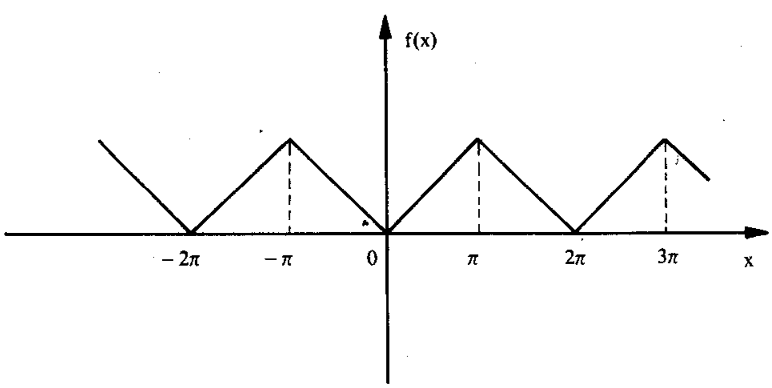
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

ดังนั้นเมื่อ $-\pi < x < \pi$ จะได้

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

กราฟของ $f(x) = |x|$ ดังรูป



รูปที่ 1.8

ตัวอย่าง จากตัวอย่างในหัวข้อ 1.3 กระจายเป็นอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(x) = |\sin x|$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $b_n = 0$ ทุกค่า n

และ $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2\left[1+(-1)^n\right]}{\pi(1-n^2)} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4}{\pi}$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = 2x, \quad -2 < x < 2$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = 2x$ เป็นฟังก์ชันคี่ใน $-2 < x < 2$

ดังนั้น $a_n = 0$ ทุกค่า n

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= 2\left[x\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^2$$

$$= 2\left(\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\right)$$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ของ $f(x)$ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right)$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ของฟังก์ชันนิยามโดย

$$f(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } -2 < x < 2$$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $b_n = 0$ ทุกค่า n

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2 dx$$

$$= \frac{8}{3}$$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

แบบฝึกหัด 1.4

จงเขียนกราฟและหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

3. $f(x) = 1 + |x|, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

4. $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad -1 < x < 1$

5. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

   และใช้ผลนี้แสดงว่า $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

6. จงหาอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^4, \quad -1 < x < 1$

7. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ไซน์ของฟังก์ชัน $f(x) = x, \quad -1 < x < 1$

1.7 การกระจายครึ่งช่วง (Half – range expansion)

ฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ ซึ่งนิยามบนครึ่งช่วงคือ $0 \leqslant x \leqslant L$ สามารถกระจายฟังก์ชันให้เป็นอนุกรมฟูริเยร์ไซน์ หรืออนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ได้ทั้ง 2 รูป คือ

อนุกรมฟูริเยร์ไซน์แบบครึ่งช่วง (Half range Fourier sine series)

ในที่นี้เราต้องการกระจาย $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L$ ให้เป็นอนุกรมฟูริเยร์ไซน์ เราจะขยายช่วงของ $f(x)$ ใน $-L \leqslant x \leqslant 0$ ซึ่งทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่บน $-L \leqslant x \leqslant L$

นั่นคือ ให้ $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \\ -f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x)$ จะมีแต่เทอมไซน์อย่างเดียว ค่า a_n, b_n ก็หาได้จาก

$a_n = 0$ ทุกค่า n

และ $$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

จะได้ $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L$$

อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์แบบครึ่งช่วง (Half range Fourier cosine series)

ในทำนองเดียวกันถ้าต้องการกระจาย $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ จะขยายช่วงของ $f(x)$ ในช่วง $-L \leqslant x \leqslant 0$ ซึ่งทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่บน $-L \leqslant x \leqslant L$

ให้ $$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \\ f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

จะได้อนุกรมของ $f(x)$ มีแต่เทอมโคไซน์อย่างเดียว

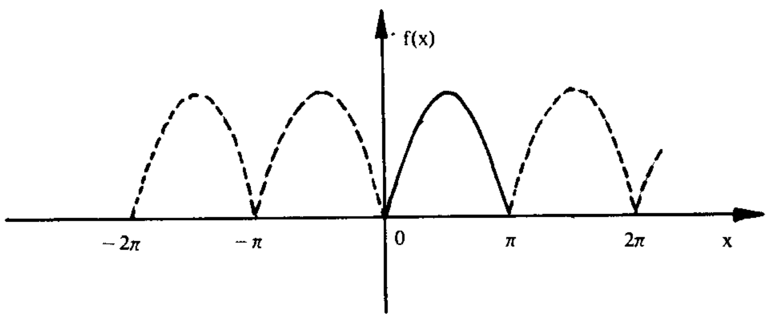
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

ตัวอย่าง จงกระจาย $f(x) = \sin x,\ 0 < x < \pi$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

วิธีทำ ในที่นี้ต้องการกระจาย $f(x)$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

ดังนั้นในช่วง $-\pi < x < 0$ จะให้ $f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$ เพื่อให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ โดยมีคาบเท่ากับ 2π



รูป 1.9

ดังนั้น $b_n = 0$ และ $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx = \dfrac{4}{\pi}$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= -\frac{2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \quad \text{เมื่อ } n \neq 1$$

เมื่อ $n = 1, \quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$$

ดังนั้น $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1} \cos nx$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \ldots\right)$$

ตัวอย่าง จงกระจาย $f(x) = x, \; 0 < x < 2$ เป็นอนุกรม

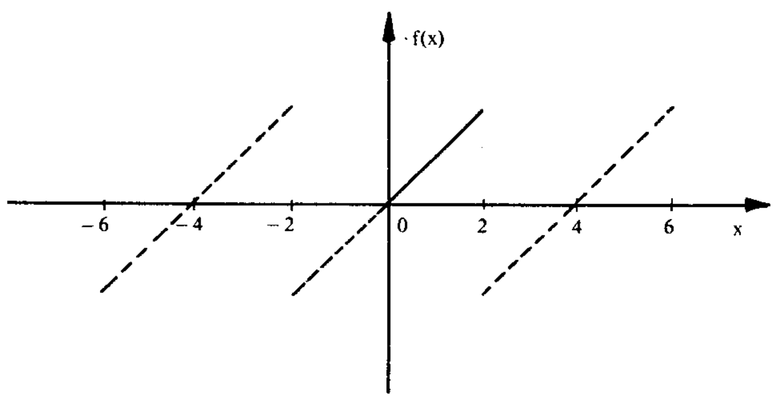
1. อนุกรมฟูริเยร์ไซน์
2. อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

วิธีทำ 1. อนุกรมฟูริเยร์ไซน์ กระจาย $f(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคี่ มีคาบเท่ากับ 4

ดังนั้น $2L = 4, \quad L = 2$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ -(-x), & -2 < x < 0 \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังรูป



รูป 1.10

จะได้ $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^2$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

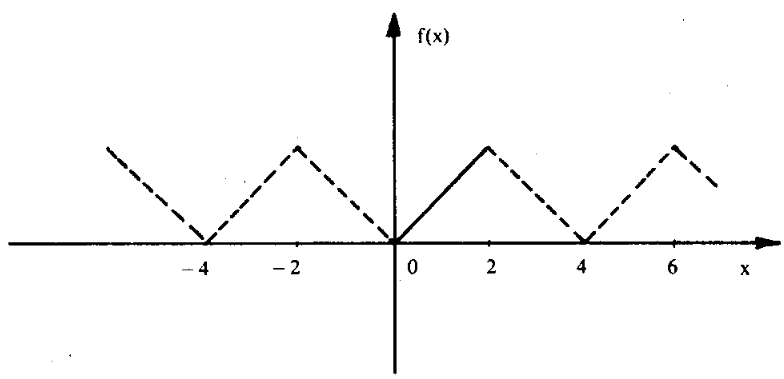
ดังนั้น $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \dots\right)$$

2. อนุกรมฟูริเยร์โคไซน์ กระจาย f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ -x, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 1.11

ดังนั้น $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[(x)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) \right]\Big|_0^2$$

$$= \frac{-4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{เมื่อ } n \neq 0$$

เมื่อ $n = 0, \quad a_0 = \int_0^2 x\,dx$

$$= 2$$

ดังนั้น $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

ข้อสังเกต การขยายช่วงฟังก์ชัน $f(x), \; -L < x < 0$ นั้นเพื่อช่วยในการเขียนกราฟเท่านั้น แต่มิได้นำมาคำนวณหาค่า a_n หรือ b_n เลย

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามได้บนช่วง $0 \leqslant x \leqslant L$ นิยามฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ ดังนี้

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \\ -f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \\ f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า $g(x)$ และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคู่ ตามลำดับบนช่วง $-L \leqslant x \leqslant L$

2. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x \quad , & 0 < x < 4 \\ 8-x, & 4 < x < 8 \end{cases}$

เป็นอนุกรม

2.1 ฟูริเยร์ไซน์

2.2 ฟูริเยร์โคไซน์

3. จงกระจาย $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์ไซน์

4. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = x^2,\ 0 < x < \pi$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์โคไซน์

5. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอนุกรม (1) ฟูริเยร์โคไซน์ (2) ฟูริเยร์ไซน์

5.1 $f(x) = \pi - x,\quad 0 < x < \pi$

5.2 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

คำตอบ

2. 2.1 $\frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{8}$

2.2 $2 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{8}$

3. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$

4. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

5. 5.1 (1) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(2) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

5.2 (2) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sin nx}{n}$

1.8 อนุกรมฟูริเยร์และการประยุกต์ใช้

(Fourier series and applications)

ในที่นี้จะกล่าวถึงการใช้อนุกรมฟูริเยร์แก้ปัญหาค่าขอบ โดยใช้วิธีการแยกตัวแปรกับปัญหาของสมการความร้อน สมการคลื่น เป็นต้น

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการความร้อน

$$\text{D.E.} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปรให้ $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$XT' = kX''T$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

จะได้ $T' + k\lambda^2 T = 0$ และ $X'' + \lambda^2 X = 0$

$$T = ce^{-k\lambda^2 t}$$

$$X = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

$$u(x,t) = (a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)ce^{-k\lambda^2 t}$$

$$= e^{-k\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

จากเงื่อนไข $u(0,t) = 0$ จะได้

$$Ae^{-k\lambda^2 t} = 0$$

$$A = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$B\sin\lambda L = 0$$

แต่ $B \neq 0$ ดังนั้น $\sin\lambda L = 0$

$$\lambda L = n\pi, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

[$n \neq 0$ เพราะว่า ถ้า $n = 0$ จะทำให้ $X(x) = 0$]

$$u(x, t) = Be^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

เขียนคำตอบเป็นอนุกรมดังนี้

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

จาก $\quad u(x, 0) = f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

นั่นคือ $f(x)$ มีการกระจายแบบอนุกรมฟูริเยร์ไซน์ในช่วง $[0, L]$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

และ $\quad u(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}\right)\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการคลื่น

D.E. $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$

B.C. $\quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0$

I.C. $\quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปรให้ $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$XT'' = c^2X''T$$

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

จะได้ $\quad \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + c^2\lambda^2 T = 0$$

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

$$T(t) = c_3 \cos c\lambda x + c_4 \sin c\lambda x$$

จากเงื่อนไข $u(0, t) = 0$ คือ $X(0) = 0$

$u(L, t) = 0$ คือ $X(L) = 0$

จะได้ $c_1 = 0, \ \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,3,\ldots$

ดังนั้น $$u(x, t) = \left[A\cos\frac{n\pi ct}{L} + B\sin\frac{n\pi ct}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

เขียนคำตอบเป็นอนุกรมจะได้

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ $$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

โดยอนุกรมฟูริเยร์ไซน์

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\frac{n\pi c}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

ถ้ากำหนดให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = 0, \quad 0 < x < 1$

จะได้ $$A_n = 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sin n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{\cos n\pi}{n\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

$$B_n = 0$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos n\pi \cos n\pi ct \sin n\pi x$$

แบบฝึกหัด 1.6

จงแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้อนุกรมฟูริเยร์

1. D.E. $u_t = 2u_{xx}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0$

   B.C. $u(0, t) = u(4, t) = 0$

   I.C. $u(x, 0) = 25x$

2. จงแสดงว่าคำตอบของปัญหาค่าขอบ

   D.E. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

   B.C. $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$

   I.C. $u(x, 0) = f(x)$

   คำตอบคือ $u(x, t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

3. จงหาคำตอบของสมการคลื่น

   D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0$

   B.C. $u(0, t) = u(3, t) = 0$

   I.C. $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 2x - 1$

4. จงหาคำตอบของสมการลาปลาซ

   D.E. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$

   $u(0, y) = u(1, y) = 0$

   $u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3$