บทที่ 1
อนุกรมฟูริเยร์
(Fourier Series)

1.1 ความนำ

ในปี ค.ศ. 1807 ฟูริเยร์ (Fourier) ได้ทำให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่เจาะจง (arbitrary function) สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ (sine) และโคไซน์ (cosine) ผลบวกเชิงเส้นนี้ในปัจจุบันเรียกว่า **อนุกรมฟูริเยร์** (Fourier Series) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่ใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์และสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ ปัญหาสำคัญ ๆ ทางคณิตศาสตร์ก็ได้จากอนุกรมฟูริเยร์ ดังนั้นในบทนี้จึงศึกษาถึงอนุกรมฟูริเยร์พอสังเขป

1.2 ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodic function)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ เรียกว่า **ฟังก์ชันเป็นคาบ** ถ้าสำหรับทุกค่า t จะได้

$$f(t+T) = f(t)$$

เมื่อ $T > 0$ เป็นค่าคงตัวที่น้อยที่สุด และเรียก T ว่า**คาบ** (period) **ของฟังก์ชัน** $f(t)$

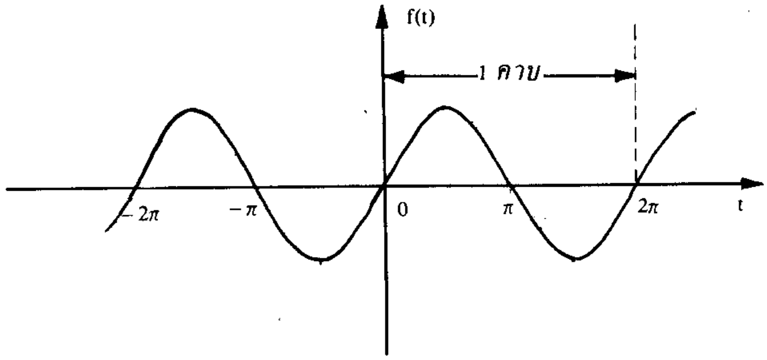
ตัวอย่าง จงพิจารณาคาบของฟังก์ชัน $\sin t, \cos t, \tan t$

วิธีทำ 1. เพราะว่า

$$\sin(t+0) = \sin t$$
$$\sin(t+2\pi) = \sin t$$
$$\sin(t+4\pi) = \sin t$$

จะเห็นว่าในที่นี้ $T = 2\pi$ เพราะว่าเป็นค่าตัวมากกว่าศูนย์และน้อยที่สุด
ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $\sin t$ คือ 2π

ถ้าพิจารณาจากกราฟจะเห็นว่า ฟังก์ชัน $\sin t$ เขียนได้ดังรูป



รูป 1.1

2. ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า $\cos(t+0) = \cos t$

$$\cos(t+2\pi) = \cos t$$

$$\cos(t+4\pi) = \cos t$$

∴ คาบของฟังก์ชัน $\cos t$ คือ 2π

3. สำหรับค่า $\tan t$ จะเห็นว่า

$$\tan(t+\pi) = \tan t$$

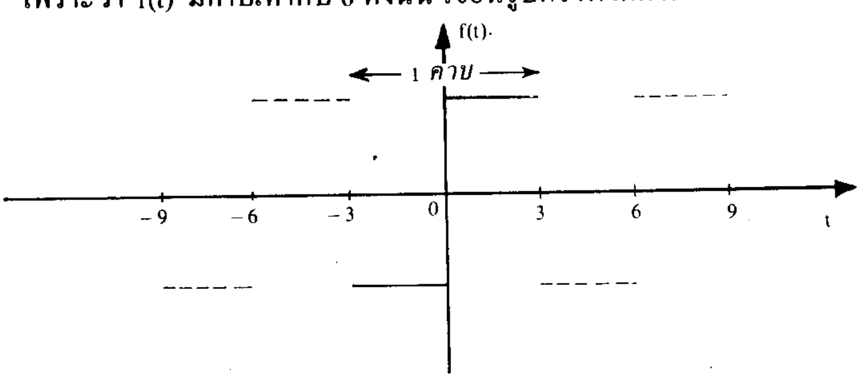
เมื่อ $T = \pi$ เป็นค่าคงตัวที่น้อยที่สุด

ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $\tan t$ คือ π

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ -2, & -3 < t < 0 \end{cases}, \quad f(t) \text{ มีคาบเท่ากับ } 6$$

วิธีทำ เพราะว่า $f(t)$ มีคาบเท่ากับ 6 ดังนั้น เขียนรูปกราฟได้ดังนี้



รูป 1.2

จะเห็นว่า $f(t)$ ไม่นิยามที่ $t = 0, 3, -3, 6, -6, \ldots$
ซึ่งค่า t เหล่านี้เป็นค่าตัว $f(t)$ ไม่มีความต่อเนื่อง

ตัวอย่าง จงหาคาบของฟังก์ชัน $g(t) = \cos \omega t, \ \omega \neq 0$

วิธีทำ ให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $\cos \omega t$

ดังนั้น $\cos(\omega t + T) = \cos \omega t$

เพราะว่า 2π เป็นคาบของฟังก์ชัน $\cos t$

ดังนั้น $\cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega t$

$$\cos \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos \omega t$$

นั่นคือ $g\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = g(t)$

คาบของฟังก์ชัน $\cos \omega t$ คือ $\frac{2\pi}{\omega}$

ตัวอย่าง จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = \sin \frac{t}{3} + \sin \frac{t}{4}$

วิธีทำ ให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $f(t)$

$$f(t+T) = f(t)$$

$$\sin \frac{(t+T)}{3} + \sin \frac{(t+T)}{4} = \sin \frac{t}{3} + \sin \frac{t}{4}$$

เพราะว่า $\sin(\theta + 2\pi m) = \sin \theta$

ดังนั้น $\frac{1}{3}T = 2\pi m$ และ $\frac{1}{4}T = 2\pi n$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$T = 6\pi m = 8\pi n$$

ดังนั้น $m = 4$ และ $n = 3$ ทำให้ T มีค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ $T = 24\pi$

ข้อสังเกต 1. ค่า m, n หาได้จากเอา 6, 8 มาหา ค.ร.น. นั่นเอง

2. โดยทั่วไปถ้าฟังก์ชัน $f(t) = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ซึ่งมีคาบ T จะสามารถหาจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งทำให้

$$\omega_1 T = 2\pi m$$

$$\omega_2 T = 2\pi n$$

นั่นคือ $\qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$

ซึ่ง $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ นั่นเอง

ตัวอย่าง ฟังก์ชัน $f(t) = \sin 5t + \sin(5+\pi)t$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้ $\omega_1 = 5$

$$\omega_2 = 5+\pi$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5}{5+\pi}$$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น ไม่สามารถหาค่า T ซึ่งทำให้ $f(t+T) = f(t)$

$f(t)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ

สำหรับฟังก์ชัน cosine ก็เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = (\cos t + 1)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos t + 1)^2 \\ &= \cos^2 t + 2\cos t + 1 \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos 2t) + 2\cos t + 1 \\ &= \frac{1}{2}\cos 2t + 2\cos t + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

เพราะว่าค่าคงตัว $\frac{3}{2}$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบซึ่งมีคาบ T ใด ๆ

ฟังก์ชัน $\cos t$ มีคาบ 2π

$\cos 2t$ มีคาบ $\frac{2\pi}{2} = \pi$

ดังนั้น $f(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + 2\cos t + \frac{3}{2}$ มีคาบ 2π

แบบฝึกหัด 1.1

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงตัว (constant function) นิยามโดย $f(t) = c$ เมื่อ $T \leqslant t < \infty$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบหรือไม่
2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันเป็นคาบต่อไปนี้

2.1 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 2 \\ 1, & 2 \leqslant x < 4 \\ 0, & 4 \leqslant x < 6 \end{cases}$, f(x) มีคาบเท่ากับ 6

2.2 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$, f(x) มีคาบเท่ากับ 2π

2.3 $f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

3. ฟังก์ชันต่อไปนี้นิยามได้บน $(-\infty, \infty)$ จงหาคาบของฟังก์ชัน

3.1 $\sin(3t+\pi)$

3.2 $\cos \frac{3}{2}(\pi - t)$

3.3 $\sin \pi t + \cos 3\pi t + \tan 4\pi t$

3.4 $\cos \pi t \sin 9\pi t$

3.5 $\sin \pi t + \sin 3\pi t$

4. ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ มีคาบเท่ากับ 2b ซึ่งมีโดเมนใน $(-\infty, \infty)$ จงหาค่า k ซึ่งทำให้ f(kt) เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ มีคาบเท่ากับ 2p

1.3 อนุกรมฟูริเยร์ (Fourier Series)

พิจารณาฟังก์ชัน f(x) ซึ่งมีคาบ 2π และอินทิเกรตได้บนทุก ๆ ช่วงจำกัด และ f(x) เขียนได้ในรูป

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{..........(1.3.1)}$$

การหาค่า a_n, b_n ทำดังนี้

การหาค่า a_0

จากสมการ (1.3.1) อินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π และเพราะว่า

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้น
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx$$

$$= \pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

การหาค่า a_n

จากสมการ (1.3.1) คูณสมการด้วย cos nx แล้วอินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π จะได้เทอมต่าง ๆ ดังนี้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos mx \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin mx \cos nx dx$$

$$+ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx$$

เพราะว่า
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m \neq n \\ \pi & \text{ถ้า } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{ถ้า } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m \neq n \\ \pi & \text{ถ้า } m = n \neq 0 \end{cases}$$

ดังนั้น $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1.3.2)$$

ข้อสังเกต ถึงแม้ว่า a_0 และ a_n จะใช้สูตรเดียวกันได้คือ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

แต่ในการหาค่า a_0 ต้องแยกพิจารณาต่างหาก เพราะค่า a_0 อาจจะไม่เท่ากับค่า a_n เมื่อ $n = 1,2,\ldots$ เช่น จะพิจารณาค่า a_0 และ a_n ของ

$$f(x) = 1+x, \quad -\pi < x < \pi$$

จาก $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2$$

แต่ $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(1+x)\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

ดังนั้น $a_0 \neq a_n \quad n = 1,2,\ldots$

การหาค่า b_n

จากสมการ (1.3.1) คูณสมการด้วย $\sin nx$ แล้วอินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π ในทำนองเดียวกับการหาค่า a_n จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad n = 1,2,\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots.(1.3.3)$$

นิยาม อนุกรม $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad -\pi < x < \pi$

ซึ่งหาค่า a_n และ b_n ได้จากสมการ (1.3.2) และ (1.3.3) ตามลำดับ เรียกว่าเป็น **อนุกรมฟูริเยร์ของ** $f(x)$ **บน** $[-\pi, \pi]$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = \cos ax, \quad -\pi < x < \pi, \; a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

วิธีทำ อนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = \cos ax$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin ax}{a}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin a\pi}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad n = 1,2,\ldots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(a-n)x + \cos(a+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a-n)x}{a-n} + \frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} + \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right]$$

$$= \frac{2a \sin a\pi \cos n\pi}{\pi(a^2-n^2)} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \sin nx dx = 0$$

ดังนั้น $\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{a^2-n^2} \cos nx$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1}\cos x + \frac{2a}{a^2-2^2}\cos 2x - \frac{2a}{a^2-3^2}\cos 3x + \ldots\right]$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

วิธีทำ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\pi\int_{-\pi}^{0} \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2}$$

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = 0, \; a_{2n-1} = \dfrac{-2}{\pi(2n-1)^2} \quad n = 1,2,3,\ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi \cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \left(-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n}\right)_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right]$$

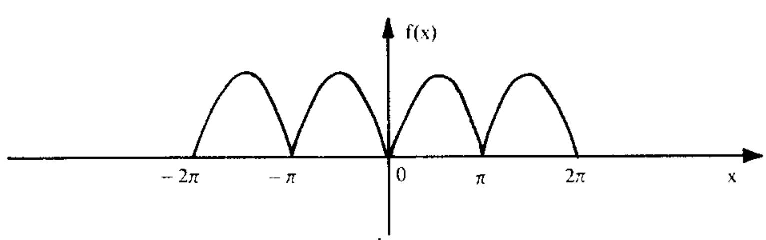
$$= \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi)$$

$$\therefore \; f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + 3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3\sin 3x}{3}$$

$$- \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

ตัวอย่าง **จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน** $f(x) = |\sin x|, \; -\pi < x < \pi$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ ดังนั้นเขียนกราฟได้ดังนี้



รูป 1.3

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin x dx\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\cos x\Big|_{-\pi}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\pi}\Big] = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} -\sin x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx dx\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[-\int_{-\pi}^{0}\big[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\big]dx + \int_{0}^{\pi}\big[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\big]dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\Big(\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big)_{-\pi}^{0} + \Big(-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}-\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big)_{0}^{\pi}\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{4+4\cos n\pi}{1-n^2}\Big]$$

$$= \frac{2\big[1+(-1)^n\big]}{\pi(1-n^2)} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}, \quad a_{2n-1} = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} -\sin x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\sin nx dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[-\int_{-\pi}^{0}(\cos(1-n)x+\cos(1+n)x)dx + \int_{0}^{\pi}(\cos(1-n)x-\cos(1+n)x)dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[-\Big(\frac{\sin(1-n)x}{1-n}-\frac{\sin(1+n)x}{1+n}\Big)_{-\pi}^{0} + \Big(\frac{\sin(1-n)x}{1-n}-\frac{\sin(1+n)x}{1+n}\Big)_{0}^{\pi}\Big]$$

$$= 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$$

การลู่เข้าของอนุกรมฟูริเยร์นั้นจะพิจารณาจากทฤษฎีบทของดีริคเลต (Dirichlet's Theorem)

ทฤษฎีบทของดีริคเลต

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามได้บน $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ และเป็นฟังก์ชันมีขอบเขต มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเป็นจำนวนจำกัด (finite) และมีความไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนจำกัด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบเท่ากับ 2π จะได้ว่า อนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x)$ จะลู่เข้าสู่ค่า $\frac{1}{2}\big[f(x+)+f(x-)\big]$ ทุกค่า x ถ้า $f(x)$ มีความต่อเนื่อง อนุกรมฟูริเยร์จะลู่เข้าสู่ $f(x)$

1.4 **การขยายช่วงของฟังก์ชัน** (Extension of the interval)

ในการพิจารณาปัญหาต่าง ๆ ช่วงของ f(x) อาจจะกว้างขึ้นหรือสั้นกว่า $(-\pi, \pi)$ ก็ได้ ถ้าจะหาการกระจายของ f(x) เมื่อ x มีค่าอยู่ในช่วง $(-L, L)$ เมื่อ L เป็นค่าคงตัว

ให้ f(x) มีคุณสมบัติตามทฤษฎีบทของดีริคเลต ในช่วง $(-L, L)$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $x = \frac{Lz}{\pi}$ จะกระจายฟังก์ชัน $f\left(\frac{Lz}{\pi}\right)$ เป็นอนุกรมฟูริเยร์ได้ คือ

$$f\left(\frac{Lz}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$$

เมื่อ $-\pi < z < \pi$

แต่ $z = \frac{\pi x}{L}$ ดังนั้นจะได้อนุกรม

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{..........(1.4.1)}$$

และจะได้ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lz}{\pi}\right) \cos nzdz$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad \text{..........(1.4.2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lz}{\pi}\right) \sin nzdz$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \text{..........(1.4.3)}$$

สมการ (1.4.1) คือ อนุกรมฟูริเยร์ของ f(x) เมื่อ $-L < x < L$ และหาค่า a_n, b_n ได้จากสมการ (1.4.2) และ (1.4.3)

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของ f(x) ถ้า $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 2 \end{cases}$

วิธีทำ ในที่นี้ $L = 2$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{2} 2\cdot dx\right) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 2\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 2\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= \int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\therefore\ f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของ $f(x) = 4-x^2,\ -2 \leqslant x \leqslant 2$

วิธีทำ ในที่นี้ $L = 2$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big]_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{8x}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \Big(\frac{2x^2}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}\Big)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1} \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big]_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{8x}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \Big(\frac{2x^2}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}\Big)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= 0$$

$$\therefore f(x) = \Big[\frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\Big(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{2} + \dots\Big)\Big]$$

จะเห็นว่า $f(0) = 4 = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\Big(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\Big)$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันเป็นคาบต่อไปนี้ ซึ่งนิยามใน 1 คาบ

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

5. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

6. $f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

9. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 2$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < -1 \\ \sin\frac{\pi x}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

คำตอบ

1. $\frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{2}{6}\sin 6x + \ldots\right)$

3. $\frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \frac{\cos 8x}{63} + \ldots\right)$

5. $\frac{\sinh \pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\sin nx)\right]$

7. $\frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots\right)$

8. $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

9. $a_n = \frac{1-e^{-2}}{1+n^2\pi^2}, \quad b_n = \frac{n\pi(1-e^{-2})}{1+n^2\pi^2}$

10. $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n \sin n\pi t}{4n^2-1}$

1.5 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and odd functions)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(t)$ เรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function) ก็ต่อเมื่อ

$$f(-t) = f(t)$$

และเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function) ก็ต่อเมื่อ

$$f(-t) = -f(t)$$

ตัวอย่าง 1. $f(t) = t^2$

เพราะว่า $f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$

ดังนั้น $f(t) = t^2$ เป็นฟังก์ชันคู่

2. $f(t) = \cos t$

เพราะว่า $f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t)$

ดังนั้น $f(t) = \cos t$ เป็นฟังก์ชันคู่

3. $f(t) = e^t + e^{-t}$

เพราะว่า $f(-t) = e^{-t} + e^{-(-t)}$

$= e^{-t} + e^t = f(t)$

ดังนั้น $f(t) = e^t + e^{-t}$ เป็นฟังก์ชันคู่

4. $f(t) = 3t$ เป็นฟังก์ชันคี่

5. $f(t) = \sin t$

เพราะว่า $f(-t) = \sin(-t)$

$= -\sin t$

$= -f(t)$

ดังนั้น $f(t) = \sin t$ เป็นฟังก์ชันคี่

6. $f(t) = 2+t$

เพราะว่า $f(-t) = 2-t \neq f(t)$ หรือ $-f(t)$

ดังนั้น $2+t$ ไม่เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

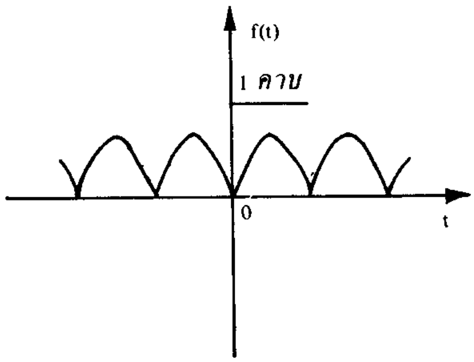
7. $f(t) = e^t$

จะเห็นว่า $f(-t) = e^{-t}$ ซึ่งไม่เท่ากับ $f(t)$ หรือ $-f(t)$

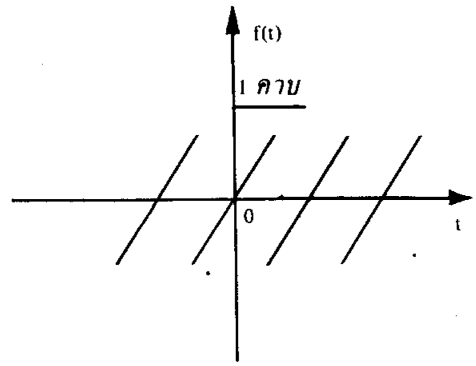
ดังนั้น $f(t) = e^t$ ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

จากนิยามจะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันคู่มีสมมาตรกับแกน y และกราฟของฟังก์ชันคี่มีสมมาตรกับจุดกำเนิด ดังรูป

ยกที่ 4



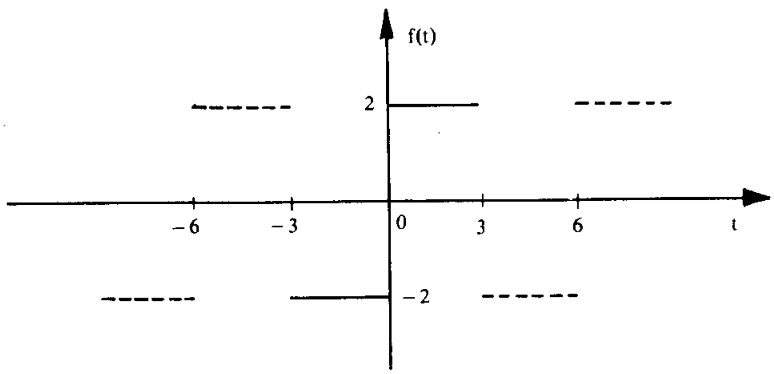
รูป 1.4(1) กราฟฟังก์ชันคู่



รูป 1.4(2) กราฟฟังก์ชันคี่

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ -2, & -3 < t < 0 \end{cases}$ มีคาบเท่ากับ 6 เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ ถ้าเขียนกราฟฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะได้



รูป 1.5

ลักษณะของกราฟเป็นกราฟที่มีสมมาตรกับจุดกำเนิด ดังนั้น f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ หรืออาจจะพิจารณาจาก

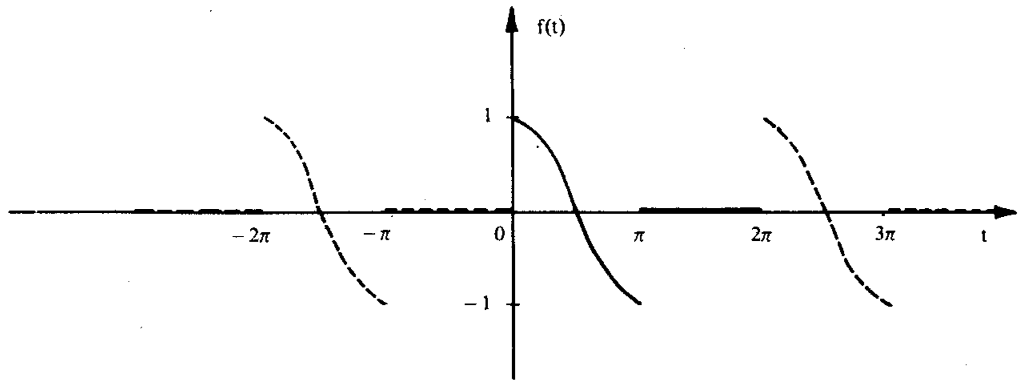
$$f(-t) = \begin{cases} 2, & 0 < -t < 3 \\ -2, & -3 < -t < 0 \end{cases}$$

$$f(-t) = \begin{cases} -2, & 0 < t < 3 \\ 2, & -3 < t < 0 \end{cases}$$

นั่นคือ $f(-t) = -f(t)$

ตัวอย่าง ฟังก์ชัน $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบมีคาบเท่ากับ 2π จงพิจารณาว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ กราฟของ f(t) เขียนได้ดังนี้



รูป 1.6

กราฟของฟังก์ชันไม่มีสมมาตรกับแกน y หรือจุดกำเนิด
ดังนั้น f(t) ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. ผลบวกของฟังก์ชันคู่เป็นฟังก์ชันคู่
2. ผลบวกของฟังก์ชันคี่เป็นฟังก์ชันคี่
3. ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ จะได้ดังนี้
   - 3.1 (ฟังก์ชันคู่) × (ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่
   - 3.2 (ฟังก์ชันคี่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่
   - 3.3 (ฟังก์ชันคู่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่
4. $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่
5. $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

พิสูจน์ (1) ให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น
$$f_1(-t) = f_1(t)$$
$$f_2(-t) = f_2(t)$$

ให้ $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$\begin{aligned} f(-t) &= f_1(-t) + f_2(-t) \\ &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันคู่เป็นฟังก์ชันคู่

ข้อ (2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

(3) 3.1 ให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$f_1(-t) = f_1(t)$$
$$f_2(-t) = f_2(t)$$

ให้ $f(t) = f_1(t)f_2(t)$

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(-t) &= f_1(-t)f_2(-t) \\ &= f_1(t)f_2(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณของฟังก์ชันคู่เป็นฟังก์ชันคู่

ในทำนองเดียวกันข้อ 3.2 พิสูจน์ได้เช่นเดียวกับ 3.1

3.3 ให้ $f_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$f_1(-t) = f_1(t)$$

และ
$$f_2(-t) = -f_2(t)$$

ให้ $f(t) = f_1(t)f_2(t)$

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(-t) &= f_1(-t)f_2(-t) \\ &= f_1(t)\left[-f_2(t)\right] \\ &= -f_1(t)f_2(t) \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่เป็นฟังก์ชันคี่

4. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$