บทที่ 4
การประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์
(Applications of Differential equations)

สูตรและสมการที่สำคัญ

1. $$L\{t^m y^{(n)}(t)\} = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} L\{y^{(n)}(t)\}$$

2. การแก้สมการสองตัวแปรสองสมการโดยใช้ตัวกำหนดช่วย (determinant) เมื่อกำหนดให้-

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{..........(1)}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{..........(2)}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

และ $$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

3. ประยุกต์กับกลศาสตร์ (Applied to mechanics) เมื่อมวล m ผูกติดกับสปริง สมการการเคลื่อนที่

3.1 กรณีที่ไม่มีแรงหน่วง (no damping force)

$$mx'' + kx = 0$$

เมื่อ x คือ ระยะขจัด (displacement) และ

k คือ ค่าคงที่สปริง (spring constant)

3.2 กรณีที่มีแรงหน่วง (damping force) เข้ามาเกี่ยวข้อง

$$mx'' + \beta x' + kx = 0$$

3.3 กรณีที่มีแรงหน่วง (damping force) และแรงภายนอก (external force) เข้ามาเกี่ยวข้อง จะได้

$$mx'' + \beta x' + kx = f(t)$$

เมื่อ f(t) คือ แรงกระทำจากภายนอก

4. ประยุกต์กับวงจรไฟฟ้า (Application to electrical circuits)

4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรไฟฟ้าแบบ RCL เมื่อต้องการหาค่าของ Q คือ

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

4.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรไฟฟ้าแบบ RC คือ

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

4.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรไฟฟ้าแบบ RL คือ

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} = E$$

หรือ $$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (The partial differential equation)

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) \quad u(x,0)$$

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}U(x,s)$$

เมื่อ $u = u(x, t)$ และ $L\left\{ u(x, t) \right\} = U(x, s)$

และ

$$L\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = s^2 U(x, s) - s\, u(x, 0) - u_t(x, 0)$$

$$L\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{d^2}{dx^2} U(x, s)$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

จงใช้การแปลงลาปลาซ แก้สมการข้อ 1 - 9

1. $$y''(t) + 4y(t) = 9t$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 7$$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = 9L\{t\}$$

$$[s^2 L\{y\} - s y_0 - y_0'] + 4L\{y\} = 9\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$(s^2 + 4) L\{y\} - s \cdot (0) - 7 = \frac{9}{s^2}$$

$$L\{y\} = \frac{9}{s^2(s^2+4)} + \frac{7}{s^2+4}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s^2+4)}\right\} + \frac{7}{2} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

หรือ $$1 = As(s^2+4) + B(s^2+4) + s^2(Cs+D) \qquad \text{..........(1)}$$

แทนค่า $s = 0$

$$B = \frac{1}{s^2+4}\Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

แทนค่า $s = 2i$

$$1 = (2i)^2(2Ci + D)$$

$$= -8Ci - 4D$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$C = 0 \text{ และ } D = -\frac{1}{4}$$

จาก (1) แทนค่า $s = 1$

$$1 = A(5) + \left(\frac{1}{4}\right)(5) + (1)^2\left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$A = 1 - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\text{Sin } 2t$$

เพราะฉะนั้น

$$y = 9\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\text{Sin } 2t\right) + \frac{7}{2}\text{Sin } 2t$$

$$= \frac{9}{4}t + \frac{19}{8}\text{Sin } 2t$$

ตอบ

2. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t}$

$y(0) = 6,\ y'(0) = -1$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$[s^2 L\{y\} - s\,y(0) - y'(0)] - 3[s L\{y\} - y(0)] + 2L\{y\} = 4L\{t\} + 12L\{e^{-t}\}$$

$$s^2 L\{y\} - 6s - (-1) - 3s L\{y\} + 3(6) + 2L\{y\} = 4\left(\frac{1}{s^2}\right) + 12\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$(s^2 - 3s + 2)L\{y\} = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} + 6s - 19$$

$$(s-1)(s-2)L\{y\} = \frac{4(s+1)+12s^2+s^2(s+1)(6s-19)}{s^2(s+1)}$$

$$= \frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)}$$

$$L\{y\} = \frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s-1}+\frac{E}{s-2}$$

หรือ $6s^4-13s^3-7s^2+4s+4 = As(s+1)(s-1)(s-2)+B(s+1)(s-1)(s-2)$

$+Cs^2(s-1)(s-2)+Ds^2(s+1)(s-2)$

$+Es^2(s+1)(s-1)$

แทนค่า $s=0$

$$4 = 2B$$

$$B = 2$$

แทนค่า $s=-1$

$$6(-1)^4-13(-1)^3-7(-1)^2+4(-1)+4 = C(-1)^2(-2)(-3)$$

$$12 = 6C$$

$$C = 2$$

แทนค่า $s=1$

$$6(1)^4-13(1)^3-7(1)^2+4(1)+4 = D(1)^2(2)(-1)$$

$$-6 = -2D$$

$$D = 3$$

แทนค่า $s = 2$

$$6(2)^4 - 13(2)^3 - 7(2)^2 + 4(2) + 4 = E(2)^2(3)(1)$$

$$-24 = 12E$$

$$E = -2$$

เลือกแทนค่า $s = -2$

$$6(-2)^4 - 13(-2)^3 - 7(-2)^2 + 4(-2) + 4 = A(-2)(-1)(-3)(-4)$$

$$+ (2)(-1)(-3)(-4) + (2)(-2)^2(-3)(-4)$$

$$+ (3)(-2)^2(-1)(-4) + (-2)(-2)^2(-1)(-3)$$

$$168 = 24A - 24 + 96 + 48 - 24$$

$$24A = 168 - 96 = 72$$

$$A = \frac{72}{24} = 3$$

ดังนั้น

$$\frac{6s^4 - 13s^3 - 7s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-2}$$

เพราะฉะนั้น

$$y = 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$+ 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= 3 + 2t + 2e^{-t} + 3e^{t} - 2e^{2t}$$ **ตอบ**

3. $$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 125t^2$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$[s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)] - 4[sL\{y\} - y(0)] + 5L\{y\} = 125L\{t^2\}$$

$$(s^2 - 4s + 5)\, L\{y\} = 125\left(\frac{2}{s^3}\right)$$

$$L\{y\} = \frac{250}{s^3(s^2 - 4s + 5)}$$

$$y = 250\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2 - 4s + 5)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s^3(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 - 4s + 5}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
1 &= As^2(s^2 - 4s + 5) + Bs(s^2 - 4s + 5) + C(s^2 - 4s + 5) \\
&\quad + (Ds + E)\, s^3 \\
&= As^4 - 4As^3 + 5As^2 + Bs^3 - 4Bs^2 + 5Bs + Cs^2 - 4C s \\
&\quad + 5C + Ds^4 + Es^3 \\
&= (A + D)\, s^4 + (-4A + B + E)\, s^3 + (5A - 4B + C)s^2 \\
&\quad + (5B - 4C)\, s + 5C
\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$A + D = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$-4A + B + E = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

$$5A - 4B + C = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

$$5B - 4C = 0 \qquad \text{..........(4)}$$

$$5C = 1 \qquad \text{..........(5)}$$

หรือ

$$C = \frac{1}{5}$$

แทนค่า C ใน (4)

$$5B = 4\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$B = \frac{4}{25}$$

แทนค่า B และ C ลงใน (3)

$$5A = 4\left(\frac{4}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{11}{25}$$

$$A = \frac{11}{125}$$

จาก (1) $\quad D = -\frac{11}{125}$

แทนค่า A และ B ลงใน (2)

$$E = 4\left(\frac{11}{125}\right) - \left(\frac{4}{25}\right)$$

$$= \frac{44}{125} - \frac{4}{25}$$

$$= \frac{24}{125}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s^3(s^2-4s+5)} = \frac{\frac{11}{125}}{s} + \frac{\frac{4}{25}}{s^2} + \frac{\frac{1}{5}}{s^3} - \frac{\left(\frac{11}{125}s - \frac{24}{125}\right)}{(s-2)^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-4s+5)}\right\} = \frac{11}{125}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{11}{125}s - \frac{22}{125}\right)}{(s-2)^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{125}}{(s-2)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{11}{125} + \frac{4}{25} t + \frac{1}{10} t^2 - \frac{11}{125} e^{2t} \operatorname{Cos} t + \frac{2}{125} e^{2t} \operatorname{Sin} t$$

เพราะฉะนั้น

$$y' = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t} \operatorname{Cos} t + 4e^{2t} \operatorname{Sin} t$$

$$= 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t} (2 \operatorname{Sin} t - 11 \operatorname{Cos} t)$$ **ตอบ**

$$y''(t) + y(t) = 8 \operatorname{Cos} t$$

$$y(0) = 1, \; y'(0) = -1$$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y''\} + L\{y\} = 8 L\{\operatorname{Cos} t\}$$

$$[s^2 L\{y\} - s\, y(0) - y'(0)] + L\{y\} = 8 \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$s^2 L\{y\} - s(1) - (-1) + L\{y\} = \frac{8s}{s^2 + 1}$$

$$(s^2 + 1) L\{y\} = \frac{8s}{s^2 + 1} + s - 1$$

$$L\{y\} = \frac{8s}{(s^2 + 1)^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

หรือ
$$y = 8L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

พิจารณา $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\}$

เพราะว่า $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2}$

จากสูตร

$$L^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\} = -t\, f(t)$$

ดังนั้น ถ้า $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ จะได้ $f(t) = \operatorname{Sin} t$

นั่นคือ

$$L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\} = -t \text{ Sin } t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t \text{ Sin } t$$

หรือ $$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t \text{ Sin } t$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = 8\left\{\frac{1}{2} t \text{ Sin } t\right\} + \text{Cos } t - \text{Sin } t$$

$$y(t) = 4t \text{ Sin } t + \text{Cos } t - \text{Sin } t$$ **ตอบ**

$$y'''(t) - y(t) = e^t$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y'''\} - L\{y\} = L\{e^t\}$$

$$[s^3 L\{y\} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] - L\{y\} = \frac{1}{s-1}$$

$$s^3 L\{y\} - s^2(0) - s(0) - (0) - L\{y\} = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^3 - 1) L\{y\} = \frac{1}{s-1}$$

$$L\{y\} = \frac{1}{(s-1)(s^3-1)}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$$

หรือ $$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)}\right\}$$

พิจารณา

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s^2+s+1)}\right\}$ โดยใช้ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์ ใช้ทฤษฎีบท 3-10

กรณีรากเป็นกำลังหนึ่งแบบซ้ำ $(s-1)^2$ จะได้

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$\phi'(s) = \frac{-2s-1}{(s^2+s+1)^2}$$

แทนค่า $s = 1$ จะได้

$$\phi(1) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

และ
$$\phi'(1) = \frac{-2-1}{(1+1+1)^2} = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น พจน์ใน y ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s-1)^2$ คือ

$$e^t\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,t\right\} = \frac{1}{3}e^t(t-1)$$

ใช้ทฤษฎีบท 3-10 กรณีรากเป็นกำลังสองแบบไม่ซ้ำของตัวประกอบ s^2+s+1 $= \left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ คือ

$$\phi(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

แทน
$$s = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \frac{1}{\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i-1\right\}^2}$$

$$\phi_r + i\,\phi_i = \frac{1}{\left\{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right\}^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}(-\sqrt{3}+i)^2}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(2-2\sqrt{3}\,i)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{(1-\sqrt{3}\,i)}\cdot\frac{(1+\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(1 + \sqrt{3}\,i)}{4}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\phi_r = \frac{1}{6} \quad \text{และ} \quad \phi_i = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ดังนั้น พจน์ใน y ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $s^2 + s + 1$คือ

$$\frac{e^{-1/2t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ Cos } \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{6} \text{Sin } \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$$

$$= \frac{e^{-1/2t}}{3\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \text{ Cos } \frac{\sqrt{3}}{2} t + \text{Sin } \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

ดังนั้น ค่าของ y คือ

$$y(t) = \frac{1}{3} e^t (t - 1) + \frac{e^{-t/2}}{3\sqrt{3}} \left(\text{Cos } \frac{\sqrt{3}}{2} t + \text{Sin } \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

ตอบ

6. $y^{iv}(t) + 2y''(t) + y(t) = \text{Sin } t$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y^{iv}(t)\} + 2L\{y''\} + L\{y\} = L\{\text{Sin } t\}$$

$$[s^4 L\{y\} - s^3y(0) - s^2 y'(0) - s\,y''(0) - y'''(0)] + 2[s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)]$$

$$+ L\{y\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$(s^4 + 2s^2 + 1) L\{y\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$L\{y\} = \frac{1}{(s^2+1)^3}$$

หรือ $$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$$

จากแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 21 (ก)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{1}{8}\{(3-t^2)\,\mathrm{Sin}\,t - 3t\,\mathrm{Cos}\,t\}$$

ดังนั้น

$$y(t) = \frac{1}{8}\{(3-t^2)\,\mathrm{Sin}\,t - 3t\,\mathrm{Cos}\,t\}$$ **ตอบ**

7. $y''(t) + 9y(t) = 18t$

ถ้า $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

วิธีทำ สมมุติให้ $y'(0) = C$ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y''(t)\} + 9L\{y(t)\} = 18\,L\{t\}$$

$$[s^2L\{y\} - s\,y(0) - y'(0)] + 9L\{y\} = 18\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$(s^2+9)\,L\{y\} = \frac{18}{s^2} + C$$

$$L\{y\} = \frac{18}{s^2(s^2+9)} + \frac{C}{s^2+9}$$

หรือ $$y = 18L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+9)}\right\} + C\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Ds+E}{s^2+9}$$

หรือ $$1 = As\,(s^2+9) + B(s^2+9) + s^2(Ds+E)$$

แทนค่า $s = 0$ จะได้

$$B = \frac{1}{9}$$

แทนค่า $s = 3i$

$$1 = (3i)^2 \{ D(3i) + E \}$$

$$= -27D\,i - 9E$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$-9E = 1$$

$$E = -\frac{1}{9}$$

และ

$$-27D = 0$$

$$D = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{9}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{s^2+9}$$

นั่นคือ

$$y = 18\, L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{\frac{1}{9}}{s^2+9} \right\} + \frac{C}{3} \operatorname{Sin} 3t$$

$$= 18 \left\{ \frac{1}{9} t - \frac{1}{27} \operatorname{Sin} 3t \right\} + \frac{C}{3} \operatorname{Sin} 3t$$

$$y(t) = 2t - \frac{2}{3} \operatorname{Sin} 3t + \frac{C}{3} \operatorname{Sin} 3t$$

แต่

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3} \operatorname{Sin} 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{C}{3} \operatorname{Sin} 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{C}{3} = \pi + \frac{2}{3}$$

ดังนั้น

$$y(t) = 2t - \frac{2}{3}\,\text{Sin}\,3t + \left(\pi + \frac{2}{3}\right)\text{Sin}\,3t$$

$$= 2t + \pi\,\text{Sin}\,3t$$ **ตอบ**

8. $y^{iv} - 16y = 30\,\text{Sin}\,t$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(\pi) = 0,\ y'''(\pi) = -18$

วิธีทำ สมมุติให้ $y''(0) = A,\ y'''(0) = B$ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y^{iv}\} - 16\,L\{y\} = 30\,L\{\text{Sin}\,t\}$$

$$[s^4 L\{y\} - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] - 16\,L\{y\}$$

$$= 30\,\frac{1}{s^2 + 1}$$

$$(s^4 - 16)\,L\{y\} = \frac{30}{s^2 + 1} + 2s + As + B$$

$$L\{y\} = \frac{30}{(s^2 + 1)(s^4 - 16)} + \frac{(2 + A)s}{s^4 - 16} + \frac{B}{s^4 - 16}$$

หรือ

$$y = 30\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)(s^4 - 16)}\right\} + (2 + A)\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^4 - 16}\right\}$$

$$+ B\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - 16}\right\} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s^4 - 16)} = \frac{1}{(s - 2)(s + 2)(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} + \frac{Es + F}{s^2 + 4}$$

หรือ

$$1 = A(s + 2)(s^2 + 1)(s^2 + 4) + B(s - 2)(s^2 + 1)(s^2 + 4)$$

$$+ (s - 2)(s + 2)(s^2 + 4)(Cs + D)$$

$$+ (s - 2)(s + 2)(s^2 + 1)(Es + F)$$

แทนค่า $s = 2$

$$A = \frac{1}{400}$$

แทนค่า $s = -2$

$$B = -\frac{1}{400}$$

แทนค่า $s = i$

$$1 = (-1 - 4)(-1 + 4)(Ci + D)$$

$$1 = -15D - 15Ci$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$D = -\frac{1}{15}$$

และ $C = 0$

แทนค่า $s = 2i$

$$1 = (-4 - 4)(-4 + 1)(2i\,E + F)$$

$$1 = 48\,Ei + 24F$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$F = \frac{1}{24} \text{ และ } E = 0$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^4-16)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{400}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{400}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{15}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{24}}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{400}e^{2t} - \frac{1}{400}e^{-2t} - \frac{1}{15}\text{Sin}\,t + \frac{1}{48}\text{Sin}\,2t \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

พิจารณา

$$\frac{s}{s^4 - 16} = \frac{s}{(s^2 - 4)(s^2 + 4)} = \frac{s}{(s - 2)(s + 2)(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{G}{s - 2} + \frac{H}{s + 2} + \frac{Ms + N}{s^2 + 4}$$

หรือ

$$s = G(s + 2)(s^2 + 4) + H(s - 2)(s^2 + 4)$$

$$+ (Ms + N)(s - 2)(s + 2)$$

แทนค่า $s = 2$

$$2 = G(4)(8)$$

$$G = \frac{1}{16}$$

แทนค่า $s = -2$

$$-2 = H(-4)(8)$$

$$H = \frac{1}{16}$$

แทนค่า $s = 2i$

$$2i = (2Mi + N)(-4 - 4)$$

$$= -16Mi - 8N$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$N = 0 \qquad \text{และ} \quad M = -\frac{1}{8}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^4 - 16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{16}}{s - 2} + \frac{\frac{1}{16}}{s + 2} - \frac{\frac{1}{8}s}{s^2 + 4}\right\}$$

$$= \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}\text{Cos } 2t \qquad \text{..........(3)}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s^4 - 16} = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s^2+4)}$$

$$= \frac{P}{s-2} + \frac{Q}{s+2} + \frac{Rs+S}{s^2+4}$$

หรือ

$$1 = P(s+2)(s^2+4) + Q(s-2)(s^2+4)$$

$$+ (Rs+S)(s-2)(s+2)$$

แทนค่า $s = 2$

$$1 = P(4)(8)$$

$$P = \frac{1}{32}$$

แทนค่า $s = -2$

$$1 = Q(-4)(8)$$

$$Q = -\frac{1}{32}$$

แทนค่า $s = 2i$

$$1 = (2Ri + S)(-4 - 4)$$

$$= -16\,Ri - 16S$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$R = 0 \qquad \text{และ} \quad s = -\frac{1}{16}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - 16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{32}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{32}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{16}}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{32}e^{2t} - \frac{1}{32}e^{-2t} - \frac{1}{32}\,\text{Sin}\,2t \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

แทนค่า (2), (3) และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$y = 30\left[\frac{1}{200}\left\{\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right\} - \frac{1}{15}\text{Sin } t + \frac{1}{48}\text{Sin } 2t\right]$$

$$+ (2+A)\left[\frac{1}{8}\left\{\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right\} - \frac{1}{8}\text{Cos } 2t\right]$$

$$+ B\left[\frac{1}{16}\left\{\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right\} - \frac{1}{32}\text{Sin } 2t\right]$$

$$y(t) = \frac{3}{20}\text{Sin h }(2t) - 2\text{ Sin } t + \frac{5}{8}\text{Sin } 2t + \frac{(2+A)}{8}\text{Sin h }(2t)$$

$$- \frac{(2+A)}{8}\text{Cos } 2t + \frac{B}{16}\text{Sin h }(2t) - \frac{B}{32}\text{Sin } 2t$$

$$y'(t) = \frac{3}{10}\text{Cos h }(2t) - 2\text{ Cos } t + \frac{5}{4}\text{Cos } 2t + \frac{(2+A)}{4}\text{Cos h }(2t)$$

$$+ \frac{(2+A)}{4}\text{Sin } 2t + \frac{B}{8}\text{Cos h }(2t) - \frac{B}{16}\text{Cos } 2t \qquad \text{..........(5)}$$

$$y''(t) = \frac{3}{5}\text{Sin h }(2t) + 2\text{ Sin } t - \frac{5}{2}\text{Sin } 2t + \frac{(2+A)}{4}\text{Sin h }(2t)$$

$$+ \frac{(2+A)}{2}\text{Cos } 2t + \frac{B}{4}\text{Sin h }(2t) + \frac{B}{8}\text{Sin } 2t \qquad \text{..........(6)}$$

แต่ $y'(\pi) = 2$ แทนค่า $t = \pi$ ลงใน (5) จะได้

$$2 = \frac{3}{10}\text{Cos h }(2\pi) - 2(-1) + \frac{5}{4}(1) + \frac{(2+A)}{4}\text{Cos h }(2\pi)$$

$$+ \frac{(2+A)}{4}(0) + \frac{B}{8}\text{Cos h }(2\pi) - \frac{B}{16}(1)$$

9. $y'' + 4y = f(t)$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

เมื่อ $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{f(t)\}$$

$$[s^2 L\{y\} - s\,y(0) - y'(0)] + 4L\{y\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$(s^2+4)L\{y\} - 1 = \int_0^1 (1)\,e^{-st}\,dt + \int_1^\infty (0)\,e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^1 + 0$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}$$

หรือ
$$L\{y\} = \frac{1-e^{-s}}{s(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+4}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \quad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

หรือ
$$1 = A(s^2+4) + s(Bs+C)$$

แทนค่า $s = 0$

$$A = \frac{1}{4}$$

แทนค่า $s = 2i$

$$1 = 2i\,(2iB + C)$$

$$= -4B + 2Ci$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$B = -\frac{1}{4} \text{ และ } C = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4}\text{Cos } 2t \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\cdot e^{-s}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(1)\,u(t-1) - \frac{1}{4}\text{Cos } 2(t-1) \qquad \text{..........(3)}$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\text{Sin } 2t \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า (2), (3) และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\text{Cos } 2t - \frac{1}{4}u(t-1) + \frac{1}{4}\text{Cos }(2t-2) + \frac{1}{2}\text{Sin } 2t$$

หรือ

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{Sin } 2t + \frac{1}{4}\{\text{Cos }(2t-2) - \text{Cos } 2t\}\ ; & t > 1 \\ \frac{1}{2}\text{Sin } 2t + \frac{1}{4}(1 - \text{Cos } 2t)\ ; & t < 1 \end{cases}$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัด 4.2

จงหาคำตอบของระบบสมการ

1. $$y' + z' = t \qquad \text{..........(1)}$$

$$y'' - z = e^{-t} \qquad \text{..........(2)}$$

ซึ่งมีเงื่อนไข $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$ และ $z(0) = 0$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\{y'\} + L\{z'\} = L\{t\}$$

$$[sL\{y\} - y(0)] + [sL\{z\} - z(0)] = \frac{1}{s^2}$$

$$sL\{y\} - 3 + sL\{z\} - 0 = \frac{1}{s^2}$$

หรือ $$L\{y\} + L\{z\} = \frac{3s^2+1}{s^3} \qquad \text{..........(3)}$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2)

$$L\{y''\} - L\{z\} = L\{e^{-t}\}$$

$$[s^2L\{y\} - s\,y(0) - y'(0)] - L\{z\} = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2L\{y\} - 3s + 2 - L\{z\} = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2L\{y\} - L\{z\} = \frac{1}{s+1} + 3s - 2$$

หรือ $$s^2L\{y\} - L\{z\} = \frac{3s^2+s-1}{s+1} \qquad \text{..........(4)}$$

ใช้ตัวกำหนด (determinant) ช่วยหาค่า $L\{y\}$ และ $L\{z\}$ จาก (3) และ (4) จะได้

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{3s^2+1}{s^3} & 1 \\ \dfrac{3s^2+s-1}{s+1} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\dfrac{(3s^2+1)}{s^3} - \dfrac{(3s^2+s-1)}{s+1}}{-1-s^2}$$

$$= \frac{(3s^2+1)(s+1)+(3s^2+s-1)s^3}{s^3(s+1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{3s^3+3s^2+s+1+3s^5+s^4-s^3}{s^3(s+1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{s^3(s+1)(s^2+1)}$$

หรือ

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{s^3(s+1)(s^2+1)}\right\}$$

แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{s^3(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} + \frac{Es+F}{s^2+1}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์ หาค่า C, D, E และ F โดยแทนค่าราก $s = 0, -1$ และ i ตามลำดับ ดังนั้น

$$C = \left.\frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{(s+1)(s^2+1)}\right|_{s=0} = 1$$

$$D = \left.\frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{s^3(s^2+1)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$Es+F = \left.\frac{3s^5+s^4+2s^3+3s^2+s+1}{s^3(s+1)}\right|_{s=i}$$

$$Ei + F = \frac{3(i)^5 + (i)^4 + 2(i)^3 + 3(i)^2 + (i) + 1}{(i)^3 (i + 1)}$$

$$= \frac{3i + 1 - 2i - 3 + i + 1}{(1 - i)}$$

$$= \frac{-1 + 2i}{1 - i} \times \frac{(1 + i)}{(1 + i)}$$

$$= \frac{-1 + i - 2}{1 + 1}$$

$$= \frac{-3 + i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$$

ดังนั้น เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$E = \frac{1}{2} \text{ และ } F = -\frac{3}{2}$$

หลังจากที่แทนค่ารากหมดแล้ว แต่ยังมีค่า A, B ที่ยังไม่ทราบค่า ให้เลือกแทนค่า s อีกสองค่า เพื่อหาค่าของ A, B โดยเลือกค่า s เป็นค่าอะไรก็ได้ แต่ต้องไม่ซ้ำกับค่ารากที่ใช้ไปแล้ว นั่นคือ

ถ้าเลือก $s = 1$ จะได้

$$\frac{3(1)^5 + (1)^4 + 2(1)^3 + 3(1)^2 + (1) + 1}{(1)^3 (1 + 1)(1 + 1)} = \frac{A}{1} + \frac{B}{(1)^2} + \frac{1}{(1)^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + 1} + \frac{\frac{1}{2}(1) - \frac{3}{2}}{1 + 1}$$

$$\frac{11}{4} = A + B + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$A + B = \frac{11}{4} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2 \qquad \text{..........(5)}$$

ถ้าเลือก $s = -2$ จะได้

$$\frac{3(-2)^5 + (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) + 1}{(-2)^3 (-2 + 1)(4 + 1)} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{(-2)^2} + \frac{1}{(-2)^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{-2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}(-2) - \frac{3}{2}}{4 + 1}$$

$$-\frac{85}{40} = -\frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{2} - \frac{B}{4} = \frac{85}{40} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

เอา 4 คูณตลอด

$$2A - B = 4 \qquad \text{..........(6)}$$

$$(5) + (6) \qquad 3A = 6$$

$$A = 2$$

แทนค่า A ลงใน (1) จะได้

$$B = 2 - 2 = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,t - \frac{3}{2}\mathrm{Sin}\,t$$ **ตอบ**

จาก (3) และ (4) หาค่า $z(t)$ โดยใช้ตัวกำหนด จะได้

$$L\{z\} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{3s^2+1}{s^3} \\ s^2 & \frac{3s^2+s-1}{s+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s^2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\dfrac{3s^2 + s - 1}{s + 1} - s^2\,\dfrac{(3s^2 + 1)}{s^3}}{-1 - s^2}$$

$$= \frac{s(3s^2 + s - 1) - (s + 1)(3s^2 + 1)}{-s(s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$= \frac{3s^3 + s^2 - s - 3s^3 - 3s^2 - s - 1}{-s(s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$= \frac{-2s^2 - 2s - 1}{-s(s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$= \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)(s^2 + 1)}$$

หรือ $$z(t) = L^{-1}\left\{ \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)(s^2 + 1)} \right\}$$

แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์ จะได้

$$A = \frac{2s^2 + 2s + 1}{(s + 1)(s^2 + 1)} \Bigg|_{s=0} = 1$$

$$B = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s^2 + 1)} \Bigg|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$Cs + D = \frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)} \Bigg|_{s=i}$$

$$Ci + D = \frac{2(i)^2 + 2(i) + 1}{i(i + 1)}$$

$$= \frac{-2 + 2i + 1}{(-1 + i)}$$

$$= \frac{-1 + 2i}{-1 + i} \times \frac{(-1 - i)}{(-1 - i)}$$

$$= \frac{1 - i + 2}{1 + 1}$$

$$= \frac{3 - i}{2}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$D = \frac{3}{2} \quad \text{และ} \quad C = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$z(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+1} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)s + \frac{3}{2}}{s^2+1}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\text{Cos}\,t + \frac{3}{2}\text{Sin}\,t$$ **ตอบ**

2. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$y' - z' - 2y + 2z = \text{Sin}\,t \qquad \text{..........(1)}$$

$$y'' + 2z' + y = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้า $y(0) = y'(0) = z(0) = 0$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\{y'\} - L\{z'\} - 2L\{y\} + 2L\{z\} = L\{\text{Sin}\,t\}$$

$$[sL\{y\} - y(0)] - [sL\{z\} - z(0)] - 2L\{y\} + 2L\{z\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-2)L\{y\} - (s-2)L\{z\} = \frac{1}{s^2+1}$$

หรือ $$L\{y\} - L\{z\} = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)} \qquad \text{..........(3)}$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2)

$$L\{y''\} + 2L\{z'\} + L\{y\} = L\{0\}$$

$$[s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)] + 2[sL\{z\} - z(0)] + L\{y\} = 0$$

$$(s^2+1)\,L\{y\} + 2s\,L\{z\} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

จาก (3) และ (4) หาค่า $L\{y\}$ และ $L\{z\}$ โดยใช้ตัวกำหนด (determinant)

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{(s-2)(s^2+1)} & -1 \\ 0 & 2s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2+1 & 2s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\dfrac{2s}{(s-2)(s^2+1)}}{2s+(s^2+1)}$$

$$= \frac{2s}{(s-2)(s^2+1)(s^2+2s+1)}$$

$$= \frac{2s}{(s-2)(s+1)^2(s^2+1)}$$

หรือ $$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s-2)(s+1)^2(s^2+1)}\right\}$$

แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{2s}{(s-2)(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์จะได้

$$A = \frac{2s}{(s+1)^2(s^2+1)}\bigg|_{s=2} = \frac{4}{45}$$

$$C = \frac{2s}{(s-2)(s^2+1)}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

$$Ds+E = \frac{2s}{(s-2)(s+1)^2}\bigg|_{s=i}$$

$$Di+E = \frac{2i}{(i-2)(i+1)^2}$$

$$= \frac{2i}{(i-2)(-1+2i+1)}$$

$$= \frac{2i}{2i(i-2)} \times \frac{(-i-2)}{(-i-2)}$$

$$= \frac{-i-2}{1+4}$$

$$= -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$D = -\frac{1}{5} \quad \text{และ} \quad E = -\frac{2}{5}$$

เลือกแทนค่า s อีกหนึ่งค่า เพื่อหาค่าของ B ให้ s = 1

$$\frac{2(1)}{(1-2)(1+1)^2(1+1)} = \frac{\left(\frac{4}{45}\right)}{1-2} + \frac{B}{1+1} + \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)(1) + \left(-\frac{2}{5}\right)}{1+1}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{4}{45} + \frac{B}{2} + \frac{1}{12} - \frac{3}{10}$$

$$\frac{B}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{4}{45} - \frac{1}{12} + \frac{3}{10} = \frac{1}{18}$$

$$B = \frac{1}{9}$$

ดังนั้น

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{45}}{(s-2)} + \frac{\frac{1}{9}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2} - \left\{\frac{\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{(s^2+1)}\right\}\right.$$

$$= \frac{4}{45} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} + \frac{1}{9} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$- \frac{1}{5} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} - \frac{2}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}$$

$$y(t) = \frac{4}{45} e^{2t} + \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{-t} - \frac{1}{5} \operatorname{Cos} t - \frac{2}{5} \operatorname{Sin} t$$

ตอบ

หาค่า z(t) โดยวิธีเดียวกันนี้

$$z(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{(s-2)(s^2+1)} \\ s^2+1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2+1 & 2s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\frac{s^2+1}{(s-2)(s^2+1)}}{2s + s^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{(s-2)(s+1)^2}$$

หรือ $z(t) = L^{-1} \left\{ \frac{-1}{(s-2)(s+1)^2} \right\}$

แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{-1}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์

$$A = \left. \frac{-1}{(s+1)^2} \right|_{s=2} = -\frac{1}{9}$$

$$C = \left. \frac{-1}{(s-2)} \right|_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

เลือกแทนค่า $s = 0$ เพื่อหาค่าของ B จะได้

$$\frac{-1}{(-2)(1)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{9}\right)}{-2} + \frac{B}{1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{(1)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{18} + B + \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

ดังนั้น

$$z(t) = L^{-1}\left\{ \frac{\left(-\frac{1}{9}\right)}{s-2} + \frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{s+1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{(s+1)^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}t\,e^{-t}$$ **ตอบ**

3. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x' + 2y'' = e^{-t} \qquad \text{..........(1)}$$

$$x' + 2x - y = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้า $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\{x'\} + 2L\{y''\} = L\{e^{-t}\}$$

$$[sL\{x\} - x(0)] + 2[s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)] = \frac{1}{s+1}$$

$$sL\{x\} + 2s^2L\{y\} = \frac{1}{s+1} \qquad \text{..........(3)}$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2)

$$L\{x'\} + 2L\{x\} - L\{y\} = L\{1\}$$

$$[sL\{x\} - x(0)] + 2L\{x\} - L\{y\} = \frac{1}{s}$$

$$(s+2)L\{x\} - L\{y\} = \frac{1}{s} \qquad \text{..........(4)}$$

หาค่า $L\{x\}$ และ $L\{y\}$ โดยใช้ตัวกำหนด (determinant) จาก (3) และ (4) จะได้

$$L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 2s^2 \\ \frac{1}{s} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 2s^2 \\ s+2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{-1}{s+1} - 2s}{-s - 2s^2(s+2)}$$

$$= \frac{-1 - 2s(s+1)}{(s+1)\{-s - 2s^3 - 4s^2\}}$$

$$= \frac{-(2s^2 + 2s + 1)}{(s+1)(-2s)\left(s^2 + 2s + \frac{1}{2}\right)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{ \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s(s+1)(s^2 + 2s + \frac{1}{2})} \right\}$$

เพราะว่า

$$s^2 + 2s + \frac{1}{2} = s^2 + 2s + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= (s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

พิจารณา

$$\frac{2s^2 + 2s + 1}{s(s+1)(s^2 + 2s + \frac{1}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + \frac{1}{2}}$$

หรือ $2s^2 + 2s + 1 = A(s+1)(s^2 + 2s + \frac{1}{2}) + Bs(s^2 + 2s + \frac{1}{2})$

$$+ s(Cs + D)(s+1)$$

แทนค่า $s = 0$

$$A = 2$$

แทนค่า $s = -1$

$$2(-1)^2 + 2(-1) + 1 = B(-1)\left\{(-1)^2 + 2(-1) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$B = 2$$

แทนค่า $s = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$2\left\{-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right\}^2 + 2\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) + 1 = 0 + 0 + \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$$\left\{C\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) + D\right\}$$

$$\times\left\{\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) + 1\right\}$$

$$2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\, i\right) - 2 + \sqrt{2}\, i + 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} i\right)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)\left\{-C + \frac{1}{\sqrt{2}} Ci + D\right\}$$

$$1 - 2\sqrt{2}\, i - 2 + \sqrt{2}\, i + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)\left\{(D - C) + \frac{1}{\sqrt{2}} Ci\right\}$$

$$-\sqrt{2}\, i = -\frac{1}{2}(D - C) - \frac{1}{2\sqrt{2}} Ci - \frac{1}{\sqrt{2}}(D - C)\, i + \frac{1}{2} C$$

$$= \left(C - \frac{1}{2} D\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} C - \frac{1}{\sqrt{2}} D\right) i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$C - \frac{1}{2} D = 0$$

หรือ $$C = \frac{D}{2}$$

และ $$\frac{1}{\sqrt{2}}(C - D) = -\sqrt{2}$$

แทนค่า $C = \frac{D}{2}$ จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{D}{2} - D\right) = -\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{D}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$D = 4$$

ดังนั้น

$$x(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{2s+4}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 1 + e^{-t} + L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 1 + e^{-t} + L^{-1}\left\{\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 1 + e^{-t} + e^{-t}\,\mathrm{Cos\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t + \sqrt{2}\,e^{-t}\,\mathrm{Sin\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$= 1 + e^{-t}\left(1 + \mathrm{Cos\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t + \sqrt{2}\,\mathrm{Sin\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$$ **ตอบ**

โดยวิธีเดียวกัน จาก (3) และ (4)

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s+1} \\ s+2 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 2s^2 \\ s+2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1 - \frac{s+2}{s+1}}{-2s\left(s^2 + 2s + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{s+1-s-2}{-2s(s+1)\left(s^2+2s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2s(s+1)(s^2+2s+\frac{1}{2})}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+\frac{1}{2})} = \frac{E}{s} + \frac{F}{s+1} + \frac{Gs+H}{s^2+2s+\frac{1}{2}}$$

หรือ

$$1 = E(s+1)(s^2+2s+\frac{1}{2}) + Fs(s^2+2s+\frac{1}{2}) + s(s+1)(Gs+H)$$

แทนค่า $s = 0$

$$E = 2$$

แทนค่า $s = -1$

$$F = 2$$

แทนค่า $s = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$\begin{aligned}
1 &= \left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left\{\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)+1\right\}\left\{G\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)+H\right\} \\
&= \left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left\{(-G+H)+\frac{1}{\sqrt{2}}Gi\right\} \\
&= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left\{(-G+H)+\frac{1}{\sqrt{2}}Gi\right\} \\
&= \left\{-\frac{1}{2}(-G+H)+\frac{1}{2}G\right\} - \left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}G+\frac{1}{\sqrt{2}}(-G+H)\right\}i \\
&= \left(G-\frac{1}{2}H\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(H-\frac{1}{2}G\right)i
\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$G - \frac{1}{2}H = 1 \qquad \text{..........(5)}$$

และ $$\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(H-\frac{1}{2}G\right) = 0 \qquad \text{..........(6)}$$

จาก (6)

$$H - \frac{1}{2}G = 0$$

$$H = \frac{1}{2}G \qquad \text{..........(7)}$$

แทนค่า (7) ลงใน (5) จะได้

$$G - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G\right) = 1$$

$$G - \frac{G}{4} = 1$$

$$\frac{3G}{4} = 1$$

$$G = \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น $\quad H = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$

ดังนั้น

$$y(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{4}{3}s + \frac{2}{3}}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{s + \frac{1}{2}}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 1 + e^{-t} + \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{(s+1) - \frac{1}{2}}{(s+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 1 + e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-t}\,\mathrm{Cos\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\,\mathrm{Sin\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-t}}{3}\left(3 + 2\,\mathrm{Cos\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t - \sqrt{2}\,\mathrm{Sin\,h}\,\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \qquad \textbf{ตอบ}$$

5. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$y' + y + 2z' + 3z = e^{-t} \qquad \text{..........(1)}$$

$$3y' - y + 4z' + z = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

เมื่อ $y(0) = 0, z(0) = 1$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\{y'\} + L\{y\} + 2L\{z'\} + 3L\{z\} = L\{e^{-t}\}$$

$$[sL\{y\} - y(0)] + L\{y\} + 2[sL\{z\} - z(0)] + 3L\{z\} = \frac{1}{s+1}$$

$$(s+1)L\{y\} + (2s+3)L\{z\} = \frac{1}{s+1} + 2$$

$$= \frac{2s+3}{s+1} \qquad \text{..........(3)}$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2)

$$3L\{y'\} - L\{y\} + 4L\{z'\} + L\{z\} = 0$$

$$3[sL\{y\} - y(0)] - L\{y\} + 4[sL\{z\} - z(0)] + L\{z\} = 0$$

$$(3s-1)L\{y\} + (4s+1)L\{z\} = 4 \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2s+3}{s+1} & 2s+3 \\ 4 & 4s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+3 \\ 3s-1 & 4s+1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{(2s+3)(4s+1)}{s+1} - 4(2s+3)}{(s+1)(4s+1) - (2s+3)(3s-1)}$$

$$= \frac{\dfrac{8s^2 + 14s + 3 - 4(2s + 3)(s + 1)}{s + 1}}{4s^2 + 5s + 1 - 6s^2 - 7s + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{8s^2 + 14s + 3 - 8s^2 - 20s - 12}{s + 1}}{-2s^2 - 2s + 4}$$

$$= \frac{-6s - 9}{-2(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$$= \frac{6s + 9}{2(s + 1)(s^2 + s - 2)}$$

$$= \frac{6s + 9}{2(s + 1)(s - 1)(s + 2)}$$

หรือ $$y(t) = \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{6s + 9}{(s + 1)(s - 1)(s + 2)} \right\}$$

แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{6s + 9}{(s + 1)(s - 1)(s + 2)} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s - 1)} + \frac{C}{(s + 2)}$$

หาค่า A, B, C โดยใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์จะได้

$$A = \left.\frac{6s + 9}{(s - 1)(s + 2)}\right|_{s = -1} = -\frac{3}{2}$$

$$B = \left.\frac{6s + 9}{(s + 1)(s + 2)}\right|_{s = 1} = \frac{5}{2}$$

$$C = \left.\frac{6s + 9}{(s + 1)(s - 1)}\right|_{s = -2} = -1$$

ดังนั้น

$$y(t) = \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{-\frac{3}{2}}{s + 1} + \frac{\frac{5}{2}}{s - 1} + \frac{(-1)}{s + 2} \right\}$$

$$= -\frac{3}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} \right\} + \frac{5}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 1} \right\} - \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\}$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

หรือ $y(t) = \frac{1}{4}(-2e^{-2t} - 3e^{-t} + 5e^{t})$ **ตอบ**

โดยวิธีเดียวกันนี้จะได้

$$L\{z\} = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{2s+3}{s+1} \\ 3s-1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+3 \\ 3s-1 & 4s+1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{4(s+1) - \frac{(2s+3)(3s-1)}{s+1}}{-2(s^2+s-2)}$$

$$= \frac{4(s+1)(s+1) - (2s+3)(3s-1)}{-2(s+1)(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{4s^2+8s+4-6s^2-7s+3}{-2(s+1)(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{-2s^2+s+7}{-2(s+1)(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{2s^2-s-7}{2(s+1)(s-1)(s+2)}$$

หรือ $z(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2s^2-s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}\right\}$

พิจารณา

$$\frac{2s^2-s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \left.\frac{2s^2-s-7}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$

$$B = \left.\frac{2s^2-s-7}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=1} = -1$$

$$C = \frac{2s^2 - s - 7}{(s+1)(s-1)}\Bigg|_{s=-2} = 1$$

ดังนั้น

$$z(t) = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{(2)}{(s+1)} + \frac{(-1)}{(s-1)} + \frac{(1)}{(s+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(2e^{-t} - e^{t} + e^{-2t})$$ **ตอบ**

6. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$(D+1)y + (2D+3)z = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$(D-4)y + (3D-8)z = \text{Sin } t \qquad \text{..........(2)}$$

เมื่อ $y(0) = -1$ และ $z(0) = 0$, $D = \frac{d}{dt}$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\{y'\} + L\{y\} + 2L\{z'\} + 3L\{z\} = 0$$

$$[sL\{y\} - y(0)] + L\{y\} + 2[sL\{z\} - z(0)] + 3L\{z\} = 0$$

$$(s+1)L\{y\} + (2s+3)L\{z\} = -1 \qquad \text{..........(3)}$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2)

$$L\{y'\} - 4L\{y\} + 3L\{z'\} - 8L\{z\} = L\{\text{Sin } t\}$$

$$[sL\{y\} - y(0)] - 4L\{y\} + 3[sL\{z\} - z(0)] - 8L\{z\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-4)L\{y\} + (3s-8)L\{z\} = \frac{1}{s^2+1} - 1$$

$$= \frac{-s^2}{s^2+1} \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2s+3 \\ \frac{-s^2}{s^2+1} & 3s-8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+3 \\ s-4 & 3s-8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-3s + 8 + \frac{s^2(2s+3)}{s^2+1}}{(s+1)(3s-8) - (s-4)(2s+3)}$$

$$= \frac{\frac{(-3s+8)(s^2+1) + s^2(2s+3)}{s^2+1}}{3s^2 - 5s - 8 - 2s^2 + 5s + 12}$$

$$= \frac{-3s^3 + 8s^2 - 3s + 8 + 2s^3 + 3s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{-s^3 + 11s^2 - 3s + 8}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

พิจารณา

$$\frac{-s^3 + 11s^2 - 3s + 8}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

หรือ $-s^3 + 11s^2 - 3s + 8 = (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1)$

แทนค่า $s = i$

$$-(i)^3 + 11(i)^2 - 3(i) + 8 = (Ai + B)(-1 + 4)$$

$$i - 11 - 3i + 8 = (Ai + B)(3)$$

$$-2i - 3 = 3Ai + 3B$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$A = -\frac{2}{3} \text{ และ } B = -1$$

แทนค่า $s = 2i$

$$-(2i)^3 + 11(2i)^2 - 3(2i) + 8 = (2Ci + D)(-4 + 1)$$

$$8i - 44 - 6i + 8 = -6Ci - 3D$$

$$2i - 36 = -6Ci - 3D$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$C = -\frac{1}{3} \quad \text{และ } D = 12$$

ดังนั้น

$$y(t) = L^{-1}\left\{ \frac{-\frac{2}{3}s - 1}{s^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{3}s + 12}{s^2 + 4} \right\}$$

$$= -\frac{2}{3}L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}$$

$$-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} + 6L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\}$$

$$= -\frac{2}{3}\operatorname{Cos} t - \operatorname{Sin} t - \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 2t + 6\operatorname{Sin} 2t$$ **ตอบ**

โดยวิธีเดียวกันนี้ จะได้

$$L\{z\} = \frac{\begin{vmatrix} s + 1 & -1 \\ s - 4 & \frac{-s^2}{s^2 + 1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 1 & 2s + 3 \\ s - 4 & 3s - 8 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{-s^2(s + 1)}{s^2 + 1} + (s - 4)}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{-s^2(s + 1) + (s - 4)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$= \frac{-s^3 - s^2 + s^3 - 4s^2 + s - 4}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{-5s^2 + s - 4}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

พิจารณา

$$\frac{-5s^2 + s - 4}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

หรือ $-5s^2 + s - 4 = (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1)$

แทนค่า $s = i$

$$-5(i)^2 + (i) - 4 = (Ai+B)(-1+4)$$

$$5 + i - 4 = 3Ai + 3B$$

$$1 + i = 3Ai + 3B$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A = \frac{1}{3} \text{ และ } B = \frac{1}{3}$$

แทนค่า $s = 2i$

$$-5(2i)^2 + (2i) - 4 = (2Ci+D)(-4+1)$$

$$20 + 2i - 4 = -6Ci - 3D$$

$$16 + 2i = -3D - 6Ci$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$D = -\frac{16}{3} \text{ และ } C = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น

$$z(t) = L^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2+1} + \frac{-\frac{1}{3}s - \frac{16}{3}}{s^2+4} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$- \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{8}{3} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{Cos} t + \frac{1}{3}\operatorname{Sin} t - \frac{1}{3}\operatorname{Cos} 2t - \frac{8}{3}\operatorname{Sin} 2t$$ **ตอบ**

เฉลยแบบฝึกหัด 4.3

1. ตามรูป 4.1 กำหนดว่า มวล m มีแรง $f(t)$; $t > 0$ แต่ไม่มีแรงหน่วง (damping force) เข้ามาเกี่ยวข้อง

   (ก) จงแสดงว่าถ้ามวลเริ่มจากจุดพักที่ระยะ $X = a$ จากตำแหน่งสมดุล $(X = 0)$ ดังนั้นระยะขจัด X ที่เวลา t ใด ๆ สามารถหาได้จากสมการการเคลื่อนที่

$$mX'' + kX = f(t) ; X' = \frac{d}{dt} X$$

$$X(0) = a; X'(0) = 0$$

   (ข) จงหา X ที่เวลา t ใด ๆ ถ้า $f(t) = F_0$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ สำหรับ $t > 0$

   (ค) จงหา X ที่เวลา t ใด ๆ ถ้า $f(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ เมื่อ $\alpha > 0$

วิธีทำ (ก) กรณีที่มวล m มีแรง $f(t)$ มากระทำ แต่ไม่มีแรงหน่วงเข้ามาเกี่ยวข้อง สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$mX'' = -kX + f(t)$$

หรือ

$$mX'' + kX = f(t)$$

(ข) ถ้า $f(t) = F_0$

$$mX'' + kX = F_0$$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$m L\{X''\} + k L\{X\} = L\{F_0\}$$

$$m[s^2 L\{X\} - s X(0) - X'(0)] + k L\{X\} = \frac{F_0}{s}$$

เอา m หารตลอดสมการ

$$s^2 L\{X\} - as + \frac{k}{m} L\{X\} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right) L\{X\} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{s} + as$$

$$L\{X\} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{s\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} + \frac{as}{\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}$$

หรือ
$$X = \frac{F_0}{m} L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}\right\}$$
$$+ a L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{k}{m}}\right\}.$$

พิจารณา
$$\frac{1}{s\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+\frac{k}{m}}$$

หรือ
$$1 = A\left(s^2+\frac{k}{m}\right) + s(Bs+C)$$
$$A = \frac{1}{s^2+\frac{k}{m}}\Bigg|_{s=0} = \frac{m}{k}$$
$$Bs+C = \frac{1}{s}\Bigg|_{s=\sqrt{\frac{k}{m}}i}$$
$$B\sqrt{\frac{k}{m}}\,i + C = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}\,i} = -\sqrt{\frac{m}{k}}\,i$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้
$$B = -\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} = -\frac{m}{k}$$
$$C = 0$$

ดังนั้น
$$X(t) = \frac{F_0}{m} L^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{m}{k}\right)}{s} - \frac{\left(\frac{m}{k}\right)s}{\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}\right\} + a\,\mathrm{Cos}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$
$$= \frac{F_0}{m}\cdot\frac{m}{k}\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{F_0}{m}\cdot\frac{m}{k}\,L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}\right\}$$

$$+ \ a \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k} \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + a \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= a \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{F_0}{k}\left(1 - \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$ **ตอบ**

(ค) ถ้า $f(t) = F_0 e^{-\alpha t}$; $\alpha > 0$ เพราะฉะนั้น

$$mX'' + kX = F_0 e^{-\alpha t}$$

ใส่การแปลงลาปลาซ

$$m L\{X''\} + k L\{X\} = F_0 L\{e^{-\alpha t}\}$$

$$m[s^2 L\{X\} - s X(0) - X'(0)] + k L\{X\} = F_0 \frac{1}{s+\alpha}$$

เอา m หารตลอดสมการ

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right) L\{X\} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{s+\alpha} + as$$

$$L\{X\} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s+\alpha)\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} + \frac{as}{s^2+\frac{k}{m}}$$

หรือ

$$X(t) = \frac{F_0}{m} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}\right\} + a L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{k}{m}}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s+\alpha)\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{Bs+C}{s^2+\frac{k}{m}}$$

หรือ

$$1 = A\left(s^2+\frac{k}{m}\right) + (s+\alpha)(Bs+C)$$

แทนค่า $s = -\alpha$

$$A = \frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}}\Bigg|_{s = \alpha} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$$

แทนค่า $s = \sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

$$1 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, i + \alpha\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, Bi + C\right)$$

$$= -\frac{k}{m} B + \alpha C + \sqrt{\frac{k}{m}}\,(B\alpha + C)\, i$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$-\frac{k}{m} B + \alpha C = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

และ $$B\alpha + C = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (2) $$C = -B\alpha$$

แทนค่า C ลงใน (1)

$$-\frac{k}{m} B + \alpha(-B\alpha) = 1$$

$$-B\left(\frac{k}{m} + \alpha^2\right) = 1$$

$$B = \frac{-1}{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$$

และ $$C = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$$

ดังนั้น

$$X(t) = \frac{F_0}{m} L^{-1}\left\{ \frac{\left(\frac{1}{\alpha^2 + \frac{k}{m}}\right)}{s + \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 + \frac{k}{m}} \frac{(-s + \alpha)}{s^2 + \frac{k}{m}} \right\}$$

$$+ a \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right)} e^{-\alpha t} - \frac{F_0}{m\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right)}$$

$$\left[\text{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ Sin} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right]$$

$$+ \text{ a Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} e^{-\alpha t} - \frac{F_0}{(m\alpha^2 + k)} \text{ Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$+ \frac{\alpha F_0 \sqrt{\frac{m}{k}}}{(m\alpha^2 + k)} \text{ Sin} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \text{aCos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= \text{a Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{F_0}{(m\alpha^2 + k)} \left[e^{-\alpha t} - \text{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right]$$

$$+ \frac{\alpha F_0 \sqrt{\frac{m}{k}}}{m\alpha^2 + k} \text{ Sin} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

ตอบ

2. จากปัญหาข้อ 1 ถ้า $f(t) = F_0 \text{ Sin wt}$ ให้พิจารณาในสองกรณี คือ

(ก) $w \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$

(ข) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

วิธีทำ ถ้า $f(t) = F_0 \text{ Sin wt}$ ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่คือ

$$mX'' + kX = F_0 \text{ Sin wt}$$

หรือ

$$X'' + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m} \text{ Sin wt}$$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{X''\} + \frac{k}{m} L\{X\} = \frac{F_0}{m} L\{\text{Sin wt}\}$$

$$[s^2 L\{X\} - s\,X(0) - X'(0)] + \frac{k}{m} L\{X\} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right) L\{X\} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{w}{s^2 + w^2} + as$$