$$L(X) = \frac{F_0}{m}\frac{w}{(s^2+w^2)\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} + \frac{as}{s^2+\frac{k}{m}}$$

แยกพิจารณาเป็น 2 กรณี

(ก) $w \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(s^2+\frac{k}{m}\right)} = \frac{As+B}{s^2+w^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\frac{k}{m}}$$

หรือ $$w = (As+B)\left(s^2+\frac{k}{m}\right) + (Cs+D)(s^2+w^2)$$

แทนค่า $s = wi$

$$w = (Awi+B)\left(-w^2+\frac{k}{m}\right)$$

$$= Aw\left(\frac{k}{m}-w^2\right)i + B\left(\frac{k}{m}-w^2\right)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$Aw\left(\frac{k}{m}-w^2\right) = 0$$

แต่ $w \neq 0$, $A = 0$

และ $$B\left(\frac{k}{m}-w^2\right) = w$$

$$B = \frac{w}{\left(\frac{k}{m}-w^2\right)} = \frac{-mw}{(mw^2-k)}$$

แทนค่า $s = \sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

$$w = \left(C\sqrt{\frac{k}{m}}\,i + D\right)\left(-\frac{k}{m}+w^2\right)$$

$$= C\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{k}{m}+w^2\right)i + D\left(-\frac{k}{m}+w^2\right)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$C\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{k}{m}+w^2\right) = 0$$

แต่ $\frac{k}{m} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $C = 0$

และ $D\left(-\frac{k}{m}+w^2\right) = w$

$$D = \frac{w}{\left(-\frac{k}{m}+w^2\right)} = \frac{mw}{(mw^2 - k)}$$

ดังนั้น

$$L\{X\} = \frac{F_0}{m}\left[-\frac{\frac{-mw}{(mw^2-k)}}{s^2+w^2} + \frac{\frac{mw}{(mw^2-k)}}{\left(s^2+\frac{k}{m}\right)}\right] + \frac{as}{s^2+\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{-F_0}{(mw^2-k)}\left[\frac{w}{s^2+w^2}\right] + \frac{F_0 w}{(mw^2-k)} \times$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}}\right] + \frac{as}{s^2+\frac{k}{m}}$$

$$X(t) = \frac{-F_0}{(mw^2-k)} L^{-1}\left\{\frac{w}{s^2+w^2}\right\} + \frac{F_0 w}{(mw^2-k)} \times$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\, L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}}\right\} + a L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{k}{m}}\right\}$$

$$= \frac{-F_0 \operatorname{Sin} wt}{(mw^2 - k)} + \frac{F_0 w}{(mw^2 - k)} \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + a \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

$$= \frac{F_0}{(mw^2 - k)} \left[w \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t \quad \operatorname{Sin} wt \right] + a \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

ตอบ

(ข) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ดังนั้น

$$L\{X\} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{w}{(s^2 + w^2)^2} \right] + \frac{as}{s^2 + w^2}$$

$$X(t) = \frac{F_0}{m} L^{-1} \left\{ \frac{w}{(s^2 + w^2)^2} \right\} + a L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + w^2} \right\}$$

เพราะว่า $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right\} = \frac{\operatorname{Sin} at \quad at \operatorname{Cos} at}{2a^3}$

เพราะฉะนั้น

$$X(t) = \frac{F_0}{m} w \left\{ \frac{\operatorname{Sin} wt - wt \operatorname{Cos} wt}{2w^3} \right\} + a \operatorname{Cos} wt$$

$$= \frac{F_0}{2mw^2} (\operatorname{Sin} wt - wt \operatorname{Cos} wt) + a \operatorname{Cos} wt$$

$$= \frac{F_0 \operatorname{Sin} wt}{2mw^2} + \left(a - \frac{F_0 t}{2mw} \right) \operatorname{Cos} wt$$ **ตอบ**

3. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง ดังนั้น ระยะขจัด X จากจุดตรึง O ที่เวลา t ใด ๆ ถูกกำหนดโดย

$$X''(t) + 4X(t) + 5X'(t) = 80 \operatorname{Sin} 5t$$

(ก) ถ้าที่เวลา $t = 0$ อนุภาคหยุดอยู่ที่ $X = 0$ จงหาระยะขจัดที่เวลา t ใด ๆ

(ข) จงหาระยะขจัดสูงสุด (amplitude) คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ หลังจากเวลาผ่านไปนาน $(t \to \infty)$

(ค) พจน์ไหนจากคำตอบข้อ (ก) คือ พจน์ชั่วคราว (transient term) และพจน์ไหน คือ พจน์สภาวะมั่นคง (steady - state term)

(ง) การเคลื่อนที่ของโจทก์ข้อนี้เป็นลักษณะใด

วิธีทำ (ก) กำหนดให้สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$X''(t) + 4X'(t) + 5X(t) = 80 \sin 5t$$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{X''\} + 4L\{X'(t)\} + 5L\{X\} = 80\, L\{\sin 5t\}$$

$$[s^2 L\{X\} - s X(0) - X'(0)] + 4[sL\{X\} - X(0)] + 5L\{X\} = 80 \cdot \frac{5}{s^2+25}$$

โจทก์กำหนดให้ $X(0) = 0$ และ $X'(0) = 0$ ดังนั้น

$$(s^2 + 4s + 5)\, L\{X\} = \cdot 4 \quad \frac{0\ \ 0}{(s^2+25)}$$

$$L\{X\} = \frac{400}{(s^2+25)(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{400}{(s^2+25)\{(s+2)^2+1\}}$$

หรือ $$X(t) = 400\, L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+25)\ ((s+2)^2+1\}} \right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s^2+25)\ [(s+2)^2+1]} = \frac{As+B}{s^2+25} + \frac{Cs+D}{[(s+2)^2+1]}$$

หรือ $$1 = (As+B)[(s+2)^2+1] + (Cs+D)(s^2+25)$$

แทนค่า $s = 5i$

$$1 = (5Ai + B)[-25 + 20i + 5]$$

$$= (5Ai + B)(-20 + 20i)$$

$$= \quad 100A + (20B \quad 100A)i \quad 20B$$

$$= \quad -(100A + 20B) + (20B - 100A)i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$-100A - 20B = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

$$-100A + 20B = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

(1) + (2) $\qquad -200A = 1$

$$A = -\frac{1}{200}$$

แทนค่า A ใน (1)

$$-100\left(-\frac{1}{200}\right) - 20B = 1$$

$$\frac{1}{2} - 20B = 1$$

$$20B = -\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{40}$$

แทนค่า $s = -2 + i$

$$1 = \{C(-2+i) + D)\{(-2+i)^2 + 25)$$

$$= \{(-2C + D) + Ci\}\{3 - 4i + 25\}$$

$$= ((-2C + D) + Ci)\{28 - 4i\}$$

$$= 28(-2C + D) + (28C + 8C - 4D)i + 4C$$

$$= (-52C + 28D) + (36C - 4D)i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$-52C + 28D = 1 \qquad \text{..........(3)}$$

$$36C - 4D = 0 \qquad \text{..........(4)}$$

(4) × 7 $\quad 252C - 28D = 0$ ....(5)

(3) + (5) $\quad 200C = 1$

$$C = \frac{1}{200}$$

แทนค่า c ใน (4)

$$D = 9C = \frac{9}{200}$$

ดังนั้น

$$X(t) = 400\, L^{-1}\left\{ \frac{-\frac{1}{200}s - \frac{1}{40}}{s^2+25} + \frac{\frac{1}{200}s + \frac{9}{200}}{(s+2)^2+1} \right\}$$

$$= -2\, L^{-1}\left\{ \frac{s+5}{s^2+25} \right\} + 2\, L^{-1}\left\{ \frac{s+9}{(s+2)^2+1} \right\}$$

$$= -2\left[L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\}\right] + 2L^{-1}\left\{\frac{(s+2)+7}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$= -2\,(\text{Cos } 5t + \text{Sin } 5t) + 2\left[L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\}\right.$$

$$\left. + 7L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}\right]$$

$$= -2\,(\text{Cos } 5t + \text{Sin } 5t) + 2(e^{-2t}\,\text{Cos } t + 7e^{-2t}\,\text{Sin } t)$$

$$= 2e^{-2t}\,(\text{Cos } t + 7\,\text{Sin } t) - 2(\text{Cos } 5t + \text{Sin } 5t)$$

(ข)

amplitude (ระยะขจัดสูงสุด) $= 2\sqrt{2}$

เพราะว่าคาบของ Cos t และ Sin t คือ 2π และคาบของฟังก์ชัน Cos 5t และ Sin 5t คือ $\frac{2\pi}{5}$

ดังนั้น คาบของ

$$\text{Cost} + \text{Sin t} = 2\pi \quad \text{และ}$$

$$\text{Cos 5t} + \text{Sin 5t} = \frac{2\pi}{5}$$

เพราะฉะนั้น คาบของ X(t) คือ $\frac{2\pi}{5}$

$$\text{ความถี่} = \frac{1}{\text{คาบ}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2\pi}$$

(ค) พจน์ชั่วคราว $= 2e^{-2t}(\text{Cos t} + 7 \text{ Sin t})$

พจน์สภาวะมั่นคง $= -2(\text{Sin 5t} + \text{Cos 5t})$

(ง) เปรียบเทียบกับสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาค

$$X''(t) + 2\alpha X'(t) + w^2X = f(t)$$

จะได้

$$2a = 4 \qquad \text{และ} \quad w^2 = 5$$

$$\alpha = 2$$

$$\alpha^2 = 4$$

นั่นคือ จะได้ว่า $w^2 - \alpha^2 = 5 - 4 = 1 > 0$ สรุปได้ว่า การเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้เป็น "การแกว่งกวัดแบบหน่วง" (Damped Oscillatory)

4. กำหนดว่าที่ t = 0 มวล m ตามรูป 4.1 พักอยู่ที่ตำแหน่ง X = 0 กำหนดต่อไปว่ามีแรงมากระทำมวล m ทันทีทันใด เพื่อให้มวล m มีความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) V_0 ในทิศทางไปทางขวาแล้ว แรงนี้ก็หมดไป จงแสดงว่าระยะขจัดของมวลจากตำแหน่งสมดุลที่เวลา t ใด ๆ (t > 0) คือ

(ก) $V_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ Sin } \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$ ถ้าไม่มีแรงหน่วง

และ (ข) $\frac{V_0}{\gamma} e^{-\beta t/2m} \text{ Sin } \gamma t$

เมื่อ $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$ ถ้ามีแรงหน่วงซึ่งมีขนาด $-\beta X'(t)$ เมื่อ $\beta < 2\sqrt{km}$

วิธีทำ (ก) กรณีที่ไม่มีแรงหน่วง

$$mX''(t) = -kX$$

$$mX''(t) + kX(t) = 0$$

หรือ $$X''(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ จะได้

$$L\{X''\} + \frac{k}{m}L\{X\} = 0$$

$$s^2L\{X\} - sX(0) - X'(0) + \frac{k}{m}L\{X\} = 0$$

โจทย์กำหนดให้ $X(0) = 0$ และ $X'(0) = V_0$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)L\{X\} = v_0$$

$$L\{X\} = \frac{V_0}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

$$X(t) = L^{-1}\left\{\frac{V_0}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\}$$

$$= V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\}$$

$$= V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{Sin}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

(ข) ในกรณีที่มีแรงหน่วง สมการการเคลื่อนที่คือ

$$mX''(t) = -kX(t) - \beta X'(t)$$

$$mX''(t) + \beta X'(t) + kX(t) = 0$$

หรือ $$X''(t) + \frac{\beta}{m}X'(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

ใส่การแปลงลาปลาซตลอดสมการ

$$L\{X''\} + \frac{\beta}{m} L\{X'\} + \frac{k}{m} L\{X\} = 0$$

$$[s^2 L\{X\} - s X(0) \quad X \; 0)] + \frac{\beta}{m}[sL \quad X\} - X(0)] + \frac{k}{m} L\{X\} = 0$$

โจทย์กำหนดให้ $X(0) = 0$ และ $X'(0) = V_0$

$$\left(s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{k}{m}\right) L\{X\} = V_0$$

$$L\{X\} = \frac{V_0}{\left(s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{k}{m}\right)}$$

$$X(t) = L^{-1}\left\{\frac{V_0}{s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{k}{m}}\right.$$

พิจารณา $s^2 + \frac{\beta}{m}s + \frac{k}{m}$ ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$= s^2 + \frac{\beta}{m}s + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$= \left(s + \frac{\beta}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}\right)$$

ดังนั้น

$$X(t) = V_0 L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{\beta}{2m}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\right)^2}\right.$$

ให้ $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$ นั่นคือ

$$X(t) = \frac{V_0}{\gamma} L^{-1}\left\{\frac{\gamma}{\left(s + \frac{\beta}{2m}\right)^2 + \gamma^2}\right\}$$

$$= \frac{V_0}{\gamma} e^{-\frac{\beta}{2m}t} \operatorname{Sin} \gamma t$$ **ตอบ**

5. ลูกบอลมวล m ถูกขว้างขึ้นไปในอากาศ จากพื้นผิวของโลก ด้วยความเร็ว V_0 จงแสดงว่ามันจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่ากับ $V_0^2/2g$ เมื่อ g คือ อัตราเร่งเข้าหาจุดศูนย์กลางของโลก

วิธีทำ จากกฎของนิวตัน

$$F = ma = mg$$

นั่นคือ $$mg = -mX''(t)$$

หรือ $$g = -X''(t)$$

$$X''(t) + g = 0$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $X(0) = 0$ และ $X'(0) = V_0$

$$s^2L\{X\} - sX(0) - X'(0) + gL\{1\} = 0$$

$$s^2L\{X\} = V_0 - g\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$L\{X\} = \frac{V_0}{s^2} - \frac{g}{s^3}$$

$$X(t) = V_0t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{..........(1)}$$

ดิฟเฟอเรนซิเอท (1) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{d}{dt}X(t) = v(t) = V_0 - gt \qquad \text{..........(2)}$$

การที่ขว้างลูกบอลมวล m ขึ้นไปได้สูงสุด หมายความว่า ที่จุดสูงสุดนั้น ลูกบอลมีความเร็วเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$v(t) = 0 = V_0 - gt$$

$$t = \frac{V_0}{g} \qquad \text{..........(3)}$$

$t = \frac{V_0}{g}$ คือ เวลาที่ใช้ในการขว้างลูกบอลให้ได้ระยะทางสูงสุด นั่นคือ แทนค่า (3) ลงใน (1) จะได้

$$X_{\text{สูงสุด}}(t) = V_0\left(\frac{V_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g}$$

$$= \frac{V_0^2}{2g}$$ ช.ต.พ.

6. มวล m เคลื่อนที่ไปตามแกน X ภายใต้อิทธิพลของแรง ซึ่งเป็นปฏิภาคตรงกับความเร็วชั่วขณะ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ กำหนดว่า ที่ $t = 0$ อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $X = a$ และเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว V_0 จงหาตำแหน่งเมื่อมวลหยุดนิ่ง

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$mX''(t) = -\beta X'(t)$$

$$mX''(t) + \beta X'(t) = 0$$

หรือ $$X''(t) + \frac{\beta}{m} X'(t) = 0$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $X(0) = a,\ X'(0) = V_0$

$$[s^2L\{X\} - sX(0) - X'(0)] + \frac{\beta}{m}[sL\{X\} - X(0)] = 0$$

$$s^2L\{X\} - sa - V_0 + \frac{\beta}{m} s L\{X\} - \frac{a\beta}{m} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{\beta}{m}s\right) L\{X\} = as + \left(V_0 + \frac{a\beta}{m}\right)$$

$$L\{X\} = \frac{a}{\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} + \frac{\left(V_0 + \frac{a\beta}{m}\right)}{s\left(s + \frac{\beta}{m}\right)}$$

$$X(t) = a L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{\beta}{m}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\left(V_0 + \frac{a\beta}{m}\right)}{s\left(s + \frac{\beta}{m}\right)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s\left(s + \frac{\beta}{m}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{\beta}{m}}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์

$$A = \left.\frac{1}{s + \frac{\beta}{m}}\right|_{s=0} = \frac{m}{\beta}$$

$$B = \left.\frac{1}{s}\right|_{s = -\frac{\beta}{m}} = -\frac{m}{\beta}$$

ดังนั้น

$$X(t) = ae^{-\frac{\beta}{m}t} + \left(V_0 + \frac{a\beta}{m}\right) L^{-1}\left\{ \frac{\frac{m}{\beta}}{s} - \frac{\frac{m}{\beta}}{s + \frac{\beta}{m}} \right\}$$

$$= ae^{-\frac{\beta}{m}t} + \left(V_0 + \frac{a\beta}{m}\right) \frac{m}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

$$ae^{\frac{\beta}{m}} + \frac{m}{\beta} V_0 - \frac{m}{\beta} V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} + a - a e^{\beta}$$

$$X(t) = \frac{m}{\beta} V_0 + a - \frac{m}{\beta} V_0 e^{\frac{\beta}{m}}$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

หรือ $v(t) = V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$

มวล m จะหยุดนิ่งก็ต่อเมื่อ $v(t) = 0$

$$0 = V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

นั่นคือ $t \to \infty$

ดังนั้น ตำแหน่งของมวล m เมื่อหยุดนิ่ง

$$X(t) = \lim_{t \to \infty} \left(a + \frac{m}{\beta} V_0 - \frac{m}{\beta} V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

$$X(t) = a + \frac{m}{\beta} V_0$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัด 4.4

1. ขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 2 เฮนรี และความต้านทาน 10 โอห์ม ต่อกันแบบอนุกรมกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลท์ ถ้ากระแสไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t = 0$ จงหากระแสไฟฟ้าเมื่อสิ้นเวลา 0.1 วินาที

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้เป็น RL circuit (วงจร RL) ใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100 \qquad (1)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $I(0) = 0$

จาก (1) เขียนใหม่เป็น

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 50$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนค่าเงื่อนไขจะได้

$$s\,L\{I\} + I(0) + 5\,L\{I\} = 50\,L\{1\}$$

$$(s+5)\,L\{I\} = \frac{50}{s}$$

$$L\{I\} = \frac{50}{s(s+5)}$$

$$I(t) = 50\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+5)}\right\}$$

เพราะว่า $\dfrac{1}{s(s+5)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{s} + \dfrac{\frac{1}{-5}}{s+5}$

ดังนั้น
$$I(t) = 50\,L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{s} - \frac{\frac{1}{5}}{s+5}\right\}$$

$$= 50\left\{\frac{1}{5}(1) - \frac{1}{5}e^{-5t}\right\}$$

$$= 10 - 10e^{-5t}$$

$$= 10(1 - e^{-5t})$$

แทนค่า $t = 0.1$ จะได้

$$I(0.1) = 10\,(1 - e^{0.5})$$

$$\simeq 3.93 \text{ แอมแปร์}$$ **ตอบ**

2. ใช้คำถามข้อ 1 แต่เปลี่ยนแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 100 \sin 60t$

วิธีทำ ใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100 \sin 60t$$

หรือ $$\frac{dI}{dt} + 5I = 50 \sin 60t$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนค่าเงื่อนไข $I(0) = 0$

$$s\, L\{I\} - I(0) + 5\, L\{I\} = 50\, L\{\sin 60t\}$$

$$(s+5)\, L\{I\} = 50 \cdot \frac{60}{s^2 + 3600}$$

$$L\{I\} = \frac{3000}{(s+5)(s^2+3600)}$$

$$I(t) = 3000\, L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)(s^2+3600)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s+5)(s^2+3600)} = \frac{A}{s+5} + \frac{Bs+C}{s^2+3600}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์

$$A = \frac{1}{s^2+3600}\Big|_{s=0} = \frac{1}{3600}$$

$$Bs + C = \frac{1}{s+5}\Big|_{s=60i}$$

$$60Bi + C = \frac{1}{60i+5} \times \frac{(-60i+5)}{(60i+5)}$$

$$= \frac{5-60i}{3600+25}$$

$$= \frac{5-60i}{3625}$$

$$= \frac{1}{725} - \frac{60}{3625}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$60B = \frac{-60}{3625} \quad \text{และ} \quad C = \frac{1}{725}$$

$$B = \frac{-1}{3625}$$

ดังนั้น

$$I(t) = 3000\, L^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3600}\right)}{s+5} + \frac{\left(\frac{-1}{3625}\right)s + \frac{1}{725}}{s^2+3600}\right\}$$

$$= \frac{3000}{3600} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} - \frac{3000}{3625} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3600}\right\} + \frac{1}{725 \times 60} L^{-1}\left\{\frac{60}{s^2+3600}\right\}$$

$$= \frac{5}{6} e^{-5t} \quad \frac{24}{29} \text{Cos } 60t + \frac{1}{43500} \text{Sin } 60t$$

แทนค่า $t = 0.1$

$$I(0.1) = \frac{5}{6}e^{-0.5} - \frac{24}{29}\text{Cos } 6 + \frac{1}{43500}\text{Sin } 6$$

$$\simeq -0.31 \text{ แอมแปร์}$$

ตอบ

3. ถ้าความต้านทาน 2,000 โอห์ม และความจุ 5×10^{-6} ฟารัด ต่อกันแบบอนุกรมกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลท์ จงหากระแสไฟฟ้าที่เวลา $t = 0.1$ ถ้า $I(0) = 0.01$ แอมแปร์

วิธีทำ วงจร RC ใช้กฎเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$2000\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{5 \times 10^{-6}} = 100$$

หรือ

$$\frac{dQ}{dt} + 100\,Q = \frac{1}{20}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอท เทียบกับ t

$$\frac{d}{dt}(I) + 100\frac{dQ}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dQ}{dt} = I$$

$$\frac{dI}{dt} + 100I = 0$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนค่าเงื่อนไข $I(0) = 0.01$

$$s\,L\{I\} - I(0) + 100\,L\{I\} = 0$$

$$(s+100)\,L\{I\} = 0.01$$

$$L\{I\} = \frac{0.01}{s+100}$$

$$I(t) = 0.01\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\}$$

$$= 0.01\,e^{-100t}$$

ถ้าแทน $t = 0.1$ วินาที

$$I(0.1) = 0.01\,e^{-100(0.1)}$$

$$= 10^{-2}\,e^{-10}$$ แอมแปร์ **ตอบ**

4. จงแก้ปัญหาในข้อ 3 เมื่อเปลี่ยนแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 100 \sin 120\pi t$ โวลท์

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของ วงจร RC คือ

$$2000\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{5\times 10^{-6}} = 100 \sin 120\pi t$$

หรือ $$\frac{dQ}{dt} + 100\,Q = \frac{1}{20}\sin 120\pi t$$

ดิฟเฟอเรนซิเอท เทียบกับ t จะได้

$$\frac{dI}{dt} + 100\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{20}(120\pi)\cos 120\pi t$$

$$\frac{dI}{dt} + 100I = 6\pi \cos 120\pi t$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนค่าเงื่อนไข $I(0) = 0.01$

$$s\,L\{I\} - I(0) + 100\,L\{I\} = 6\pi\,L\{\cos 120\pi t\}$$

$$(s+100)\,L\{I\} = 0.01 + 6\pi\frac{s}{s^2+(120\pi)^2}$$

$$L\{I\} = \frac{0.01}{s+100} + 6\pi\frac{s}{(s+100)\left[s^2+(120\pi)^2\right]}$$

พิจารณา

$$\frac{s}{(s+100)\left[s^2+(120\pi)^2\right]} = \frac{A}{s+100} + \frac{Bs+C}{s^2+(120\pi)^2}$$

$$A = \frac{s}{[s^2+(120\pi)^2]}\Big|_{s=-100} = \frac{-100}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

$$Bs + C = \frac{s}{s+100}\Big|_{s=120\pi i}$$

$$120\pi Bi + C = \frac{120\pi i}{120\pi i + 100} \times \frac{(-120\pi i + 100)}{(-120\pi i + 100)}$$

$$= \frac{(120\pi)^2 + 120\pi \times 100\, i}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

$$= \frac{(120\pi)^2}{[(100)^2+(120\pi)^2]} + \frac{120\pi \times 100\, i}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$C = \frac{(120\pi)^2}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

$$B = \frac{100}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

ดังนั้น

$$I(t) = 0.01\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} + 6\pi\ L^{-1}\left\{\frac{\frac{-100}{[(100)^2+(120\pi)^2]}}{s+100}\right\}$$

$$+ 6\pi\ L^{-1}\left\{\frac{\frac{100\, s}{[(100)^2+(120\pi)^2]} + \frac{(120\pi)^2}{[(100)^2+(120\pi)^2]}}{s^2+(120\pi)^2}\right\}$$

$$= 0.01\ e^{-100t} - \frac{600\pi\ e^{-100t}}{[(100)^2+(120\pi)^2]} + \frac{600\pi\ \cos 120\pi t}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

$$+ \frac{720\pi^2\ \text{Sin}\ 120\pi t}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

แทนค่า $t = 0.1$ วินาที

$$I(0.1) = 0.01\ e^{-10} - \frac{600\pi\ e^{-10}}{[(100)^2+(120\pi)^2]} + \frac{600\pi\ \text{Cos}\ 12\pi}{[(100)^2+(120\pi)^2]}$$

$$= 0.01\, e^{-10} + \frac{600\pi\,(1-e^{-10})}{\left[\,(100)^2+(120\pi)^2\,\right]}$$ **ตอบ**

5. ขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 1 เฮนรี่ และความต้านทาน 2 โอห์ม ต่อกันแบบอนุกรมกับแบตเตอรี่ ซึ่งมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 6 $e^{-0.0001t}$ โวลท์ กำหนดว่า ไม่มีกระแสไฟฟ้าไหล เมื่อตอนเริ่มต้น อยากทราบว่าเมื่อใดจะวัดกระแสไฟฟ้าได้ 0.5 แอมแปร์

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจร RL คือ

$$(1)\quad \frac{dI}{dt} + 2I = 6\,e^{-0.0001t}$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $I(0) = 0$

$$s\,L\{I\} - I(0) + 2\,L\{I\} = 6\,L\{e^{-0.0001t}\}$$

$$(s+2)\,L\{I\} = 6\cdot\frac{1}{(s+0.0001)}$$

$$L\{I\} = \frac{6}{(s+2)\,(s+0.0001)}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s+2)\quad(s+0.0001)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+0.0001}$$

$$A = \frac{1}{s+0.0001}\Bigg|_{s=-2} = \frac{-1}{1.9999}$$

$$B = \frac{1}{s+2}\Bigg|_{s=-0.0001} = \frac{1}{1.9999}$$

ดังนั้น

$$I(t) = 6\;L^{-1}\left\{\frac{\frac{-1}{1.9999}}{s+2} + \frac{\frac{1}{1.9999}}{s+0.0001}\right\}$$

$$= \frac{-6}{1.9999}\,e^{-2t} + \frac{6}{1.9999}\,e^{-0.0001t}$$

$$= \frac{6}{1.9999}\,(\,e^{-0.0001t} - e^{-2t}\,)$$

$$\simeq 3\,(\,e^{-0.0001t} - e^{-2t}\,)$$

โจทย์ข้อนี้ต้องการทราบว่า $t = ?$ จึงจะวัดกระแสไฟฟ้าได้ 5 แอมแปร์ การแก้ปัญหาข้อนี้ จำเป็นต้องเปิดตารางจึงจะหาคำตอบได้

ตอบ

6. ให้ $L = 1$ เฮนรี่ $R = 100$ โอห์ม $C = 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 1{,}000$ โวลท์ ต่อกันแบบอนุกรม กำหนดว่าไม่มีประจุและกระแสไฟฟ้าไหลที่ $t = 0$ จงหากระแสไฟฟ้าและประจุไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจร RCL คือ

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

$$(1)\frac{d^2Q}{dt^2} + 100\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-4}} = 1{,}000$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $Q(0) = 0$, $I(0) = Q'(0) = 0$

$$\left[s^2 L\{Q\} - Q(0) - Q'(0)\right] + 100\left[sL\{Q\} - Q(0)\right] + 10^4 L\{Q\} = \frac{1000}{s}$$

$$(s^2 + 100s + 10000)\,L\{Q\} = \frac{1000}{s}$$

$$L\{Q\} = \frac{1000}{s(s^2 + 100s + 10000)}$$

$$Q(t) = 1000\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 100s + 10000)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s(s^2 + 100s + 10000)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{\left[(s + 50)^2 + (50\sqrt{3})^2\right]}$$

$$A = \left.\frac{1}{s^2 + 100s + 10000}\right|_{s=0} = \frac{1}{10000}$$

$$Bs + C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s = -50+50\sqrt{3}\,i}$$

$$B(-50 + 50\sqrt{3}\,i) + C = \frac{1}{-50 + 50\sqrt{3}\,i} \times \frac{(-50 - 50\sqrt{3}\,i)}{(-50 - 50\sqrt{3}\,i)}$$

$$(-50B + C) + 50B\sqrt{3}\,i = \frac{-50 - 50\sqrt{3}\,i}{2500 + 7500}$$

$$= \frac{-1}{200} - \frac{\sqrt{3}}{200} i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$50B\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{200}$$

$$B = \frac{-1}{10000}$$

และ $-50B + C = \frac{-1}{200}$

$$C = \frac{-1}{200} + 50B$$

$$= \frac{-1}{200} + 50\left(\frac{-1}{10000}\right)$$

$$= \frac{-1}{100}$$

ดังนั้น

$$Q(t) = 1000 \; L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{10000}}{s} + \frac{\frac{-1}{10000}s + \left(-\frac{1}{100}\right)}{(s+50)^2 + (50\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{10} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10} L^{-1}\left\{\frac{s+100}{(s+50)^2 + (50\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} L^{-1}\left\{\frac{s+50}{(s+50)^2 + (50\sqrt{3})^2}\right\} - \frac{1}{10\sqrt{3}} L^{-1}\left\{\frac{50\sqrt{3}}{(s+50)^2 + (50\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-50t} \operatorname{Cos} 50\sqrt{3}\, t - \frac{1}{10\sqrt{3}} e^{-50t} \operatorname{Sin} 50\sqrt{3}\, t$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{10\sqrt{3}} e^{-50t} (\operatorname{Sin} 50\sqrt{3}\, t + \sqrt{3} \operatorname{Cos} 50\sqrt{3}\, t)$$

เพราะว่า $I = \frac{dQ}{dt}$ เพราะฉะนั้น

$$I(t) = 0 - \frac{1}{10\sqrt{3}} \Big[e^{-50t} (50\sqrt{3} \operatorname{Cos} 50\sqrt{3}\, t - 150 \operatorname{Sin} 50\sqrt{3}\, t)$$

$$+ (\operatorname{Sin} 50\sqrt{3}\, t + \sqrt{3} \operatorname{Cos} 50\sqrt{3}\, t)(-50\, e^{-50t}) \Big]$$

$$\frac{e^{-50t}}{10\sqrt{3}}\Big[\, 50\sqrt{3}\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t - 150\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t$$

$$-\ 50\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t - 50\sqrt{3}\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t \,\Big]$$

$$= \frac{20}{\sqrt{3}} e^{-50t}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t$$ **ตอบ**

7. ให้ $L = 2$ เฮนรี่ $R = 50$ โอห์ม $C = 3 \times 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 2{,}000$ โวลท์ มีข้อกำหนดเหมือนข้อ 6 จงหากระแสไฟฟ้าและประจุไฟฟ้าสำหรับทุกค่าของ $t \geqslant 0$

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจร RCL คือ

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 50\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{3 \times 10^{-4}} = 2000$$

หรือ $$\frac{d^2Q}{dt^2} + 25\frac{dQ}{dt} + \frac{10^4}{6}Q = 1000$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $Q(0) = 0$ และ $I(0) = Q'(0) = 0$

$$[\, s^2 L\{Q\} - Q(0) - Q'(0)\,] + 25\,[\, s L\{Q\} - Q(0)\,] + \frac{10^4}{6} L\{Q\} = \frac{1000}{s}$$

$$(s^2 + 25s + \frac{10^4}{6})\, L\{Q\} = \frac{1000}{s}$$

$$L\{Q\} = \frac{1000}{s\left(s^2 + 25s + \frac{10^4}{6}\right)}$$

$$= \frac{1000}{s\left(s^2 + 25s + \frac{5000}{3}\right)}$$

เพราะว่า $$s^2 + 25s + \frac{5000}{3} = s^2 + 25s + \left(\frac{25}{2}\right)^2 + \frac{5000}{3} - \left(\frac{25}{2}\right)^2$$

$$= \left(s + \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{18125}{12}$$

$$= \left(s + \frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{29}}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(s + \frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s\left(s^2+25s+\frac{5000}{3}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{\left[\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2\right]}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์ จะได้

$$A = \left.\frac{1}{s^2+25s+\frac{5000}{3}}\right|_{s=0} = \frac{3}{5000}$$

$$Bs+C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{87}}{6}i}$$

$$B\left(-\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{87}}{6}i\right) + C = \frac{1}{-\frac{25}{2}+\frac{25\sqrt{87}}{6}i}$$

$$\left(-\frac{25}{2}B+C\right) + \frac{25\sqrt{87}}{6}Bi = \frac{1}{-\frac{25}{2}\ \frac{25\sqrt{87}}{6}i} \times \frac{\left(-\frac{25}{2}-\frac{25\sqrt{87}}{6}i\right)}{\left(-\frac{25}{2}-\frac{25\sqrt{87}}{6}i\right)}$$

$$= \frac{-\frac{25}{2} - \frac{25,185.}{6}i}{\frac{624}{4} + \frac{54375}{36}}$$

$$= \frac{-\frac{25}{2}\ \frac{25\sqrt{87}}{6}i}{\frac{5000}{3}}$$

$$\frac{3}{400} \quad \frac{\sqrt{87}}{400}i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\frac{25\sqrt{87}}{6} = \frac{\sqrt{87}}{400}$$

$$B = -\frac{3}{5000}$$

$$-\frac{25}{2}B+C = -\frac{3}{400}$$

$$C = -\frac{3}{400} + \frac{25}{2}B$$

$$= -\frac{3}{400} + \frac{25}{2}\left(-\frac{3}{5000}\right)$$

$$= -\frac{3}{200}$$

ดังนั้น

$$Q(t) = 1000\ L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{5000}}{s} + \frac{-\frac{3s}{5000} - \frac{3}{200}}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{5} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{3}{5} L^{-1}\left\{\frac{s+25}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{5}(1) - \frac{3}{5} L^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{25}{2}\right) + \frac{25}{2}}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)}\right\}$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{3}{5} L^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{25}{2}\right)}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2}\right\} - \frac{3\sqrt{87}}{145} L^{-1}\left\{\frac{\frac{25\sqrt{87}}{6}}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\right)^2}\right\}$$

$$Q(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-\frac{25}{2}t} \operatorname{Cos}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6} - \frac{3\sqrt{87}}{145} e^{-\frac{25}{2}t} \operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 - \frac{3}{5}\left[e^{-\frac{25}{2}t}\left(-\frac{25\sqrt{87}}{6}\operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\right) + \operatorname{Cos}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\left(-\frac{25}{2}e^{-\frac{25}{2}t}\right)\right]$$

$$- \frac{3\sqrt{87}}{145}\left[e^{-\frac{25}{2}t}\left(\frac{25\sqrt{87}}{6}\operatorname{Cos}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\right) + \operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\left(-\frac{25}{2}e^{-\frac{25}{2}t}\right)\right]$$

$$= e^{-\frac{25}{2}t}\left[\frac{5\sqrt{87}}{2}\operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6} + \frac{15}{2}\operatorname{Cos}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6} - \frac{15}{2}\operatorname{Cos}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\right.$$

$$\left. + \frac{15}{58}\sqrt{87}\operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\right]$$

$$= e^{-\frac{25}{2}t}\left[\frac{80\sqrt{87}}{29}\operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}\right]$$

$$= \frac{80\sqrt{87}}{29} e^{-\frac{25}{2}t}\operatorname{Sin}\frac{25\sqrt{87}\,t}{6}$$ **ตอบ**

8. ให้ $L = 1$ เฮนรี่ $R = 100$ โอห์ม $C = 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 1000 \sin 60t$ โวลท์ ต่อกันแบบอนุกรม กำหนดว่าไม่มีประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าไหลที่เวลา $t = 0$ จงหาประจุไฟฟ้า $Q(t)$ และกระแสไฟฟ้า $I(t)$ สำหรับ $t \geqslant 0$

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงจร RCL คือ

$$(1) \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + 100\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-4}} = 1000 \sin 60t$$

ใส่การแปลงลาปลาซ แล้วแทนเงื่อนไข $Q(0) = 0$ และ $I(0) = Q'(0) = 0$ จะได้

$$\left[s^2 L\{Q\} - sQ(0) - Q'(0) \right] + 100\left[sL\{Q\} - Q(0) \right] + 10^4 L\{Q\}$$

$$= 1000 L\{\sin 60t\}$$

$$(s^2 + 100s + 10000) L\{Q\} = 1000 \frac{60}{s^2+3600}$$

$$L\{Q\} = \frac{60000}{(s^2+3600)(s^2+100s+10000)}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s^2+3600)(s^2+100s+10000)} = \frac{As+B}{s^2+3600} + \frac{Cs+D}{(s+50)^2+(25\sqrt{3})^2}$$

หรือ $1 = (As+B)\left[(s+50)^2+(25\sqrt{3})^2\right] + (Cs+D)(s^2+3600)$

แทนค่า $s = 60i$

$$1 = (60Ai+B)(-3600+6000i+10000)$$

$$= (B+60Ai)(6400+6000i)$$

$$= (6400B - 360000A) + (384000A + 6000B)i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$384000A + 6000B = 0$$

หรือ $64A + B = 0$ (1)

และ $-360000A + 6400B = 1$ (2)

จาก (1) $B = -64\ A$ แทนลงใน (2)

$$-360000\ A + 6400\ (-64\ A) = 1$$

$$-360000\ A - 409600\ A = 1$$

$$-769600\ A = 1$$

$$A = \frac{-1}{769600}$$

เพราะฉะนั้น $B = -64\left(\frac{-1}{769600}\right)$

$$= \frac{64}{769600}$$

แทนค่า $s = -50 + 50\sqrt{3}\ i$

$$1 = \left[C(-50+50\sqrt{3}\ i) + D\right]\left[(-50+50\sqrt{3}\ i)^2 + 3600\right]$$

$$= \left[(D-50C) + 50\sqrt{3}\ C\ i\right]\left[\{-5000-5000\sqrt{3}\ i\} + 3600\right]$$

$$= \left[(D-50C) + 50\sqrt{3}\ C\right] i\ (-1400-5000\sqrt{3}\ i)$$

$$= \left[\{-1400\ (D-50\ C) + 250000 \times 3\ C\} - \{1400 \times 50\sqrt{3}\ C\right.$$

$$\left. + 5000\ (D-50\ C)\sqrt{3}\ \}i\right]$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\{1400 \times 50\sqrt{3}\ C + 5000\ (D-50\ C)\sqrt{3}\} = 0$$

$$180000\sqrt{3}\ C - 5000\sqrt{3}\ D = 0$$

หรือ $36\ C - D = 0$ (1)

และ $-1400\ (D-50\ C) + 750000\ C = 1$

$$1400\ D + 70000\ C + 750000\ C = 1$$

$$-1400\ D + 820000\ C = 1 \qquad (2)$$

จาก (1) $D = 36C$ แทนลงใน (2)

$$1400\,(36\ C) + 820000\ C = 1$$

$$-\ 50400\ C + 820000\ C = 1$$

$$769600\ C = 1$$

$$C = \frac{1}{769600}$$

เพราะฉะนั้น $\quad D = \dfrac{36}{769600}$

ดังนั้น

$$Q(t) = 60000\ L^{-1}\left\{ \frac{\frac{-1}{769600}s + \frac{64}{769600}}{s^2 + 3600} + \frac{\frac{1}{769600}s + \frac{36}{769600}}{(s+50)^2 + (50\sqrt{3})^2} \right\}$$

$$= \frac{60000}{769600}\ L^{-1}\left\{ \frac{-s+64}{s^2+3600} + \frac{s+36}{(s+50)^2+(50\sqrt{3})^2} \right\}$$

$$= \frac{75}{962}\left[-\ L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+3600} \right\} + \frac{64}{60} L^{-1}\left\{ \frac{60}{s^2+3600} \right\} \right.$$

$$\left. +\ L^{-1}\left\{ \frac{s+50}{(s+50)^2+(50\sqrt{3})^2} \right\} - \frac{14}{50\sqrt{3}}\ L^{-1}\left\{ \frac{50\sqrt{3}}{(s+50)^2+(50\sqrt{3})^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{75}{962}\left[-\ \text{Cos}\ 60t + \frac{16}{15}\sin 60t + e^{-50t}\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t \right.$$

$$\left. -\ \frac{7\sqrt{3}}{75}\ e^{-50t}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t \right]$$

$$= \frac{-\ 75\ \text{Cos}\ 60t + 80\ \text{Sin}\ 60t}{962} + \frac{e^{-50t}}{962}(75\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t - 7\sqrt{3}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}$$

$$= \frac{e^{-50t}}{962}(75\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t - 7\sqrt{3}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}t) + \frac{80\ \text{Sin}\ 60t - 75\ \text{Cos}\ 60t}{962}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{962}\left[e^{-50t}\,(-\ 75 \times 50\sqrt{3}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}t - 7\sqrt{3} \times 50\sqrt{3}\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t) \right.$$

$$\left. +\ (75\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t \quad 7\sqrt{3}\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t)\,(-\ 50\ e^{-50t}) \right]$$

$$+\ \frac{80 \times 60\ \text{Cos}\ 60t + 75 \times 60\ \text{Sin}\ 60t}{962}$$

$$= \frac{1}{962}\left[e^{-50t}(-\ 4800\ \text{Cos}\ 50\sqrt{3}\ t - 3400\ \text{Sin}\ 50\sqrt{3}\ t) \right]$$

$$+\ \frac{4800\ \text{Cos}\ 60t + 4500\ \text{Sin}\ 60t}{962}$$

$$I(t) = \frac{-e^{-50t}}{481}(2400 \text{ Cos } 50\sqrt{3}\, t + 1700 \text{ Sin } 50\sqrt{3}\, t)$$

$$+ \frac{2400 \text{ Cos } 60t + 2250 \text{ Sin } 60t}{481}$$ **ตอบ**

9. วงจรไฟฟ้าตามรูป 4.12

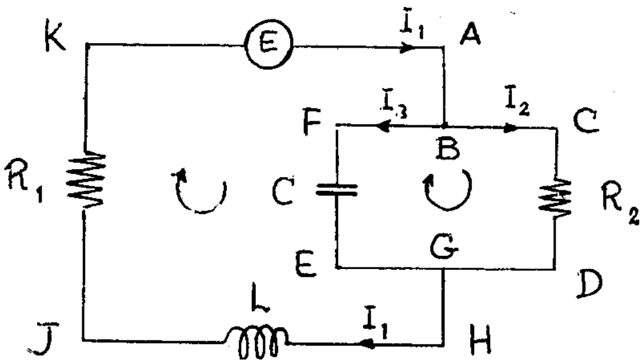
$E = 500 \text{ Sin } 10t$ โวลท์

$R_1 = 10$ โอห์ม

$R_2 = 10$ โอห์ม

$L = 1$ เฮนรี

$c = 0.01$ ฟารัด



ถ้าประจุไฟฟ้าในตัวเก็บประจุและกระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $t = 0$ จงหาประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$

วิธีทำ กำหนดให้ I_1 เป็นกระแสไฟฟ้าที่ออกมาจากเครื่องทำไฟฟ้า (generator) และกระแสไฟฟ้า I_1 แยกออกเป็น I_2 และ I_3 ที่จุดเชื่อม B ดังนั้น $I_1 = I_2 + I_3$ ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่ 1 ของเคอร์ชอฟฟ์ .

ประยุกต์ใช้กฎข้อที่สองของเคอร์ชอฟฟ์ กับวงจรย่อย ABCDGHJKA

$$-500 \text{ Sin } 10t + 10I_2 + (1)\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0$$

หรือ $$\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 + 10I_2 = 500 \text{ Sin } 10t \qquad (1)$$

พิจารณาวงจรย่อย CDEFC จะได้

$$10\, I_2 \quad \frac{Q}{0.01} = 0$$

ดิฟเฟอเรนซิเอท เทียบกับ t

$$10\, \frac{dI_2}{dt} - 100\, \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$10\, \frac{dI_2}{dt} - 100\, I_3 = 0$$

หรือ $\frac{dI_2}{dt} - 10\, I_3 = 0$

แต่ $I_3 = I_1 - I_2$ ดังนั้น

$$\frac{dI_2}{dt} - 10\, I_1 + 10\, I_2 = 0 \qquad (2)$$

ใส่การแปลงลาปลาซ ใน (1) แล้วแทนเงื่อนไข $I_1(0) = 0$

$$s\, L\{I_1\} - I_1(0) + 10\, L\{I_1\} + 10\, L\{I_2\} = 500\, L\,[\text{Sin } 10t\}$$

$$(s+10)\, L\{I_1\} + 10\, L\{I_2\} = 500 \left(\frac{10}{s^2+100}\right) \qquad (3)$$

ใส่การแปลงลาปลาซ ใน (2) แล้วแทนเงื่อนไข $I_2(0) = 0$

$$s\, L\{I_2\} \quad I_2(0) - 10\, L\{I_1\} + 10\, L\{I_2\} = 0$$

$$(s+10)\, L\{I_2\} - 10\, L\{I_1\} = 0$$

หรือ $$L\{I_1\} = \frac{(s+10)}{10}\, L\{I_2\} \qquad (4)$$

แทนค่า (4) ลงใน (3)

$$(s+10)\, \frac{(s+10)}{10}\, L\{I_2\} + 10\, L\{I_2\} = \frac{5000}{s^2+100}$$

$$(s+10)^2\, L\{I_2\} + (10)^2\, L\{I_2\} = \frac{50000}{s^2+100}$$

$$[\,(s+10)^2 + (10)^2\,]\, L\{I_2\} = \frac{50000}{s^2+100}$$

$$L\{I_2\} = \frac{50000}{(s^2+100)\left[(s+10)^2+(10)^2\right]}$$

$$I_2 = 50000\, L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+100)\left[(s+10)^2+(10)^2\right]}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s^2+100)\left[(s+10)^2+(10)^2\right]} = \frac{As+B}{s^2+100} + \frac{Cs+D}{\left[(s+10)^2+(10)^2\right]}$$

หรือ $1 = (As+B)\left[s^2+20s+200\right] + (Cs+D)\ (s^2+100)$

แทนค่า $s = 10\ i$

$$I = (10\ A\ i+B)\ (-100+200\ i+200)$$

$$= (10\ A\ i+B)\ (200\ i+100)$$

$$= (-2000A + 100\ B) + (1000\ A + 200\ B)\ i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$1000\ A+200\ B = 0$$

หรือ $\qquad B = -5\ A$

และ $\qquad -2000\ A+100\ B = 1$

$$-2000\ A+100\ (-5\ A) = 1$$

$$-2500A = 1$$

$$A = \frac{-1}{2500}$$

เพราะฉะนั้น $\qquad B = \frac{5}{2500}$

แทนค่า $s = -10+10\ i$

$$1 = \left\{C(-10+10\ i)+D\right\}\left\{(-10+10\ i)^2+100\right\}$$

$$= \left\{(D-10\ C)+10\ C\ i\right\}\ \left\{100-200\ i-100+100\right\}$$

$$= \{ (D - 10\,C) + 10\,C\,i \} (100 - 200\,i)$$

$$= \{ 100(D - 10\,C) + 2000\,C \} + \{ 1000\,C - 200(D - 10\,C) \}\, i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$1000\,C - 200\,(D - 10\,C) = 0$$

หรือ $3000\,C - 200\,D = 0$

$$D = 15\,C$$

และ $100\,(D - 10\,C) + 2000\,C = 1$

$$100\,D + 1000\,C = 1$$

หรือ $100\,(15\,C) + 1000\,c = 1$

$$1500\,C + 1000\,C = 1$$

$$2500C = 1$$

$$C = \frac{1}{2500}$$

เพราะฉะนั้น $D = \frac{15}{2500}$

ดังนั้น

$$I_2 = 50000\,L^{-1}\left\{ \frac{-\frac{1}{2500}s + \frac{5}{2500}}{s^2 + 100} + \frac{\frac{1}{2500}s + \frac{15}{2500}}{[(s+10)^2 + (10)^2]} \right\}$$

$$= 20\,L^{-1}\left\{ \frac{-s+5}{s^2+100} \right\} + 20\,L^{-1}\left\{ \frac{s+15}{(s+10)^2 + (10)^2} \right\}$$

$$= 20\left[-L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+100} \right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{ \frac{10}{s^2+100} \right\} \right] + 20\,L^{-1}\left\{ \frac{(s+10)+5}{(s+10)^2+(10)^2} \right\}$$

$$I_2 = -20\,\text{Cos}\,10t + 10\,\text{Sin}\,10t + 20\,e^{-10t}\,\text{Cos}\,10t + 10\,e^{-10t}\,\text{Sin}\,10t \qquad \ldots.(5)$$

จาก (4) $L\{I_1\} = \frac{s+10}{10} \times \frac{50000}{(s^2+100)\,[\,(s+10)^2 + (10)^2\,]}$

$$I_1 = 5000\ L^{-1}\left\{\frac{s+10}{(s^2+100)\ [(s+10)^2+(10)^2\ ]}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{s+10}{(s^2+100)\ [\ (s+10)^2+(10)^2\ ]} = \frac{Es+F}{s^2+100} + \frac{Gs+H}{[\ (s+10)^2+(10)^2\ ]}$$

หรือ $s+10 = (Es+F)\ (s^2+20s+200) + (Gs+H)\ (s^2+100)$

แทนค่า $s = 10\ i$

$$10\ i+10 = \{\ 10\ E\ i+F\ \}\ \{\ -100+200\ i+200\ \}$$

$$= (F+10\ E\ i)\ \ (100+200\ i)$$

$$= (-2000\ E+100\ F) + (1000\ E+200\ F)\ i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$-2000\ E+100\ F = 10 \qquad (5)$$

และ $$1000\ E+200\ F = 10 \qquad (6)$$

(5) + (6) x 2 $\quad 500\ F = 30$

$$F = \frac{30}{500}$$

แทนใน (5) $$E = \frac{100\left(\frac{30}{500}\right) - 10}{2000}$$

$$= \frac{1}{500}$$

แทนค่า $s = -10+10\ i$

$$-10+10\ i+10 = \{\ (-10+10\ i)\ G+H\ \}\ \{\ (-10+10\ i)^2+100\ \}$$

$$10\,i = \{\ (-10\ G+H)+10\ G\ i\ \}\ \{\ 100-200\ i\ \}$$

$$= \{\ 100\ (-10\ G+H)+2000\ G\ \}$$

$$+ \{\ 1000\ G-200\ (-10\ G+H)\ \}\ i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$100\,(-10\,G+H)+2000\,G = 0$$

$$-1000\,G+100\,H+2000\,G = 0$$

$$1000\,G+100\,H = 0$$

$$H = -10\,G$$

และ $$1000\,G-200\,(-10\,G+H) = 10$$

$$1000\,G+2000\,G-200\,H = 10$$

$$3000\,G-200\,H = 10$$

$$3000\,G-200\,(-10\,G) = 10$$

$$5000\,G = 10$$

$$G = \frac{1}{500}$$

เพราะฉะนั้น $$H = -10\left(\frac{1}{500}\right) = -\frac{10}{500}$$

ดังนั้น

$$I, = 5000\,L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{500}s+\frac{30}{500}}{s^2+100}+\frac{\frac{1}{500}s-\frac{10}{500}}{(s+10)^2+(10)^2}\right\}$$

$$= 10\,L^{-1}\left\{\frac{-s+30}{s^2+100}+\frac{s-10}{(s+10)^2+(10)^2}\right\}$$

$$= 10\left[-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+100}\right\}+3\,L^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+100}\right\}\right]+10\,L^{-1}\left\{\frac{(s+10)-20}{(s+10)^2+(10)^2}\right\}$$

$$= -10\cos 10t+30\sin 10t+10e^{-10t}\cos 10t\quad 20\,e^{-10t}\sin 10t$$

เพราะว่า $I, = I_1 - I*$ เพราะฉะนั้น

$$I_3 = -10\cos 10t+30\sin 10t+10\,e^{-10t}\cos 10t-20\,e^{-10t}\sin 10t$$
$$+20\cos 10t-10\sin 10t-20\,e^{-10t}\cos 10t-10\,e^{-10t}\sin 10t$$

$$I_3 = 10\cos 10t + 20\sin 10t - 10e^{-10t}\cos 10t - 30e^{-10t}\sin 10t$$

จาก $\frac{dQ}{dt} = I$

$$dQ = Idt$$

หรือ $Q = \int I\,dt$

อินทิเกรต I_3 เทียบกับ t จะได้

$$Q = \sin 10t - 2\cos 10t - \int 10e^{-10t}\cos 10t\,dt - \int 30e^{-10t}\sin 10t\,dt$$

$$= \sin 10t - 2\cos 10t - \int e^{-10t}\cos 10t\,d(10t)$$

$$-3\int e^{-10t}\sin 10t\,d(10t) \qquad (7)$$

พิจารณา

$$\int e^{-10t}\cos 10t\,d(10t) = e^{-10t}\sin 10t + \int e^{-10t}\sin 10t\,d(10t)$$

$$= e^{-10t}\sin 10t + e^{-10t}(-\cos 10t)$$

$$- \int e^{-10t}\cos 10t\,d(10t)$$

หรือ $\int e^{-10t}\cos 10t\,d(10t) = \frac{e^{-10t}\sin 10t - e^{-10t}\cos 10t}{2}$

โดยวิธีเดียวกัน

$$\int e^{-10t}\sin 10t\,d(10t) = e^{-10t}(-\cos 10t) - \int e^{-10t}\cos 10t\,d(10t)$$

$$= -e^{-10t}\cos 10t - \left\{\frac{e^{-10t}\sin 10t - e^{-10t}\cos 10t}{2}\right\}$$

$$= -\frac{e^{-10t}}{2}(\sin 10t + \cos 10t)$$

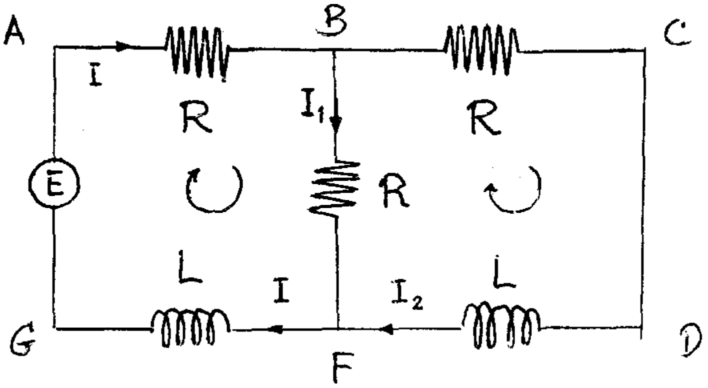
แทนค่าลงใน (7) จะได้

$$Q(t) = \sin 10t - 2\cos 10t - \left\{\frac{e^{-10t}\sin 10t - e^{-10t}\cos 10t}{2}\right\}$$

$$+ 3\frac{e^{-10t}}{2}(\sin 10t + \cos 10t)$$

$$= \sin 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}(\sin 10t + 2\cos 10t)$$ **ตอบ**

10. จงหากระแสไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ ในแต่ละวงจรย่อยตามรูป 4.13 กำหนดว่า $E = 10 \operatorname{Sin} t$ โวลท์ $R = 10$ โอห์ม และ $L = 10$ เฮนรี่



วิธีทำ พิจารณาวงจรย่อย ABFGA ใช้กฎข้อที่สองของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$-100 + 10I + 10I_1 + 10\frac{dI}{dt} = 0$$

หรือ $$\frac{dI}{dt} + I + I_1 = \operatorname{Sin} t \qquad (1)$$

ให้ I เป็นกระแสไฟฟ้าที่ออกจากแบตเตอรี่ และกระแสไฟฟ้านี้แยกออกเป็น I_1 และ I_2 ที่จุดเชื่อม B ดังนั้น ตามกฎข้อที่ 1 ของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$I = I_1 + I_2$$

แทนค่า I ลงใน (1)

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + 2I_1 + I_2 = \operatorname{Sin} t \qquad (2)$$

พิจารณาวงจรย่อย BCDFB

$$10I_2 + 10\frac{dI_2}{dt} - 10I_1 = 0$$

หรือ $$\frac{dI_2}{dt} + I_2 - I_1 = 0 \qquad (3)$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (2) แล้วแทนเงื่อนไข $I_1(0) = 0, \; I_2(0) = 0$

$$[s\,L\{I_1\} - I_1(O)\,] + [s\,L\{I_2\} - I_2(0)\,] + 2\,L\{I_1\} + L\{I_2\} = L\{\text{Sin}\;t\}$$

$$(s+2)\,L\{I_1\} + (s+1)\,L\{I^*\} = \left(\frac{1}{s^2+1}\right) \qquad (4)$$

ใส่การแปลงลาปลาซใน (3) แล้วแทนเงื่อนไข $I_2(0) = 0$

$$s\,L\{I_2\} - I_2(0) + L\{I_2\} - L\{I_1\} = 0$$

$$(s+1)\,L\{I_2\} - L\{I_1\} = 0$$

หรือ $$L\{I_1\} = (s+1)\,L\{I_2\} \qquad (5)$$

แทนค่า (5) ลงใน (4) จะได้

$$(s+2)(s+1)\,L\{I_2\} + (s+1)\,L\{I_2\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s+1)\{(s+2)+1\}\,L\{I_2\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s+1)(s+3)\,L\{I_2\} = \frac{10}{s^2+1}$$

$$L\{I_2\} = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s^2+1)} \qquad (6)$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

ใช้ทฤษฎีบทของเฮวีไซด์

$$A = \left.\frac{1}{(s+3)(s^2+1)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \left.\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{20}$$

$$Cs+D = \left.\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=i}$$

$$Ci + D = \frac{1}{(i+1)(i+3)}$$

$$= \frac{1}{-1+4i+3}$$

$$= \frac{1}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i}$$

$$= \frac{2-4i}{4+16}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$C = -\frac{1}{5} \text{ และ } D = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น

$$I_2 = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{20}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{5}s + \frac{1}{10}}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{20}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{20}e^{-3t} \quad \frac{1}{5}\text{Cos } t + \frac{1}{10}\text{Sin } t$$

$$= \frac{1}{20}(2 \text{ Sin } t - 4 \text{ Cos } t + 5e^{-t} - e^{-3t})$$

แทนค่า (6) ลงใน (5)

$$L\{I_1\} = (s+1)\frac{1}{(s+1)(s+3)(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s^2+1)}$$

$$I, = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s^2+1)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{E}{s+3} + \frac{Fs+G}{s^2+1}$$

$$E = \left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s=-3} = \frac{1}{10}$$

$$Fs+G = \left.\frac{1}{s+3}\right|_{s=i}$$

$$Fi+G = \frac{1}{i+3} \times \frac{(-i+3)}{(-i+3)}$$

$$= \frac{-i+3}{1+9}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{10} i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$F = -\frac{1}{10} \text{ และ } G = \frac{3}{10}$$

ดังนั้น

$$I_1 = L^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{10}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{10}s + \frac{3}{10}}{s^2+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{10}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 3\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \right]$$

$$= \frac{1}{10}(e^{-3t} - \text{Cos } t + 3 \text{ Sin } t)$$

แต่ $I = I_1 + I_2$

$$= \frac{1}{10}(e^{-3t} - \text{Cos } t + 3 \text{ Sin } t) + \frac{1}{20}(2 \text{ Sin } t - 4 \text{ Cos } t + 5\,e^{-t} - e^{-3t})$$

$$= \frac{1}{20}(8 \text{ Sin } t - 6 \text{ Cos } t + 5\,e^{-t} + e^{-3t})$$ **ตอบ**

เฉลยแบบฝึกหัด 4.5

1. จงแก้สมการ $\frac{\partial u}{at} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1)

$u(O,t) = 0$, $u(5,t) = 0$, $u(x,0) = 10 \text{ Sin } 4\pi x$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = 2L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$

$$s\,U(x,s) - u(x,0) = 2\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)$$

หรือ $$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - \frac{s}{2}U(x,s) = -5 \text{ Sin } 4\pi x \quad (2)$$

เมื่อ $U = U(x,s) = L\{u(x,t)\}$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของ (2) คือ

$U = U_c + U_p$

U_c หมายถึง คำตอบเติมเต็ม (Complementary solution)

และ U_p หมายถึง คำตอบเฉพาะ (Particular solution)

จาก (2) ถ้าแทนด้านขวามือเป็นศูนย์ ดังนั้นคำตอบเติมเต็มคือ

$$U_c = c_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x}$$

ให้คำตอบเฉพาะของ (2) คือ

$$U_p = \frac{10}{s+36\pi^2}\text{ Sin } 4\pi x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไป

$$U = c_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{+\sqrt{\frac{s}{2}}x} + \frac{10}{s+36\pi^2}\text{ Sin } 4\pi x \quad (3)$$

ใส่การแปลงลาปลาซของเงื่อนไขขอบ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ t จะได้

$L\{u(0,t)\} = U(0,s) = 0$ และ

$$L\{u(5,t)\} = U(5,s) = 0 \qquad (5)$$

ใช้ (4) แทนลงใน (3) ได้

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (6)$$

ใช้ (5) แทนใน (3) ได้

$$c_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} + c_2 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} = 0 \qquad (7)$$

จาก (6) $c_2 = -c_1$ แทนลงใน (7)

$$c_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} - c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} = 0$$

$$-2c_1\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} - e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(5)}}{2}\right) = 0$$

หรือ $C \operatorname{Sin h}\left(5\sqrt{\frac{s}{2}}\right) = 0 \quad ; \quad C = -2c_1$

แต่ $\operatorname{Sin h}\left(5\sqrt{\frac{s}{2}}\right) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $C = 0$ หรือ $c_1 = 0$

นั่นคือ $c_2 = 0$

ดังนั้น (3) กลายเป็น

$$U(x,s) = \frac{10}{s+32\pi^2} \operatorname{Sin} 4\pi x$$

หรือ $$L\{u(x,t)\} = \frac{10 \operatorname{Sin} 4\pi}{s+32\pi^2}$$

$$u(x,t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} \operatorname{Sin} 4\pi x$$ **ตอบ**

2. จงแก้แบบฝึกหัดข้อ 1 ถ้า $u(x,0) = 10 \operatorname{Sin} 4\pi x - 5 \operatorname{Sin} 6\pi x$

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x,s) - \frac{s}{2} U(x,s) = -5 \operatorname{Sin} 4\pi x + \frac{5}{2} \operatorname{Sin} 6\pi x \qquad (1)$$

จาก (1) ถ้าให้ด้านขวามือเป็นศูนย์ จะได้คำตอบเติมเต็มเป็น

$$U_c = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}$$

ให้คำตอบเฉพาะของ (1) คือ

$$U_p = A \text{ Sin } 4\pi x + B \text{ Sin } 6\pi x$$

แทนค่าใน (1) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A = \frac{10}{s+32\pi^2} \quad \text{และ} \quad B = \frac{-5}{s+72\pi^2}$$

เพราะฉะนั้น $U_p = \frac{10}{s+32\pi^2} \text{ Sin } 4\pi x - \frac{5}{s+72\pi^2} \text{ Sin } 6\pi x$

และ $U = U_c + U_p$

$$= c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + \frac{10}{s+32\pi^2} \text{ Sin } 4nx$$

$$- \frac{5}{s+72\pi^2} \text{ Sin } 6\pi x \qquad (2)$$

แทนเงื่อนไข $L\left\{u(0,t)\right\} = U(0,s) = 0$ ใน (2)

$c_1 + c_2 = 0$ หรือ $c_2 = -c_1$

แทนเงื่อนไข $L\left\{u(5,t)\right\} = U(5,s) = 0$ ใน (2)

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} = 0$$

หรือ $c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} \quad c_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(5)} = 0$

$$2 c_1 \text{ Sin h}(5\sqrt{\frac{s}{2}}) = 0$$

แต่ $\text{Sin h} (5 \sqrt{\frac{s}{2}}) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = 0$

นั่นคือ $c_2 = 0$

ดังนั้นคำตอบใน (2) กลายเป็น

$$u = \frac{10}{s+32\pi^2} \text{ Sin } 4\pi x - \frac{5}{s+72\pi^2} \text{ Sin } 6\pi x$$

หรือ $u(x,t) = 10 e^{-32\pi^2 t} \text{ Sin } 4\pi x - 5 e^{-72\pi^2 t} \text{ Sin } 6\pi x$ **ตอบ**

3. จงแก้สมการ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (1)

$y(0,t) = 0$, $y(2,t) = 0$, $y_t(x,0) = 0$ และ $y(x,0) = 20 \text{ Sin } 2\pi x - 10 \text{ Sin } 5\pi x$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$s^2 L\{y\} - s\,y(x,0) - y_t(x,0) - 9\frac{d^2}{dx^2}L\{Y\} = 0 \tag{2}$$

ถ้าให้ $L\{y\} = Y(x,s)$ ดังนั้น (2) เขียนใหม่เป็น

$$s^2 Y(x,s) - sy(x,0) \quad y_t(x,0) - 9\frac{d^2}{dx^2}Y(x,s) = 0$$

ใช้เงื่อนไข $y(0,t) = 0$, $y(2,t) = 0$ และ $y_t(x,0) = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}Y \quad \frac{s^2}{9}Y = -\frac{20}{9}s \text{ Sin } 2\pi x + \frac{10}{9}s \text{ Sin } 5\pi x \tag{3}$$

จาก (3) ถ้าให้ด้านขวามือของสมการมีค่าเป็นศูนย์ จะได้คำตอบเติมเต็ม เป็น

$$Y_c = c_1 e^{(\frac{s}{3})x} + c_2 e^{(-\frac{s}{3})x} \tag{4}$$

ให้คำตอบเฉพาะของ (3) คือ

$$Y_p = A \text{ Sin } 2\pi x + B \text{ Sin } 5\pi x \tag{5}$$

แทนค่า (5) ลงใน (3) จะได้

$$(-4\pi^2 A \text{ Sin } 2\pi x - 25\pi^2 B \text{ Sin } 5nx) \quad \frac{s^2}{9}(A \text{ Sin } 2\pi x + B \text{ Sin } 5\pi x)$$

$$= -\frac{20}{9}s \text{ Sin } 2\pi x + \frac{10s}{9}\text{Sin } 5\pi x$$

$$-\left(\frac{s^2+36\pi^2}{9}\right)A \text{ Sin } 2\pi x - \left(\frac{s^2+225\pi^2}{9}\right)B \text{ Sin } 5\pi x$$

$$= -\frac{20}{9}s \text{ Sin } 2\pi x + \frac{10s}{9}\text{Sin } 5nx$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$A = -\frac{20s}{s^2+36\pi^2}$$

และ $$B = \frac{-10s}{s^2+225\pi^2}$$

ดังนั้น คำตอบเฉพาะ คือ

$$Y_p = \frac{20s \text{ Sin } 2\pi x}{s^2+36\pi^2} - \frac{10s \text{ Sin } 5\pi x}{s^2+225\pi^2}$$

เพราะว่า คำตอบทั่วไป

$$Y = Y_c + Y_p$$

$$= c_1 e^{(5)x} + c_2 e^{(-\frac{s}{3})x} + \frac{20s \text{ Sin } 2\pi x}{s^2+36\pi^2}$$

$$- \frac{10s \text{ Sin } 5\pi x}{s^2+225\pi^2} \qquad (6)$$

ใส่การแปลงลาปลาซในเงื่อนไข จะได้

$$L\{y(0,t)\} = Y(0,s) = 0 \qquad (7)$$

และ $L\{y(2,t)\} = Y(2,s) = 0$ (8)

แทนค่า *(7)* ลงใน (6) จะได้

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (9)$$

แทนค่า *(8)* ลงใน *(6)* จะได้

$$c_1 e^{\frac{2s}{3}} + c_2 e^{-\frac{2s}{3}} = 0 \qquad (10)$$

แก้สมการ (9) กับ (10) จะได้

$$c_1 = c_2 = 0$$

นั่นคือ $Y = \dfrac{20s \text{ Sin } 2\pi x}{s^2+36\pi^2} - \dfrac{10s \text{ Sin } 5\pi x}{s^2+225\pi^2}$

หรือ $y(x,t) = 20 \ L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+36\pi^2}\right\} \text{Sin } 2\pi x - 10 \ L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+225\pi^2}\right\} \text{Sin } 5\pi x$

$= 20 \text{ Cos } 6\pi t \text{ Sin } 2\pi x - 10 \text{ Cos } 15\pi t \text{ Sin } 5\pi x$ **ตอบ**

4. จงแก้สมการ $\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1)

$u_x(0,t) = 0$, $u(\frac{\pi}{2},t) = 0$ ถ้า

(ก) $u(x,0) = 30 \cos 5x$

(ข) $u(x,0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

วิธีทำ (ก) ใส่การแปลงลาปลาซใน (1)

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = 3L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$

$$s\,U(x,s) - u(x,0) = 3\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)$$

หรือ $3\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - s\,U(x,s) = -u(x,0) = -30 \cos 5x$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - \frac{s}{3}U(x,s) = -10 \cos 5x \qquad (2)$$

จาก (2) คำตอบเติมเต็มคือ

$$U_c = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x}$$

และคำตอบเฉพาะคือ

$$U_p = \frac{30}{(s+75)}\cos 5x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$U = U_c + U_p$$

$$= c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x} + \frac{30 \cos 5x}{(s+75)} \qquad (3)$$

ใส่การแปลงลาปลาซในเงื่อนไขขอบ

$$L\{u_x(0,t)\} = U_x(0,s) = 0 \qquad (4)$$

และ $L\{u(\frac{\pi}{2},t)\} = U(\frac{\pi}{2},s) = 0$ (5)

จาก (3) ดิฟเฟอเรนซิเอท เทียบกับ x จะได้

$$U_x(x,s) = c_1 \sqrt{\frac{s}{3}}\, e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} - c_2 \sqrt{\frac{s}{3}}\, e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x} \qquad \frac{150 \text{ Sin } 5x}{s+75}$$

(6)

ใช้เงื่อนไขใน (4) แทนใน (6)

$$c_1 - c_2 = 0$$

หรือ $c_1 = c_2$ (7)

ใช้เงื่อนไขใน (5) แทนใน (3)

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$$ (8)

แก้สมการ (7) และ (8) จะได้

$$c_1 = c_2 = 0$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปคือ

$$u = \frac{30 \cos 5x}{s+75}$$

หรือ $u(x,t) = 30\, L\left\{\frac{1}{s+75}\right\} \cos 5x$

$$= 30\, e^{-75t} \text{ Cos } 5x$$ **ตอบ**

(ข) ถ้า $u(x,0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$ จะได้

$$3 \frac{d^2}{dx^2} U(x,s) - s\, U(x,s) = -20 \cos 3x + 5 \cos 9x$$

หรือ $\frac{d^2}{dx^2} U(x,s) - \frac{s}{3} U(x,s) = -\frac{20}{3} \text{Cos } 3x + \frac{5}{3} \text{ Cos } 9x$ (9)

จาก (9) คำตอบเติมเต็ม คือ

$$U_c = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x}$$ (10)

ให้คำตอบเฉพาะของ (9) คือ

$$U_p = A \text{ Cos } 3x + B \text{ Cos } 9x$$ (11)

แทนค่า (11) ลงใน (9) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์

$$A = \frac{20}{s+27}, \quad B = \frac{-5}{st243}$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปคือ

$$U = U_c + U_p$$

$$= c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x} + \frac{20}{s+27}\text{ Cos } 3x - \frac{5}{s+243}\text{ Cos } 9x \qquad (12)$$

ดิฟเฟอเรนซิเอท (12) เทียบกับ x

$$U_x = c_1 \sqrt{\frac{s}{3}}\, e^{\sqrt{\frac{s}{3}}x} - c_2 \sqrt{\frac{s}{3}}\, e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}x} - \frac{60}{s+27}\text{ Sin } 3x + \frac{45}{s+243}\text{ Sin } 9x \qquad (13)$$

ใช้เงื่อนไข (4) แทนใน (13)

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$c_1 = c_2 \qquad (14)$$

ใช้เงื่อนไข (5) แทนใน (12)

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{3}}(\frac{\pi}{2})} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{3}}(\frac{\pi}{2})} = 0 \qquad (15)$$

แก้สมการ (14), (15) จะได้

$$Cl = c_2 = 0$$

ดังนั้น

$$U = \frac{20}{s+27}\cos 3x \quad \frac{5}{s+243}\cos 9x$$

หรือ $u(x,t) = 20\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+27}\right\}\cos 3x - 5\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+243}\right\}\text{ Cos } 9x$

$$= 20\, e^{-27t}\text{ Cos } 3x - 5\, e^{-243t}\text{ Cos } 9x$$ **ตอบ**

5. จงหาคำตอบของสมการ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$y_x(0,t) = 0$, $y(3,t) = 0$, $y(x,0) = 0$

$y_t(x,0) = 12 \text{ Cos } \pi x + 16 \text{ Cos } 3\pi x - 8 \text{ Cos } 5\pi x$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = 16\, L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

$$s^2\, Y(x,s) - s\; y(x,0) - y_t(x,0) = 16\; \frac{d^2}{dx^2}\, Y(x,s)$$

เมื่อ $Y = Y(x,s) = L\{y(x,t)\}$

หรือ $16\, \frac{d^2}{dx^2}\, Y(x,s) - s^2\, Y(x,s) = -\, y_t(x,0)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, Y - \frac{s^2}{16}\, Y = -\frac{3}{4} \text{ Cos } \pi x - \text{Cos } 3\pi x + \frac{1}{2} \text{ Cos } 5\pi x \qquad (1)$$

จาก (1) ถ้าให้ด้านขวามือของสมการเป็นศูนย์ จะได้คำตอบเติมเต็มเป็น

$$Y_c = c_1 e^{\frac{sx}{4}} + c_2 e^{-\frac{sx}{4}}$$

จาก (1) ให้คำตอบเฉพาะคือ

$$Y_p = A \text{ Cos } \pi x + B \text{ Cos } 3\pi x + C \text{ Cos } 5\text{ nx}$$

แทนค่า Y_p ลงใน (1) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A = \frac{12}{s^2 + 16\pi^2}$$

$$B = \frac{16}{s^2 + 144\pi^2}$$

และ $$c = \frac{-8}{s^2 + 400\pi^2}$$

นั่นคือ $$Y_p = \frac{12}{s^2 + 16\pi^2} \cos RX + \frac{16}{s^2 + 144\pi^2} \cos 3nx - \frac{8}{s^2 + 400\pi^2} \cos 5\pi x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ

$$Y = Y_c + Y_p$$

$$= c_1 e^{\frac{sx}{4}} + c_2 e^{4} \quad t \frac{12}{s^2+16\pi^2} \cos RX \ t \frac{16}{s^2+144\pi^2} \cos 3\pi x$$

$$- \frac{8}{s^2+400\pi^2} \operatorname{Cos} 5\pi x \qquad (2)$$

ใส่การแปลงลาปลาซในเงื่อนไข

$$L\{ y_x(0,t) \} = Y_x(0,t) = 0 \qquad (3)$$

และ $L\{ y(3,t) \} = Y(3,t) = 0$ (4)

ดิฟเฟอเรนซิเอท (2) เทียบกับ x จะได้

$$Y_x = c_1 \frac{s}{4} e^{\frac{sx}{4}} - c_2 \frac{s}{4} e^{4} - \frac{12\pi}{s^2+16\pi^2} \operatorname{Sin} \pi X$$

$$- \frac{48\pi}{s^2+144\pi^2} \operatorname{Sin} 3\pi x + \frac{40\pi}{s^2+400\pi^2} \operatorname{Sin} 5\pi x \qquad (5)$$

แทนค่า (3) ลงใน (5)

$$c_1 - c_2 = 0 \qquad (6)$$

หรือ $c_1 = c_2$

แทนค่า (4) ลงใน (2)

$$c_1 e^{\frac{3s}{4}} - c_2 e^{-\frac{3s}{4}} = 0 \qquad (7)$$

แก้สมการ (6) และ (7) หาค่าของ c_1 และ c_2 จะได้

$$c_1 = c_2 = 0$$

ดังนั้น $Y = \frac{12}{s^2+16\pi^2} \cos RX + \frac{16}{s^2+144\pi^2} \operatorname{Cos} 3\pi x \quad \frac{8}{s^2+400\pi^2} \cos 5\pi x$

หรือ $y(x,t) = \frac{3}{\pi} L^{-1}\left\{\frac{4\pi}{s^2+16\pi^2}\right\} \cos RX + \frac{16}{12\pi} L^{-1}\left\{\frac{12\pi}{s^2+144\pi^2}\right\} \operatorname{Cos} 3\pi x$

$$- \frac{8}{20\pi} L^{-1}\left\{\frac{20n}{s^2+400\pi^2}\right\} \cos 5\pi x$$

$$= \frac{3}{\pi} \text{Cos } \pi x \text{ Sin } 4\pi t + \frac{4}{3\pi} \text{Cos } 3\pi x \text{ Sin } 12\pi t$$

$$- \frac{2}{5\pi} \text{Cos } 5\pi x \text{ Sin } 20\pi t$$ **ตอบ**