บทที่ 3
การแปลงลาปลาซผกผัน (The inverse Laplace transform)

สูตรและคุณสมบัติที่สำคัญ

1. การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform)

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

2. คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

$$L^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$$

3. คุณสมบัติการเลื่อนออกไป (First shifting property)

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

4. คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล (The change of scale property)

$$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่

5. การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ (Inverse Laplace transform of derivatives)

$$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$$

6. การแปลงลาปลาซผกผันของอินทิกรัล (Inverse Laplace transform of integrals)

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(s)\, ds\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

7. การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) คูณกับ s^n

$$L^{-1}\{s\,F(s)\} = f'(t)$$

เงื่อนไข คือ $f(0) = 0$

8. การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) หารด้วย s^n

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t)\, dt^n$$

9. คุณสมบัติผลการประสาน (The convolution property)

$$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = f*g$$

10. ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์ (Heaveside's expansion theorems)

10.1 กรณี q(s) เป็นตัวประกอบเชิงเส้นแบบไม่ซ้ำ $(s-a_1), (s-a_2), (s-a_3), \ldots, (s-a_n)$

ถ้า

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$$

ดังนั้น

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(a_i)}{Q(a_i)} e^{a_i t}$$

เมื่อ $Q_i(a_i)$ คือ ผลคูณของทุกตัวประกอบ q(s) ยกเว้นตัวประกอบ $(s - a_i)$

หรือเขียนในรูปอย่างง่าย จะได้

ถ้า $L\{f(t)\} = \dfrac{p(s)}{q(s)} = \dfrac{p(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}$

เมื่อ $a_i \neq aj$ สำหรับ $i \neq j$ ดังนั้น

$$f(t) = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + \ldots + A_n e^{a_n t}$$

เมื่อ

$$A_i = \left.\frac{p(s)}{(s-a_1)\ldots(s-a_{i-1})(s-a_{i+1})\ldots(s-a_n)}\right|_{s=a_i}$$

10.2 กรณีตัวประกอบ $(s-a)^r$ ซ้ำกัน r ครั้ง

ถ้า $L\{f(t)\} = \dfrac{p(s)}{q(s)} = \dfrac{\phi(s)}{(s-a)^r}$

$$= \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s-a)^r} + h(s)$$

ดังนั้น $f(t) = e^{at}\left[A_1 + A_2\frac{t}{1!} + \ldots + A_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right] + L^{-1}\{h(s)\}$

เมื่อ $A_i = \left.\dfrac{1}{(r-i)!}\dfrac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\{\phi(s)\}\right|_{s=a} \quad i = 1, 2, \ldots, r$

10.3 กรณีตัวประกอบเชิงซ้อน $(s + a)^2 + b^2$ ดังนั้นพจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับพจน์ไม่ซ้ำของตัวประกอบเชิงซ้อน $(s + a)^2 + b^2$ ของ $q(s)$ คือ

$$\frac{e^{-at}}{b} (\phi_i \operatorname{Cos} bt + \phi_r \operatorname{Sin} bt)$$

เมื่อ ϕ_r และ ϕ_i คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $\phi(-a + bi)$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาค่าการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $\frac{3}{s+4}$ (ข) $\frac{1}{2s-5}$ (ค) $\frac{8s}{s^2+16}$

(ง) $\frac{3s-12}{s^2+8}$ (จ) $\frac{2s-5}{s^2-9}$ (ฉ) $\frac{s+1}{s^{4/3}}$

วิธีทำ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{3}{s+4}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = 3e^{-4t}$

(ข) $L^{-1}\left\{\frac{1}{2s-5}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{5}{2}}\right\} = \frac{1}{2}e^{5/2t}$

(ค) $L^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+16}\right\} = 8L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = 8 \text{ Cos } 4t$

(ง) $L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+8}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{12}{s^2+8}\right\}$

$= 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+8}\right\} - 3\sqrt{2}\,L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{8}}{s^2+8}\right\}$

$= 3 \text{ Cos } 2\sqrt{2}\,t - 3\sqrt{2} \text{ Sin } 2\sqrt{2}\,t$

(จ) $L^{-1}\left\{\frac{2s-5}{s^2-9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-9}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-9}\right\}$

$= 2 \text{ Cos h } (3t) - \frac{5}{3} \text{ Sin h } (3t)$

(ฉ) $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^{4/3}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{4/3}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{4/3}}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/3}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{4/3}}\right\}$

จากสูตร

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad ; \quad n > -1$$

หรือ $$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}$$

ดังนั้น ถ้าแทนค่า $n = -\frac{2}{3}$ และ $n = \frac{1}{3}$ จะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/3}}\right\} = \frac{t^{-2/3}}{\Gamma\left(-\frac{2}{3}+1\right)} = \frac{t^{-2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

และ $$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{4/3}}\right\} = \frac{t^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+1\right)} = \frac{t^{1/3}}{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3t^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

นั่นคือ

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^{4/3}}\right\} = \frac{t^{-2/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{3t^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{(t^{-2/3} + 3t^{1/3})}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$ **ตอบ**

หมายเหตุ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\left(\frac{\sqrt{s}-1}{s}\right)^2\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(s+1)}\right\}$

วิธีทำ

(ก) $$L^{-1}\left\{\left(\frac{\sqrt{s}-1}{s}\right)^2\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2\sqrt{s}+1}{s^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{2}{s^{3/2}} + \frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= L^{1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= 1 - \frac{2t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} + t$$

$$= 1 + t - \frac{2t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1 + t - \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \quad ; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$ **ตอบ**

(ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\}$

$= 1 + e^{-t}$ **ตอบ**

3. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{4s^2+25}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{5s+10}{9s^2-16}\right\}$

วิธีทำ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{4s^2+25}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{3s}{4s^2+25}\right\} - L^{-1}\left\{\dfrac{2}{4s^2+25}\right\}$

$= \dfrac{3}{4}L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+\frac{25}{4}}\right\} - \dfrac{1}{5}L^{-1}\left\{\dfrac{5/2}{s^2+\frac{25}{4}}\right\}$

$= \dfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\dfrac{5}{2}t - \dfrac{1}{5}\operatorname{Sin}\dfrac{5}{2}t$ **ตอบ**

(ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{5s+10}{9s^2-16}\right\} = 5\,L^{-1}\left\{\dfrac{s}{9s^2-16}\right\} + 10\,L^{-1}\left\{\dfrac{1}{9s^2-16}\right\}$

$= \dfrac{5}{9}L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-\frac{16}{9}}\right\} + \dfrac{10}{9}\times\dfrac{3}{4}L^{-1}\left\{\dfrac{4/3}{s^2-\frac{16}{9}}\right\}$

$= \dfrac{5}{9}\operatorname{Cos h}\left(\dfrac{4}{3}t\right) + \dfrac{5}{6}\operatorname{Sin h}\left(\dfrac{4}{3}t\right)$ **ตอบ**

4. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{s^2+4} - \dfrac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

(ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^{5/2}} - \dfrac{7}{3s+2}\right\}$

วิธีทำ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{s^2+4} - \dfrac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4s-24}{s^2-16}\right\}$$

$$= 3\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{8}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - 4\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\}$$

$$+ 6\,L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-16}\right\}$$

$$= 3\,\mathrm{Cos}\,2t - 4\,\mathrm{Sin}\,2t - 4\,\mathrm{Cos\,h}\,(4t) + 6\,\mathrm{Sin\,h}\,(4t)$$

(ข) $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^{5/2}} - \frac{7}{3s+2}\right\}$

$$= 3\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} - 2\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\} - \frac{7}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{2}{3}}\right\}$$

ใช้สูตร

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \text{ และ } \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

เมื่อ $n = \frac{1}{2}$ และ $n = \frac{3}{2}$ จะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^{5/2}} - \frac{7}{3s+2}\right\} = 3\,\frac{t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} - 2\,\frac{t^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} - \frac{7}{3}e^{-2/3t}$$

$$= \frac{3t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{2t^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{7}{3}e^{-2/3t}$$

$$= \frac{6t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{8}{3}\,\frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{7}{3}e^{-2/3t}$$ **ตอบ**

5. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{3(s^2-1)^2}{2s^5} + \frac{4s-18}{9-s^2} + \frac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$

วิธีทำ

$$L^{-1}\left\{\frac{3(s^2-1)^2}{2s^5} + \frac{4s-18}{9-s^2} + \frac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$$

$$= \frac{3}{2} L^{-1}\left\{ \frac{s^2 - 1)^2}{s^5} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{4s - 18}{s^2 - 9} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{(s + 1)(s - s^{1/2})}{s^{5/2}} \right\}$$

พิจารณา

$$\frac{(s^2 - 1)^2}{s^5} = \frac{s^4 - 2s^2 + 1}{s^5}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^5} \qquad \text{และ}$$

$$\frac{(s + 1)(2 - s^{1/2})}{s^{5/2}} = \frac{2s + 2 - s^{3/2} - s^{1/2}}{s^{5/2}} = \frac{2}{s^{5/2}} + \frac{2}{s^{3/2}} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

ดังนั้น

$$\text{R.S.} = \frac{3}{2}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} \right]$$

$$- 4 L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 9}\right\} + 6 L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - 9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^{5/2}}\right\}$$

$$+ 2 L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\left[1 - t^2 + \frac{1}{24} t^4 \right] - 4 \operatorname{Cos h}(3t) + 6 \operatorname{Sin h}(3t) + \frac{2t^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}$$

$$+ \frac{2t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} - 1 - t$$

$$= \frac{1}{2} - t - \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{16} t^4 + \frac{2t^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{2t^{1/2}}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$- 4 \operatorname{Cos h}(3t) + 6 \operatorname{Sin h}(3t)$$

$$= \frac{1}{2} - t - \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{16} t^4 + \frac{8}{3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$- 4 \operatorname{Cos h}(3t) + 6 \operatorname{Sin h}(3t)$$

ตอบ

6. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{ \dfrac{3s - 14}{s^2 - 4s + 8} \right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{ \dfrac{8s + 20}{s^2 - 12s + 32} \right\}$

วิธีทำ จัดส่วนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

(ก) $s^2 - 4s + 8 \quad = \quad (s^2 - 4s + 4) + 4 \quad = \quad (s - 2)^2 + 4$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{ \frac{3s - 14}{s^2 - 4s + 8} \right\} &= L^{-1}\left\{ \frac{(3s - 6) - 8}{s^2 - 4s + 8} \right\} \\
&= L^{-1}\left\{ \frac{3s - 6}{(s - 2)^2 - 4} \right\} - \frac{8}{2} L^{-1}\left\{ \frac{2}{(s - 2)^2 + 4} \right\} \\
&= 3\, L^{-1}\left\{ \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 4} \right\} - 4\,(\text{Sin } 2t)\, e^{2t} \\
&= 3\, e^{2t} \text{ Cos } 2t - 4e^{2t} \text{ Sin } 2t \\
&= e^{2t}\,(3 \text{ Cos } 2t - 4 \text{ Sin } 2t) \qquad \textbf{ตอบ}
\end{aligned}
$$

(ข) $s^2 - 12s + 32 \quad = \quad (s^2 - 12s + 36) - 4 \quad = \quad (s - 6)^2 - 4$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{ \frac{8s + 20}{s^2 - 12s + 32} \right\} &= L^{-1}\left\{ \frac{(8s - 48) + 68}{s^2 - 12s + 32} \right\} \\
&= L^{-1}\left\{ \frac{8(s - 6)}{(s - 6)^2 - 4} \right\} + 34\, L^{-1}\left\{ \frac{2}{(s - 6)^2 - 4} \right\} \\
&= 8\, e^{6t} \text{ Cos h } (2t) + 34\, e^{6t} \text{ Sin h } (2t) \\
&= 2\, e^{6t}\,(4 \text{ Cos h } (2t) + 17 \text{ Sin h } (2t)) \qquad \textbf{ตอบ}
\end{aligned}
$$

7. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{ \dfrac{3s + 2}{4s^2 + 12s + 9} \right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{ \dfrac{5s - 2}{3s^2 + 4s + 8} \right\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$4s^2 + 12s + 9 \quad = \quad 4\,(s^2 + 3s + \frac{9}{4})$$

$$= \quad 4\left\{ s^2 + 3s + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}$$

$$= \quad 4\left(s + \frac{3}{2}\right)^2$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{3s + 2}{4s^2 + 12s + 9} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{\left(3s + \frac{9}{2}\right) - \frac{5}{2}}{4\left(s + \frac{3}{2}\right)^2} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{3\left(s + \frac{3}{2}\right)}{4\left(s + \frac{3}{2}\right)^2} \right\} - \frac{5}{8} L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{3}{4} L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)} \right\} - \frac{5}{8} L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{3}{4} e^{-3/2t} - \frac{5}{8} t e^{-3/2t}$$ **ตอบ**

(ข) $3s^2 + 4s + 8 = 3\left(s^2 + \frac{4s}{3} + \frac{8}{3}\right\}$

$$= 3\left\{ s^2 + \frac{4s}{3} + \frac{4}{9}\right) + \frac{8}{3} - \frac{4}{9} \right\}$$

$$= 3\left\{ \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{20}{9} \right\}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{5s - 2}{3s^2 + 4s + 8} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{\left(5s + \frac{10}{3}\right) - \frac{16}{3}}{3\left\{ \left(s + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{20}{9} \right\}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} L^{-1}\left\{ \frac{5\left(s + \frac{2}{3}\right)}{\left(s + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{20}{9}} \right\}$$

$$- \frac{8}{3\sqrt{5}} L^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{\frac{20}{9}}}{\left(s + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{20}{9}} \right\}$$

$$= \frac{5}{3} e^{-2/3t} \operatorname{Cos} \frac{2\sqrt{5}}{3} t - \frac{8\sqrt{5}}{15} e^{-2/3t} \operatorname{Sin} \frac{2\sqrt{5}}{3} t$$

$$= \frac{e^{-2/3t}}{15}\left(25 \operatorname{Cos} \frac{2\sqrt{5}}{3} t - 8\sqrt{5} \operatorname{Sin} 2\frac{\sqrt{5}}{3} t\right)$$ **ตอบ**

8. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$

(ค) $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^{1/2}}\right\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

หรือ $$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

ดังนั้น

(ก) เมื่อเทียบกับสูตร จะได้ $a = 2$ และ

$$F(s) = \frac{1}{s^2} = L\{f(t)\}$$

นั่นคือ $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

เพราะฉะนั้น

$$f(t-a) = f(t-2) = t-2$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = (t-2)\,u(t-2)$$ **ตอบ**

(ข) เมื่อเทียบกับสูตร จะได้ $a = 3$ และ

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

หรือ $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \text{Sin } 2t$

และ $f(t-a) = f(t-3) = \text{Sin } 2(t-3)$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\} = 4\,L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$$

$$= \quad 4 \operatorname{Sin} 2(t-3)\,u(t-3)$$ **ตอบ**

(ค) เมื่อเทียบกับสูตร จะได้ $a = 1$ และ

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{1}{(s+1)^{1/2}}$$

หรือ $$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{e^{-t}\,t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{-t}\,t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

เพราะฉะนั้น $$f(t-1) = \frac{e^{-(t-1)}\,(t-1)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^{1/2}}\right\} = \frac{e^{-(t-1)}\,(t-1)^{-1/2}\,u(t-1)}{\sqrt{\pi}}$$ **ตอบ**

9. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$

วิธีทำ (ก) เพราะว่า $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ จากข้อ

(ก) เมื่อเทียบกับสูตร

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

จะได้ $a = 2$ และ $F(s) = \dfrac{s}{s^2+3s+2}$

หรือ $$L\{f(t)\} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$= \quad L^{-1}\left\{ \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right\}$$

$$= \quad -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

ดังนั้น

$$f(t-a) \quad = \quad f(t-2) \quad = \quad 2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)}$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{se^{-2s}}{s^2+3s+2} \right\} \quad = \quad \left\{ 2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} \right\} u(t-2)$$ **ตอบ**

(ข) $s^2 - 2s + 5 \quad = \quad s^2 - 2s + 1 + 4 \quad = \quad (s-1)^2 + 4$

เมื่อเทียบกับสูตรข้างต้น จะได้ $a = 3$ และ

$$L\{f(t)\} \quad = \quad F(s) \quad = \quad \frac{1}{(s-1)^2+4}$$

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{2}{(s-1)^2+4} \right\}$$

$$= \quad \frac{1}{2} e^{t} \operatorname{Sin} 2t$$

ดังนั้น

$$f(t-a) \quad = \quad f(t-3) \quad = \quad \frac{1}{2} e^{(t-3)} \operatorname{Sin} 2(t-3)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{e^{-3s}}{s^2-2s+5} \right\} \quad = \quad \frac{1}{2} e^{(t-3)} \operatorname{Sin} 2(t-3)\, u(t-3)$$ **ตอบ**

10. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2} \right\}$

วิธีทำ $s^2 + 2s + 2 \quad = \quad (s+1)^2 + 1$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2} \right\} \quad = \quad L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{\{(s+1)^2+1\}^2} \right\}$$

$$= \quad L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{1}{(s+1)^2+1} \right\}$$

เทียบกับสูตร

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$$

จะได้

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

หรือ $f(t) = e^{-t}\operatorname{Cos} t$

และ $G(s) = L\{g(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2+1}$

หรือ $g(t) = e^{-t}\operatorname{Sin} t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\operatorname{Cos} t * e^{-t}\operatorname{Sin} t$$

$$= \int_0^t e^{-x}\operatorname{Cos} x \cdot e^{-(t-x)}\operatorname{Sin}(t-x)\,dx$$

$$= e^{-t}\int_0^t \operatorname{Cos} x\operatorname{Sin}(t-x)\,dx$$

จากสูตรตรีโกณมิติ

$$2\operatorname{Cos} A\operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin}(A+B) - \operatorname{Sin}(A-B)$$

เพราะฉะนั้น

$$\text{R.S.} = \frac{e^{-t}}{2}\int_0^t\{\operatorname{Sin} t - \operatorname{Sin}(2x-t)\}\,dx$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\left[(\operatorname{Sin} t)\,x\Big|_0^t + \frac{\operatorname{Cos}(2x-t)}{2}\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}\,|\,t\operatorname{Sin} t + 0\,|$$

$$= \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\operatorname{Sin} t$$ **ตอบ**

11. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right\}\right.$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$

วิธีทำ (ก) จากสูตร

$$L\{(-t)f(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$$

หรือ $$-t\,f(t) = L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

$$f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

ถ้าแทน $F(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(t) &= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\left(\frac{s+1-s-2}{(s+1)^2}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)(s+2)}\right\} \\
&= \frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\} \\
&= \frac{1}{t}\{e^{-t}-e^{-2t}\}
\end{aligned}$$

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\} = \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$$ **ตอบ**

(ข) ใช้สูตร

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

ให้ $F(s) = \frac{1}{s}$; $f(t) = 1$

และ $G(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)$; $g(t) = \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\} = 1 * \left(\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right) * 1$$

$$= \int_0^t \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\right) dx \qquad \textbf{ตอบ}$$

12. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$f(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\}$$

แทนค่า $F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)$ ลงในสูตร จะได้

$$f(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{2}{s^2}\right)^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\left(\frac{s^4}{s^4+4}\right)\left(\frac{-2(2s)}{s^4}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{-4s}{s^4+4}\right\}$$

พิจารณา เพราะว่า

$$s^4 + 4 = \{(s^2+2) - 2s\}\{(s^2+2) + 2s\}$$

$$= \{(s-1)^2 + 1\}\{(s+1)^2 + 1\}$$

และ $$4s = \{(s+1)^2 + 1\} - \{(s-1)^2 + 1\}$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{\{(s+1)^2+1\} - \{(s-1)^2+1\}}{\{(s-1)^2+1\}\{(s+1)^2+1\}}\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[e^{t}\,\mathrm{Sin}\, t - e^{-t}\,\mathrm{Sin}\, t \right]$$

$$= \frac{1}{t}\,\mathrm{Sin}\, t\,(e^{t} - e^{-t})$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Sin}\, t\,\mathrm{Sin\, h}\,(t)}{t}$$

ตอบ

13. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^3(s+1)} \right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{ \frac{s+2}{s^2(s+3)} \right\}$ (ค) $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+1)^3} \right\}$

วิธีทำ (ก) จากสูตร

$$L^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s^n} \right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\, dt^n$$

$F(s) = \frac{1}{s+1}$ **ดังนั้น** $f(t) = e^{-t}$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^3(s+1)} \right\} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t e^{-t}\, dt\, dt\, dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (-e^{-t}) \Big|_0^t \, dt\, dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (1 - e^{-t})\, dt\, dt$$

$$= \int_0^t \{ t + e^{-t} \} \Big|_0^t \, dt$$

$$= \int_0^t \{ t + e^{-t} - 1 \}\, dt$$

$$= \left\{ \frac{t^2}{2} - e^{-t} - t \right\} \Big|_0^t$$

$$= \frac{t^2}{2} - e^{-t} + 1 - t$$

$$= 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}$$

ตอบ

(ข) $L^{-1}\left\{ \frac{s+2}{s^2(s+3)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2(s+3)} \right\} + 2\,L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s+3)} \right\}$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s+3)} \right\} + 2\,L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s+3)} \right\}$$

เทียบกับสูตร

$$F(s) = \frac{1}{s+3} \text{ จะได้ } f(t) = e^{-3t}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = \int_0^t e^{-3t}\,dt$$

$$= -\frac{e^{-3t}}{3}\Big|_0^t$$

$$= \frac{1-e^{-3t}}{3}$$

และ $$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+3)}\right\} = \int_0^t \frac{1-e^{-3t}}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[t + \frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{3}\left[t + \frac{e^{-3t}}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{9}$$

แทนค่าจะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\} = \frac{1-e^{-3t}}{3} + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}e^{-3t} - \frac{2}{9}$$

$$= \frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}$$ **ตอบ**

(ค) เทียบกับสูตรจะได้

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \text{ นั่นคือ } f(t) = \frac{e^{-t}t^2}{2}$$

แทนในสูตร

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{e^{-t}t^2}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t^2(-e^{-t})\Big|_0^t + 2\int_0^t e^{-t}\,t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-t^2e^{-t} + 2\left\{ t\,(-e^{-t})\Big|_0^t + \int_0^t e^{-t}\,dt \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\Big|_0^t \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2 \right]$$

$$= 1 - e^{-t}(1 + t + \frac{1}{2}t^2) \qquad \textbf{ตอบ}$$

14. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-1)^5(s+2)} \right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{ \frac{s}{(s-2)^5(s+1)} \right\}$

วิธีทำ (ก) จากสูตร

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

ให้ $F(s) = \frac{1}{(s-1)^5}$ จะได้ $f(t) = \frac{e^t t^4}{4!}$

และ $G(s) = \frac{1}{s+2}$ จะได้ $g(t) = e^{-2t}$

แทนค่าลงในสูตร

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-1)^5(s+2)} \right\} = \frac{e^t t^4}{24} * e^{-2t}$$

$$= \int_0^t \frac{e^x x^4}{24}\, e^{-2(t-x)}\, dx$$

$$= \frac{e^{-2t}}{24} \int_0^t x^4 e^{3x}\, dx \qquad \text{..........(1)}$$

อินทิเกรตทีละส่วน 4 ครั้ง

$$\int_0^t x^4 e^{3x}\,dx = x^4\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)\Big|_0^t - 4\int_0^t x^3\,\frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

$$= \frac{t^4e^{3t}}{3} - \frac{4}{3}\left\{ x^3\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)\Big|_0^t - 3\int_0^t x^2\,\frac{e^{3t}}{3}\,dt \right\}$$

$$= \frac{t^4e^{3t}}{3} - \frac{4}{9}t^3e^{3t} + \frac{4}{3}\left\{ x^2\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)\Big|_0^t \right.$$

$$- 2 \int_0^t x \frac{e^{3x}}{3} dx \Big\}$$

$$= \frac{t^4 e^{3t}}{3} - \frac{4}{9} t^3 e^{3t} + \frac{4}{9} t^2 e^{3t} - \frac{8}{9} \Big\{ x \left(\frac{e^{3x}}{3} \right) \Big|_0^t$$

$$- \int_0^t \frac{e^{3x}}{3} dx \Big\}$$

$$= \frac{t^4 e^{3t}}{3} - \frac{4}{9} t^3 e^{3t} + \frac{4}{9} t^2 e^{3t}$$

$$- \frac{8}{27} t e^{3t} + \frac{8}{81} \{ e^{3t} - 1 \}$$

แทนค่าลงใน (1) จะได้

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 1)^5 (s + 2)} \right\} = \frac{e^{-2t}}{24} \Big[\frac{t^4 e^{3t}}{3} - \frac{4}{9} t^3 e^{3t} + \frac{4}{9} t^2 e^{3t} - \frac{8}{27} t e^{3t}$$

$$+ \frac{8}{81} e^{3t} - \frac{8}{81} \Big]$$

$$= \frac{e^t}{72} \left(t^4 - \frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{3} t^2 - \frac{8}{9} t + \frac{8}{27} \right) - \frac{e^{-2t}}{243}$$

ตอบ

(ข) ใช้สูตรเหมือนข้อ (ก) สมมุติให้

$$F(s) = \frac{1}{(s - 2)^5} \quad \text{จะได้} \quad f(t) = \frac{e^{2t} t^4}{4!}$$

และ $$G(s) = \frac{1}{s + 1} \quad \text{จะได้} \quad g(t) = e^{-t}$$

ดังนั้น แทนค่าลงในสูตร

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - 2)^5 (s + 1)} \right\} = \frac{e^{2t} t^4}{4!} * e^{-t}$$

$$= \int_0^t \frac{e^{2x} x^4}{24} e^{-(t-x)} dx$$

$$= \frac{e^{-t}}{24} \int_0^t x^4 e^{3x} dx$$

ใช้ผลจากข้อ (ก)

$$\int_0^t x^4 e^{3x} dx = \frac{t^4 e^{3t}}{3} - \frac{4}{9} t^3 e^{3t} + \frac{4}{9} t^2 e^{3t} - \frac{8}{27} t e^{3t} + \frac{8}{81} e^{3t} - \frac{8}{81}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-2)^5 (s+1)} \right\} = \frac{e^{2t}}{72} \left(t^4 - \frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{3} t^2 - \frac{8}{9} t + \frac{8}{27} \right) - \frac{e^{-t}}{243}$$

จากสูตร

$$L^{-1}\{ s F(s) \} = f'(t) \qquad ; f(0) = 0$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{s}{(s-2)^5 (s+1)} \right\} = \frac{e^{2t}}{72} \left(4t^3 - 4t^2 + \frac{2}{3} t - \frac{8}{9} \right)$$

$$+ \left(t^4 - \frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{3} t^2 - \frac{8}{9} t + \frac{8}{27} \right) \frac{e^{2t}}{36} + \frac{e^{-t}}{243}$$

$$= e^{2t} \left\{ \frac{t^4}{36} + \frac{1}{54} t^3 - \frac{1}{54} t^2 + \frac{1}{81} t - \frac{1}{243} \right\} + \frac{e^{-t}}{243}$$

15. ถ้า $f(t) = L^{-1}\{ F(s) \}$ จงแสดงว่า

(ก) $L^{-1}\{ s F'(s) \} = -t f'(t) - f(t)$

(ข) $L^{-1}\{ s F''(s) \} = t^2 f'(t) + 2t f(t)$

(ค) $L^{-1}\{ s^2 F''(s) \} = t^2 f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t)$

พิสูจน์ จากสูตร

$$L\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s) = F^{(n)}(s)$$

(ก) จากสูตร

$$L^{-1}\{s F(s)\} = f'(t) \quad \text{เมื่อ} \quad F(s) = L\{f(t)\}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\{s F'(s)\} = \{(-t) f(t)\}'$$

$$= (-t) f'(t) - f(t)$$

และ $L^{-1}\{s F''(s)\} = \{(-t)^2 f(t)\}'$

$$= t^2 f'(t) + 2t f(t)$$

และ $L^{-1}\{s^2 F''(s)\} = L^{-1}\{s \cdot s F''(s)\}$

$$= \{t^2 f'(t) + 2t f(t)\}'$$

$$= t^2 f''(t) + 2t f'(t) + 2t f'(t) + 2f(t)$$

$$= t^2 f''(t) + 4t f'(t) + 2f(t)$$

16. จงแสดงว่า

$$L^{-1}\{s^2 F'(s) + f(0)\} = -t f''(t) - 2f'(t)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$L^{-1}\{s^2 F'(s) + f(0)\} = L^{-1}\{s \cdot s F'(s)\} + L^{-1}\{f(0)\}$$

แต่ $f(0) = 0$ นั่นคือ $L^{-1}\{f(0)\} = 0$

เพราะว่า $L^{-1}\{s F'(s)\} = (-t) f'(t) - f(t)$

ดังนั้น $L^{-1}\{s^2 F'(s) + f(0)\} = \{(-t) f'(t) - f(t)\}' + 0$

$$= (-t) f''(t) - f'(t) - f'(t)$$

$$= -t f''(t) - 2f'(t) \qquad \text{ซ.ต.พ.}$$

17. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

ให้ $F(s) = \frac{1}{s+3}$ จะได้ $f(t) = e^{-3t}$

และ $G(s) = \frac{1}{s-1}$ จะได้ $g(t) = e^{t}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\} &= e^{-3t} * e^{t} \\ &= \int_0^t e^{-3x} e^{(t-x)}\,dx \\ &= e^{t}\int_0^t e^{-4x}\,dx \\ &= e^{t}\left(-\frac{e^{-4x}}{4}\right)\Big|_0^t \\ &= \frac{e^{t}}{4}(-e^{-4t}+1) \\ &= \frac{1}{4}(e^{t}-e^{-3t}) \end{aligned}$$

ตอบ

(ข) ใช้สูตรเหมือนข้อ (ก)

ให้ $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ จะได้ $f(t) = e^{-2t}\cdot t$

และ $G(s) = \frac{1}{s-2}$ จะได้ $g(t) = e^{2t}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\} &= (e^{-2t}\cdot t) * e^{2t} \\ &= \int_0^t e^{-2x}\,x\,e^{2(t-x)}\,dx \end{aligned}$$

$$= e^{2t}\int_0^t x\, e^{-4x}\, dx$$

$$= e^{2t}\left\{ x\left(-\frac{e^{-4x}}{4}\right)\Big|_0^t + \int_0^t \frac{e^{-4x}}{4}\, dx \right\}$$

$$= e^{2t}\left\{ -\frac{t\, e^{-4t}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16}\Big|_0^t \right\}$$

$$= e^{2t}\left\{ -\frac{t\, e^{-4t}}{4} - \frac{e^{-4t}}{16} + \frac{1}{16} \right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{2t} - e^{-2t} - 4t\, e^{-2t}\right)$$ **ตอบ**

18. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 17

ให้ $F(s) = \frac{1}{s+1}$ **จะได้** $f(t) = e^{-t}$

และ $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ **จะได้** $g(t) = \text{Sin } t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = e^{-t} * \text{Sin } t = \text{Sin } t * e^{-t}$$

$$= \int_0^t \text{Sin } x\, e^{-(t-x)}\, dx$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx$$

พิจารณา

$$\int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx = e^x(-\text{Cos } x)\Big|_0^t + \int_0^t e^x\, \text{Cos } x\, dx$$

$$= -e^t\, \text{Cos } t + 1 + \left\{ e^x(\text{Sin } x)\Big|_0^t - \int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx \right\}$$

$$= 1 - e^t\, \text{Cos } t + e^t\, \text{Sin } t - \int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx$$

$$2\int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx = 1 + e^t(\text{Sin } t - \text{Cos } t)$$

หรือ $\int_0^t e^x\, \text{Sin } x\, dx = \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2}(\text{Sin } t - \text{Cos } t)$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{1}{2}(\text{Sin } t - \text{Cos } t)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{Sin } t - \text{Cos } t + e^{-t})$$ **ตอบ**

19. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 17

ให้ $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$ จะได้ $f(t) = \text{Cos } 2t$

และ $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$ จะได้ $g(t) = \text{Cos } 2t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \text{Cos } 2t * \text{Cos } 2t$$

$$= \int_0^t \text{Cos } 2x \cdot \text{Cos } 2(t-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\text{Cos } 2t + \text{Cos }(4x-2t)\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\text{Cos } 2t)\cdot x \Big|_0^t + \frac{\text{Sin }(4x-2t)}{4}\Big|_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{2} t \text{ Cos } 2t + \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin } 2t - \text{Sin }(-2t)}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} t \text{ Cos } 2t + \frac{1}{4}\text{Sin } 2t$$ **ตอบ**

20. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$

วิธีทำ (ก) ใช้สูตรเหมือนข้อ 17

ให้ $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ จะได้ $f(t) = \text{Sin } t$

และ $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ จะได้ $g(t) = \text{Sin } t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \operatorname{Sin} t * \operatorname{Sin} t$$

$$= \int_0^t \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin}(t-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\operatorname{Cos}(2x-t) - \operatorname{Cos} t\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{Sin}(2x-t)}{2}\Big|_0^t - (\operatorname{Cos} t)\cdot x\Big|_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\operatorname{Sin} t - t\operatorname{Cos} t\}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \operatorname{Sin} t * \frac{1}{2}(\operatorname{Sin} t - t\operatorname{Cos} t)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Sin} t * \operatorname{Sin} t - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} t * t\operatorname{Cos} t$$

พิจารณา

$$\operatorname{Sin} t * t\operatorname{Cos} t = t\operatorname{Cos} t * \operatorname{Sin} t$$

$$= \int_0^t x\operatorname{Cos} x\operatorname{Sin}(t-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t x\{\operatorname{Sin} t - \operatorname{Sin}(2x-t)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t x\operatorname{Sin} t\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t x\operatorname{Sin}(2x-t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{Sin} t\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^t - \frac{1}{2}\left\{-x\frac{\operatorname{Cos}(2x-t)}{2}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{\operatorname{Cos}(2x-t)}{2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}t^2\operatorname{Sin} t + \frac{1}{4}t\operatorname{Cos} t - \frac{1}{8}\operatorname{Sin}(2x-t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{4}t^2\operatorname{Sin} t + \frac{1}{4}t\operatorname{Cos} t - \frac{1}{4}\operatorname{Sin} t$$

และ $\operatorname{Sin} t * \operatorname{Sin} t = \frac{1}{2}(\operatorname{Sin} t - t\operatorname{Cos} t)$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\text{Sin } t - t \text{ Cos } t)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}t^2 \text{ Sin } t + \frac{1}{4} t \text{ Cos } t - \frac{1}{4}\text{ Sin } t\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\text{ Sin } t - \frac{1}{4} t \text{ Cos } t - \frac{1}{8}t^2 \text{ Sin } t - \frac{1}{8} t \text{ Cos } t + \frac{1}{8}\text{ Sin } t$$

$$= \frac{3}{8}\text{ Sin } t - \frac{1}{8}t^2 \text{ Sin } t - \frac{3}{8} t \text{ Cos } t$$

$$= \frac{1}{8}\{(3-t^2)\text{ Sin } t - 3t \text{ Cos } t\}$$ **ตอบ**

(ข) ใช้สูตรเหมือนข้อ 17

ให้ $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$ จะได้ $f(t) = \text{Sin } 2t$

และ $G(s) = \frac{2}{s^2+4}$ จะได้ $g(t) = \text{Sin } 2t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{4}\text{ Sin } 2t * \text{Sin } 2t$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \text{Sin } 2x \text{ Sin } 2(t-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^t \{\text{Cos}(4x-2t) - \text{Cos } 2t\}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{\text{Sin}(4x-2t)}{4}\Big|_0^t - (\text{Cos } 2t)\cdot x\Big|_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{\text{Sin } 2t}{2} - t \text{ Cos } 2t\right\}$$

เพราะว่า

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\}$$

$$= \text{Cos } 2t * \frac{1}{16}(\text{Sin } 2t - 2t \text{ Cos } 2t)$$

$$= \frac{1}{16}\text{ Cos } 2t * \text{Sin } 2t - \frac{1}{8}\text{ Cos } 2t * t \text{ Cos } 2t$$

พิจารณา

$$\text{Cos } 2t * \text{Sin } 2t = \int_0^t \text{Cos } 2x \text{ Sin } 2(t-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\text{Sin } 2t - \text{Sin } (4x-2t)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{Sin } 2t\,(x)\Big|_0^t + \frac{\text{Cos } (4x-2t)}{4}\Big|_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,t \text{ Sin } 2t + 0$$

$$= \frac{1}{2}\,t \text{ Sin } 2t$$

พิจารณา

$$\text{Cos } 2t * t \text{ Cos } 2t = \int_0^t x \text{ Cos } 2x \text{ Cos } 2(t-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t x\{\text{Cos } 2t + \text{Cos } (4x-2t)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t x \text{ Cos } 2t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^t x \text{ Cos } (4x-2t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{Cos } 2t\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\left\{x\,\frac{\text{Sin } (4x-2t)}{4}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{\text{Sin } (4x-2t)}{4}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}t^2 \text{ Cos } 2t + \frac{1}{8}t \text{ Sin } 2t + \frac{\text{Cos } (4x-2t)}{32}\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{4}t^2 \text{ Cos } 2t + \frac{1}{8}t \text{ Sin } 2t + 0$$

$$= \frac{1}{4}t^2 \text{ Cos } 2t + \frac{1}{8}t \text{ Sin } 2t$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}t \text{ Sin } 2t\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}t^2 \text{ Cos } 2t + \frac{1}{8}t \text{ Sin } 2t\right)$$

$$= \frac{1}{32}t \text{ Sin } 2t - \frac{1}{32}t^2 \text{ Cos } 2t - \frac{1}{64}t \text{ Sin } t$$

$$= \frac{1}{64}t \text{ Sin } 2t - \frac{1}{32}t^2 \text{ Cos } 2t$$

$$= \frac{1}{64}t\,(\text{Sin } 2t - 2t \text{ Cos } 2t)$$ **ตอบ**

21. จงแสดงว่า

$$1 * 1 * 1 * 1 \ldots * 1 \text{ (1 มี n ตัว)} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$1 * 1 = \int_0^t (1)(1)\,dx$$

$$= x \Big|_0^t$$

$$= t = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

และ

$$1 * 1 * 1 = 1 * (1 * 1)$$

$$= 1 * t$$

$$= \int_0^t (1)(t-x)\,dx$$

$$= t(x) \Big|_0^t - \frac{x^2}{2} \Big|_0^t$$

$$= t^2 - \frac{t^2}{2}$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} \qquad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

และ

$$1 * 1 * 1 * 1 = 1 * (1 * 1 * 1)$$

$$= 1 * \frac{t^2}{2}$$

$$= \int_0^t \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{6} \Big|_0^t$$

$$= \frac{t^3}{6} = \frac{t^{4-1}}{(4-1)!} \qquad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

จาก (1), (2) และ (3) และการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้

$$1 * 1 * 1 * \ldots * 1 \text{ (n ตัว)} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$ ซ.ต.พ.

22. จงแสดงว่า

$$\int_0^t \text{Sin } u \text{ Cos } (t - u)\, du = \frac{1}{2} t \text{ Sin } t$$

$$\begin{aligned}
\text{L.S.} &= \int_0^t \text{Sin } u \text{ Cos } (t - u)\, du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \{ \text{Sin } t + \text{Sin } (2u - t) \}\, du \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \text{Sin } t\, (u) \Big|_0^t - \frac{\text{Cos } (2u - t)}{2} \Big|_0^t \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{ t \text{ Sin } t - 0 \} \\
&= \frac{1}{2} t \text{ Sin } t
\end{aligned}$$

ช.ต.พ.

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2

จากข้อ 1 ถึงข้อ 8 จงใช้การแยกเศษส่วนย่อยหาค่าของ

1. (ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^3-s}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา s^2-s-6 แยกเป็นสองตัวประกอบ

$$s^2-s-6 = (s+2)(s-3)$$

ดังนั้น

$$\frac{3s+16}{s^2-s-6} = \frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}$$

หรือ $3s+16 = A(s-3)+B(s+2)$

แทน $s=-2$; $A = \dfrac{3(-2)+16}{(-2-3)} = -2$

แทน $s=3$; $B = \dfrac{3(3)+16}{(3+2)} = 5$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{3s+16}{s^2-s-6} = \frac{-2}{s+2}+\frac{5}{s-3}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\} = -2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= -2e^{-2t}+5e^{3t}$$ **ตอบ**

(ข) เพราะว่า $s^3-s = s(s^2-1) = s(s-1)(s+1)$

ดังนั้น

$$\frac{2s-1}{s^3-s} = \frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)}$$

$$= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+1}$$

ในกรณีที่รากเป็นแบบเชิงเส้น (แบบไม่ซ้ำ) $s = 0, 1, -1$ จะได้

$$A = \frac{2s-1}{(s-1)(s+1)}\bigg|_{s=0} = 1$$

$$B = \frac{2s-1}{s(s+1)}\bigg|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{2s-1}{s(s-1)}\bigg|_{s=-1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{2s-1}{s^3-s} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+1}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{3}{2}\;L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}$$ **ตอบ**

2. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $6s^2 + 7s + 2 = (2s+1)(3s+2)$

$$= 6\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{2}{3}\right)$$

ดังนั้น

$$\frac{s+1}{6s^2+7s+2} = \frac{s+1}{6\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{A}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B}{s+\frac{2}{3}}\right\}$$

$$A = \frac{s+1}{s+\frac{2}{3}}\bigg|_{s=-\frac{1}{2}} = 3$$

$$B = \frac{s+1}{s+\frac{1}{2}}\bigg|_{s=-\frac{2}{3}} = -2$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{s+1}{6s^2+7s+2} = \frac{1}{6}\left\{ \frac{3}{s+\frac{1}{2}} + \frac{-2}{s+\frac{2}{3}} \right\}$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{6s^2+7s+2} \right\} = \frac{1}{6} L^{-1}\left\{ \frac{3}{s+\frac{1}{2}} + \frac{-2}{s+\frac{2}{3}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \right\} - \frac{1}{3} L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+\frac{2}{3}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-1/2\,t} - \frac{1}{3} e^{-2/3\,t}$$ **ตอบ**

(ข) แยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(s-\frac{1}{2})(s+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-\frac{1}{2}} + \frac{C}{s+1} \right\}$$

$$A = \frac{11s^2-2s+5}{(s-\frac{1}{2})(s+1)} \Bigg|_{s=2} = \frac{11(2)^2-2(2)+5}{(2-\frac{1}{2})(2+1)} = 10$$

$$B = \frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(s+1)} \Bigg|_{s=\frac{1}{2}} = -3$$

$$C = \frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(s-\frac{1}{2})} \Bigg|_{s=-1} = 4$$

ดังนั้น

$$\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{10}{s-2} + \frac{-3}{s-\frac{1}{2}} + \frac{4}{s+1} \right\}$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)} \right\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{10}{s-2} + \frac{-3}{s-\frac{1}{2}} + \frac{4}{s-1} \right\}$$

$$= 5 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - \frac{3}{2} L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-\frac{1}{2}} \right\} + 2 L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-1} \right\}$$

$$= 5e^{2t} - \frac{3}{2} e^{1/2\,t} + 2e^{t}$$ **ตอบ**

3. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$

วิธีทำ แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s+4}+\frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$= \frac{A(s^2+9)+(s+4)(Bs+C)}{(s+4)(s^2+9)}$$

หรือ $27-12s = A(s^2+9)+(s+4)(Bs+C)$

แทนค่า $s=-4$; $A = \frac{27-12(-4)}{(-4)^2+9} = 3$

แทนค่า $s = 3i$

$$27-12(3i) = (3i+4)(3Bi+C)$$

$$27-36i = -9B+12Bi+3Ci+4C$$

$$= (-9B+4C)+(12B+3C)i$$

เทียบ ส.ป.ส. จะได้

$-9B+4C = 27$ ....(1)

$12B+3C = -36$ ....(2)

(1) × 3; $-27B+12C = 81$ ....(3)

(2) × 4; $48B+12C = -144$ ....(4)

(4) − (3) $75B = -225$

$B = -3$

แทนค่า B ลงใน (2)

$$3C = -36-12(-3)$$

$$C = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{27 - 12s}{(s+4)(s^2+9)} = \frac{3}{s+4} + \frac{3s}{s^2+9}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{27 - 12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s+4}\right\} + 3\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

$$= 3e^{-4t} + 3\operatorname{Cos} 3t$$ **ตอบ**

(ข) $s^4 + 20s^2 + 64 = (s^2+4)(s^2+16)$

$$\frac{s^3 + 16s - 24}{s^4 + 20s^2 + 64} = \frac{As + B}{s^2+4} + \frac{Cs + D}{s^2+16}$$

$$= \frac{(As+B)(s^2+16) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+16)}$$

หรือ $s^3 + 16s - 24 = (As+B)(s^2+16) + (Cs+D)(s^2+4)$

$$= As^3 + Bs^2 + 16As + 16B + Cs^3 + Ds^2 + 4Cs + 4D$$

$$= (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (16A+4C)s + 16B + 4D$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$A + C = 1$ ....(1)

$B + D = 0$ ....(2)

$16A + 4C = 16$ ....(3)

$16B + 4D = -24$ ....(4)

(3) $- 4 \times$ (1) $\quad 12A = 12$

$A = 1$

แทนใน (1) $\quad C = 0$

(4) $- 4 \times$ (2) $\quad 12B = -24$

$B = -2$

แทนลงใน (2) $\quad D = 2$

ดังนั้น

$$\frac{s^3 + 16s - 24}{s^4 + 20s^2 + 64} = \frac{s-2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+16}$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{s-2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+16} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} + \frac{1}{2} L^{-1}\left\{ \frac{4}{s^2+16} \right\}$$

$$= \operatorname{Cos} 2t - \operatorname{Sin} 2t + \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 4t$$ **ตอบ**

4. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{ \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)} \right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$

$$\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+1}$$

$$= \frac{A\{(s+1)^2+1\} + (Bs+C)(s+3)}{(s+3)\{(s+1)^2+1\}}$$

หรือ $s - 1 = A\{(s+1)^2+1\} + (Bs+C)(s+3)$

แทน $s = -3$; $-4 = A\{5\}$

$$A = -\frac{4}{5}$$

แทน $s = -1 + i$ จะได้

$$-1 + i - 1 = \{B(-1+i) + C\}(-1+i+3)$$

$$-2 + i = (-B + Bi + C)(2+i)$$

$$= 2(-B+C) + 2Bi + (-B+C)i - B$$

$$= (-3B+2C) + (B+C)i$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$-3B + 2C = -2 \qquad \text{..........(1)}$$

$$B + C = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

$(1) + 3 \times (2)\ ; \quad 5C = 1$

$$C = \frac{1}{5}$$

แทนลงใน (2) $\quad B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ดังนั้น

$$\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{-\frac{4}{5}}{s+3} + \frac{\frac{4}{5}s + \frac{1}{5}}{(s+1)^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-\frac{4}{5}}{s+3} + \frac{\frac{4}{5}s+\frac{1}{5}}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\} - \frac{3}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{-t}\,\mathrm{Cos}\,t - \frac{3}{5}e^{-t}\,\mathrm{Sin}\,t$$

$$= \frac{1}{5}e^{-t}(4\,\mathrm{Cos}\,t - 3\,\mathrm{Sin}\,t) - \frac{4}{5}e^{-3t}$$ **ตอบ**

5. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

หรือ $s^2 - 2s + 3 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s+1)$

แทนค่า $s = -1\ ; \quad 6 = 4A$

$$A = \frac{3}{2}$$

แทนค่า $s = 1\ ; \quad 2 = 2C$

$$C = 1$$

แทนค่า $s = 0\ ; \quad 3 = A - B + C$

$$B = A + C - 3 = \frac{3}{2} + 1 - 3 = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\frac{s^2 - 2s + 3}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 2s + 3}{(s-1)^2(s+1)}\right\} = \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$+ L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + t\,e^{t}$$

$$= \frac{1}{2}(2t-1)e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$ **ตอบ**

(ข) $(s^2 - 4)^2 = \{(s-2)(s+2)\}^2 = (s-2)^2(s+2)^2$

$$\frac{3s^3 - 3s^2 - 40s + 36}{(s^2-4)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2}$$

หรือ $3s^3 - 3s^2 - 40s + 36 = A(s-2)(s+2)^2 + B(s+2)^2 + C(s+2)(s-2)^2$

$$+ D(s-2)^2$$

แทนค่า $s = 2$

$$24 - 12 - 80 + 36 = 0 + 16B + 0 + 0$$

$$B = -\frac{32}{16} = -2$$

แทน $s = -2$

$$-24 - 12 + 80 + 36 = 0 + 0 + 0 + 16D$$

$$D = \frac{80}{16} = 5$$

เลือกแทนค่า $s = 0$ และค่า B, D ด้วย จะได้

$$36 = -8A + 4(-2) + 8C + 4(5)$$

หรือ $-A + C = 3$ ....(1)

เลือกแทนค่า $s = 1$

$$3 - 3 - 40 + 36 = -9A + 9(-2) + 3C + (5)$$

หรือ $-3A + C = 3$ ....(2)

(1) – (2) $A = 0$

แทนลงใน (1) $C = 3$

ดังนั้น

$$\frac{3s^3 - 3s^2 - 40s + 36}{(s^2 - 4)^2} = \frac{-2}{(s-2)^2} + \frac{3}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s^3 - 3s^2 - 40s + 36}{(s^2 - 4)^2}\right\} = -2\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + 3\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$+ 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= -2t\,e^{2t} + 3e^{-2t} + 5t\,e^{-2t}$$

$$= (5t + 3)\,e^{-2t} - 2t\,e^{2t}$$ **ตอบ**

6. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2 + 2s + 5)}\right\}$

วิธีทำ

$$\frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 5}$$

หรือ $s^2 - 3 = A(s-3)(s^2 + 2s + 5) + B(s+2)(s^2 + 2s + 5) + (s+2)(s-3) - (Cs + D)$

แทนค่า $s = -2$

$$4 - 3 = A(-5)(5) + 0 + 0$$

$$A = -\frac{1}{25}$$

แทนค่า $s = 3$

$$9 - 3 = B(5)(20)$$

$$B = \frac{3}{50}$$

เลือกแทนค่า $s = 0$ และแทนค่า A, B จะได้

$$-3 = -15\left(-\frac{1}{25}\right) + 10\left(\frac{3}{50}\right) - 6D$$

$$6D = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + 3$$

$$D = \frac{21}{5 \times 6} = \frac{7}{10}$$

เลือกแทนค่า $s = 1$ และแทนค่า A, B, D จะได้

$$1 - 3 = \left(-\frac{1}{25}\right)(-2)(8) + \left(\frac{3}{50}\right)(3)(8) + (3)(-2)\left(C + \frac{7}{10}\right)$$

$$-2 = \frac{16}{25} + \frac{36}{25} - 6C - \frac{21}{5}$$

$$6C = -\frac{3}{25}$$

$$C = -\frac{1}{50}$$

ดังนั้น

$$\frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)} = \frac{-\frac{1}{25}}{s+2} + \frac{\frac{3}{50}}{s-3} + \frac{-\frac{1}{50}s + \frac{7}{10}}{(s+1)^2 + 4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\} = -\frac{1}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{3}{50}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{50}s + \frac{7}{10}}{(s+1)^2 + 4}\right\}$$

แต่ $-\frac{1}{50}s + \frac{7}{10} = -\frac{1}{50}s - \frac{1}{50} + \frac{7}{10} + \frac{1}{50}$

$$= -\frac{1}{50}(s+1) + \frac{18}{25}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\} = -\frac{1}{25}e^{-2t} + \frac{3}{50}e^{3t}$$

$$-\frac{1}{50}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$+\frac{9}{25}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= \frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\,\mathrm{Cos}\,2t + \frac{9}{25}e^{-t}\,\mathrm{Sin}\,2t$$ **ตอบ**

7. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$

วิธีทำ

$$\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{As+B}{s^2-2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

หรือ $s = (As+B)(s^2+2s+2) + (Cs+D)(s^2-2s+2)$

$= As^3 + Bs^2 + 2As^2 + 2Bs + 2As + 2B + Cs^3 + Ds^2 - 2Cs^2 - 2Ds$

$+ 2Cs + 2D$

$= (A+C)s^3 + (2A+B-2C+D)s^2 + 2(A+B+C-D)s + 2(B+D)$

เทียบสัมประสิทธิ์

$A + C = 0$ ....(1)

$2A + B - 2C + D = 0$ ....(2)

$2(A + B + C - D) = 1$ ....(3)

$2(B + D) = 0$ ....(4)

หรือ $B + D = 0$

จาก (2) $2A - 2C = 0$

หรือ $A - C = 0$ ....(5)

(1) + (5) $\quad A = 0$

และ $\quad C = 0$

แทนค่า A, C ลงใน (3) จะได้

$$2B - 2D = 1 \qquad \text{..........(6)}$$

(4) + (6) $\quad 4B = 1$

$$B = \frac{1}{4}$$

แทนค่า B ลงใน (6)

$$-2D = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$D = -\frac{1}{4}$$

ดังนั้น

$$\frac{s}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{s^2 - 2s + 2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s^2 + 2s + 2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 2s + 2)}\right\} = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right\}$$

$$- \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} e^{t} \text{Sin } t - \frac{1}{4} e^{-t} \text{Sin } t$$

$$= \frac{1}{2} \text{Sin } t \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Sin } t \text{ Sin h } (t)$$ **ตอบ**

8. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)^2}\right\}$

วิธีทำ

$$\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} + \frac{Es + F}{(s^2+1)^2}$$

$$2s^3 - s^2 - 1 = A(s+1)(s^2+1)^2 + B(s^2+1)^2 + (Cs+D)(s+1)^2(s^2+1) + (Es+F)(s+1)^2$$

แทนค่า $s = -1$

$$-2 - 1 - 1 = 0 + 4B + 0 + 0$$

$$B = -1$$

แทนค่า $s = i$

$$-2i + 1 - 1 = (Ei + F)(i + 1)^2$$

$$-2i = (Ei + F)(2i) = -2E + 2Fi$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$E = 0, \quad F = -1$$

เลือกแทนค่า $s = 0$ และแทนค่า E, F, B ด้วยจะได้

$$-1 = A + (-1) + D + (-1)$$

$$A + D = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

เลือกแทนค่า $s = 1$

$$2 - 1 - 1 = A(2)(4) + (-1)(4) + (C + D)(4)(2) + (-1)(4)$$

$$A + C + D = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

เลือกแทนค่า $s = 2$

$$16 - 4 - 1 = A(3)(25) + (-1)(25) + (2C + D)(9)(5) + 9(-1)$$

$$11 = 75A - 25 + 90C + 45D - 9$$

$$5A + 6C + 3D = 3 \qquad \text{..........(3)}$$

(2) − (1) ; $\quad C = 0$

จาก (3) $\quad 5A + 3D = 3 \qquad \text{..........(4)}$

$(4) - 3 \times (1)\ ;\quad 2A = 0$

$A = 0$

จาก (1) $\quad D = 1$

ดังนั้น

$$\frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{-1}{(s^2+1)^2}$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)^2} \right\} = (-1)\, L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

พิจารณา $L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$ จากเฉลยแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 20

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} = \frac{1}{2}(\text{Sin } t - t \text{ Cos } t)$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{ \frac{2s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2 (s^2+1)^2} \right\} = -t e^{-t} + \text{Sin } t - \frac{1}{2}(\text{Sin } t - t \text{ Cos } t)$$

$$= \frac{1}{2}\text{Sin } t + \frac{1}{2} t \text{ Cos } t - t e^{-t}$$ **ตอบ**

9. จงใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์ หาค่าของ $L^{-1}\left\{ \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)} \right\}$

วิธีทำ กรณีรากเป็นแบบกำลังหนึ่ง (ไม่ซ้ำ)

$p(s) = s - 1 \quad ; \quad q(s) = (s+3)(s^2+2s+2)$

$= s^3 + 5s^2 + 8s + 6$

$q'(s) = 3s^2 + 10s + 8$

แทนค่าราก $s = -3$

$p(-3) = -3 - 1 = -4$

$q'(-3) = 3(-3)^2 + 10(-3) + 8 = 5$

ดังนั้น พจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ (s + 3) คือ $-\frac{4}{5}e^{-3t}$

พิจารณากรณีรากเป็นกำลังสองแบบแยกตัวประกอบไม่ได้อีก (ไม่ซ้ำ)

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$$

รากของตัวประกอบ $(s+1)^2 + 1$ คือ $s = -1 + i$

$$\phi(s) = \frac{s-1}{s+3}$$

แทนค่า $s = -1 + i$

$$\phi(-1+i) = \frac{-1+i-1}{-1+i+3}$$

$$= \frac{-2+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{-4+4i+1}{4+1}$$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

นั่นคือ $\phi_r = -\frac{3}{5}$ และ $\phi_i = \frac{4}{5}$

ดังนั้น พจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s+1)^2 + 1$ คือ $e^{-t}\left(\frac{4}{5}\operatorname{Cos} t - \frac{3}{5}\operatorname{Sin} t\right)$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{1}{5}e^{-t}(4\operatorname{Cos} t - 3\operatorname{Sin} t) - \frac{4}{5}e^{-3t}$$ **ตอบ**

10. จงใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์หาค่าของ

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$$

วิธีทำ พิจารณากรณีรากเป็นแบบกำลังหนึ่ง (ไม่ซ้ำ) ของตัวประกอบ (s + 2) และ (s − 3)

$$p(s) = s^2 - 3 \quad ; \quad q(s) = (s+2)(s-3)(s^2+2s+5)$$

$$= s^4 + s^3 - 3s^2 - 17s - 30$$

$$q'(s) = 4s^3 + 3s^2 - 6s - 17$$

แทน $s = -2$

$$p(-2) = (-2)^2 - 3 = 1$$

$$q'(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) - 17 = -25$$

แทน $s = 3$

$$p(3) = (3)^2 - 3 = 6$$

$$q'(3) = 4(3)^3 + 3(3)^2 - 6(3) - 17 = 100$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s + 2)$ และ $(s - 3)$ คือ

$$\frac{1}{(-25)} e^{-2t} + \frac{6}{100} e^{3t}$$

พิจารณากรณีรากเป็นกำลังสองแบบแยกตัวประกอบไม่ได้ (ไม่ซ้ำ) ของตัวประกอบ

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$$

$$\phi(s) = \frac{s^2 - 3}{(s + 2)(s - 3)}$$

แทนค่าราก $s = -1 + 2i$

$$\phi(-1 + 2i) = \frac{(-1 + 2i)^2 - 3}{\{(-1 + 2i) + 2\}\{(-1 + 2i) - 3\}}$$

$$= \frac{1 - 4i - 4 - 3}{(1 + 2i)(-4 + 2i)}$$

$$= \frac{-6 - 4i}{-8 - 6i} \times \frac{-8 + 6i}{-8 + 6i}$$

$$= \frac{48 + 32i - 36i + 24}{64 + 36}$$

$$= \frac{72 - 4i}{100}$$

$$= \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

$$\phi_r = \frac{18}{25} \text{ และ } \phi_i = -\frac{1}{25}$$

ดังนั้น พจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s+1)^2 + 4$ คือ

$$\frac{e^{-t}}{2}\left(-\frac{1}{25}\text{Cos } 2t + \frac{18}{25}\text{Sin } 2t\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\text{Cos } 2t + \frac{9}{25}e^{-t}\text{Sin } 2t$$

ตอบ

11. จงใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์หาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$

วิธีทำ พิจารณากรณีรากเป็นกำลังสองแบบแยกตัวประกอบไม่ได้ (ไม่ซ้ำ) ของตัวประกอบ

$$s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$$

$$\phi(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}$$

แทนค่าราก $s = 1 + i$

$$\phi(1+i) = \frac{1+i}{(1+i)^2 + 2(1+i) + 2}$$

$$= \frac{1+i}{2i + 2 + 2i + 2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+i)}{(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

นั่นคือ $\phi_r = \frac{1}{4}$, $\phi_i = 0$

ดังนั้น พจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $s^2 - 2s + 2$ คือ

$$e^t\left(\frac{1}{4}\text{Sin } t\right)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาตัวประกอบ $s^2 + 2s + 2 \quad = \quad (s+1)^2 + 1$

$$\phi(s) \quad = \quad \frac{s}{s^2 - 2s + 2}$$

แทนค่าราก $s = -1 + i$

$$\phi(-1+i) \quad = \quad \frac{-1+i}{(-1+i)^2 - 2(-1+i) + 2}$$

$$= \quad \frac{-1+i}{-2i + 2 - 2i + 2}$$

$$= \quad -\frac{1}{4}\left(\frac{-1+i}{-1+i}\right)$$

$$= \quad -\frac{1}{4}$$

นั่นคือ $\quad \phi_r \quad = \quad -\frac{1}{4} \; ; \; \phi_i \quad = \quad 0$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s^2 + 2s + 2)$ คือ

$$e^{-t}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{Sin} t\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 2s + 2)}\right\} \quad = \quad e^{t}\left(\frac{1}{4}\operatorname{Sin} t\right) - e^{-t}\left(\frac{1}{4}\operatorname{Sin} t\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2}\operatorname{Sin} t\left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2}\operatorname{Sin} t \operatorname{Sin} h\,(t)$$

ตอบ

12. จงใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์หาค่าของ

(ก) $L^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 9s + 19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$ (ข) $L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$

วิธีทำ (ก) รากของ $(s + 3)$ คือ -3

$$p(s) \quad = \quad 2s^2 - 9s + 19 \quad ; \quad q(s) \quad = \quad (s-1)^2(s+3)$$

$$= \quad s^3 + s^2 - 5s + 3$$

$$q'(s) \quad = \quad 3s^2 + 2s - 5$$

$$p(-3) = 2(-3)^2 - 9(-3) + 19 = 64$$

$$q'(-3) = 3(-3)^2 + 2(-3) - 5 = 16$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $s + 3$ คือ

$$\frac{64}{16} e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

พิจารณากรณีรากเป็นกำลังหนึ่งแบบซ้ำ $(s - 1)^2$

$$\phi(s) = \frac{2s^2 - 9s + 19}{s + 3}$$

$$\phi'(s) = \frac{(s + 3)(4s - 9) - (2s^2 - 9s + 19)(1)}{(s + 3)^2}$$

$$= \frac{4s^2 + 12s - 9s - 27 - 2s^2 + 9s - 19}{(s + 3)^2}$$

$$= \frac{2s^2 + 12s - 46}{(s + 3)^2}$$

แทนค่า $s = 1$

$$\phi(1) = \frac{2(1)^2 - 9(1) + 19}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\phi'(1) = \frac{2(1)^2 + 12(1) - 46}{(1 + 3)^2} = -\frac{32}{16} = -2$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s - 1)^2$ คือ

$$e^t(-2 + 3t)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 9s + 19}{(s - 1)^2 (s + 3)}\right\} = (3t - 2)e^t + 4e^{-3t}$$ **ตอบ**

(ข) พิจารณากรณีรากกำลังหนึ่งแบบซ้ำ $(s + 1)^2$

$$\phi(s) = \frac{2s + 3}{(s + 2)^2}$$

$$\phi'(s) = \frac{(s + 2)^2 (2) - (2s + 3)\, 2(s + 2)(1)}{(s + 2)^4}$$

$$= \frac{2s^2 + 8s + 8 - 4s^2 - 14s - 12}{(s+2)^4}$$

$$= \frac{-2s^2 - 6s - 4}{(s+2)^4}$$

แทนค่าราก $s = -1$

$$\phi(-1) = \frac{2(-1) + 3}{(-1+2)^2} = 1$$

$$\phi'(-1) = \frac{-2(-1)^2 - 6(-1) - 4}{(-1+2)^4} = 0$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s + 1)^2$ คือ

$$e^{-t}(0 + t)$$

พิจารณากรณีรากกำลังหนึ่งแบบซ้ำ $(s + 2)^2$

$$\phi(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2}$$

$$\phi'(s) = \frac{(s+1)^2(2) - (2s+3)\,2(s+1)}{(s+1)^4}$$

$$= \frac{2s^2 + 4s + 2 - 4s^2 - 10s - 6}{(s+1)^4}$$

$$= \frac{-2s^2 - 6s - 4}{(s+1)^4}$$

แทนค่าราก $s = -2$

$$\phi(-2) = \frac{2(-2) + 3}{(-2+1)^2} = -1$$

$$\phi'(-2) = \frac{-2(-2)^2 - 6(-2) - 4}{(-2+1)^4} = 0$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s + 2)^2$ คือ

$$e^{-2t}(0 - t)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\} = e^{-t}t - e^{-2t}t = t(e^{-t} - e^{-2t})$$ **ตอบ**

13. ใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์หาค่าของ $L^{-1}\left\{\dfrac{11s^3 - 47s^2 + 56s + 4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$

วิธีทำ พิจารณากรณีรากกำลังหนึ่งแบบไม่ซ้ำ $(s + 2)$

$$p(s) = 11s^3 - 47s^2 + 56s + 4 \quad ; \quad q(s) = (s-2)^3(s+2)$$

$$= s^4 - 4s^3 + 16s - 16$$

$$q'(s) = 4s^3 - 12s^2 + 16$$

แทนค่าราก $s = -2$

$$p(-2) = 11(-2)^3 - 47(-2)^2 + 56(-2) + 4 = -384$$

$$q'(-2) = 4(-2)^3 - 12(-2)^2 + 16 = -64$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $s + 2$ คือ

$$\frac{(-384)}{(-64)} e^{-2t} = 6e^{-2t}$$

พิจารณา กรณีรากกำลังหนึ่งแบบซ้ำ $(s - 2)^3$

$$\phi(s) = \frac{11s^3 - 47s^2 + 56s + 4}{(s + 2)}$$

$$\phi'(s) = \frac{(s+2)(33s^2 - 94s + 56) - (11s^3 - 47s^2 + 56s + 4)(1)}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{22s^3 + 19s^2 - 188s + 108}{(s+2)^2}$$

$$\phi''(s) = \frac{(s+2)^2(66s^2 + 38s - 188) - (22s^3 + 19s^2 - 188s + 108)\,2(s+2)}{(s+2)^4}$$

$$= \frac{22s^3 + 132s^2 + 264s - 592}{(s+2)^3}$$

แทนค่าราก $s = 2$

$$\phi(2) = \frac{11(2)^3 - 47(2)^2 + 56(2) + 4}{(2+2)} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\phi'(2) = \frac{22(2)^3 + 19(2)^2 - 188(2) + 108}{(2+2)^2} = -\frac{16}{16} = -1$$

$$\phi''(2) = \frac{22(2)^3 + 132(2)^2 + 264(2) - 592}{(2+2)^3} = \frac{640}{64} = 10$$

ดังนั้น พจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s-2)^3$ คือ

$$e^{2t}\left(\frac{10}{2!} + \frac{(-1)}{1!}t + \frac{4}{0!}\frac{t^2}{2!}\right) = e^{2t}(5 - t + 2t^2)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{11s^3 - 47s^2 + 56s + 4}{(s-2)^3(s+2)}\right\} = (2t^2 - t + 5)e^{2t} + 6e^{-2t}$$ **ตอบ**

เฉลยแบบฝึกหัดระคน

1. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$

วิธีทำ กระจาย $s^3 + 1$ ออกเป็นสองตัวประกอบ จะได้

$$s^3 + 1 = (s+1)(s^2 - s + 1)$$

และ
$$s^2 - s + 1 = s^2 - s + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
$$= \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}}\right\}$$

ใช้ทฤษฎีของเฮวีไซด์ กรณีรากเป็นกำลังหนึ่งแบบไม่ซ้ำ

$$p(s) = 1 \quad ; \quad p(-1) = 1$$

$$q(s) = s^3 + 1$$

$$q'(s) = 3s^2 \quad ; \quad q'(-1) = 3(-1)^2 = 3$$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s+1)$ คือ

$$\frac{p(-1)}{q'(-1)} e^{(-1)t} = \frac{1}{(3)} e^{(-1)t} = \frac{1}{3} e^{-t}$$

กรณีที่รากเป็นกำลังสอง ซึ่งแยกตัวประกอบไม่ได้แบบไม่ซ้ำ

$$\phi(s) = \frac{1}{s+1}$$

แทนค่า $s = -a + bi = -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\phi\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} \quad \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$\phi_r = \frac{1}{2}$ และ $\phi_i = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

ดังนั้น พจน์ใน $f(t)$ **ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ** $\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ **คือ**

$$\frac{e^{-(-1/2)t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{Cos} \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right\}$$

$$-\frac{1}{3} e^{1/2 t} \left(\operatorname{Cos} \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

นั่นคือ

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 + 1} \right\} = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{1/2 t} \left(\operatorname{Cos} \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ e^{-t} - e^{1/2 t} \left(\operatorname{Cos} \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \operatorname{Sin} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right\}$$

ตอบ

2. **จงหาค่าของ** $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-s}(1 - e^{-s})}{s(s^2 + 1)} \right\}$

วิธีทำ

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-s}(1 - e^{-s})}{s(s^2 + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2 + 1)} \right\}$$

$$= \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}\right\}$$

พิจารณา

$$\frac{1}{s(s^2+1)} \quad = \quad \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad \text{..........(1)}$$

$$A \quad = \quad \frac{1}{s^2+1}\bigg|_{s=0} \quad = \quad 1$$

จาก (1)

$$1 \quad = \quad A(s^2+1) + s(Bs+C)$$

แทนค่า $s = i$

$$1 \quad = \quad A(0) + i(Bi + C)$$

$$1 \quad = \quad -B + Ci$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$C \quad = \quad 0 \text{ และ } B \quad = \quad -1$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s(s^2+1)} \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} \quad = \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} - L^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

ใช้สูตร

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} \quad = \quad f(t-a)\,u(t-a)$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} \quad = \quad (1)\,u(t-1)$$

$$L^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\} \quad = \quad \cos(t-1)\,u(t-1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} - L^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= (1)\,u(t-2) - \mathrm{Cos}\,(t-2)\,u(t-2)$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\} = \{1 - \mathrm{Cos}\,(t-1)\}\,u(t-1)$$

$$- \{1 - \mathrm{Cos}\,(t-2)\}\,u(t-2)$$ **ตอบ**

3. จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,x}{x}\,dx$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,t}{t}\,dt$$

$$= L\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,t}{t}\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \left\{\int_s^\infty L\{\mathrm{Sin}\,t\}\,ds\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \left\{\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \left\{\tan^{-1}(s)\Big|_s^\infty\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \left\{\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(s)\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$ **ตอบ**