บทที่ 2

การแปลงลาปลาซ (The Laplace transform)

สูตรและคุณสมบัติที่สำคัญ

1. การแปลงลาปลาซ (The Laplace transform)

$$L\{ f(t) \} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \quad ; \quad s > 0$$

2. ถ้า a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ $L\{ f_1(t) \} = F_1(s)$ และ $L\{ f_2(t) \} = F_2(s)$ ดังนั้น

$$L\{ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

3. คุณสมบัติการเลื่อนออกไป (Shifting property of first translation)

$$L\{ e^{at} f(t) \} = F(s-a) = F(s) \Big|_{s \to (s-a)}$$

4. คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล (Change of scale property)

$$L\{ f(at) \} = \frac{1}{a} F(s) \Big|_{s \to \frac{s}{a}}$$

5. การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (Laplace transforms of derivatives)

$$L\{ f^{(n)}(t) \} = s^n L\{ f(t) \} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6. การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล (Laplace transforms of integral)

$$L\left\{ \int_a^t f(t)\, dt \right\} = \frac{1}{s} L\{ f(t) \} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(t)\, dt$$

7. การแปลงลาปลาซของ t^n คูณกับ $f(t)$

$$L\{ t^n f(t) \} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

8. การแปลงลาปลาซของ $\dfrac{f(t)}{t}$

$$L\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

9. การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Laplace transform of unit step function)-

9.1 $L\{u(t)\} = \dfrac{1}{s} \qquad s > 0$

9.2 $L\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0$

10. การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีคาบ (Laplace transform of periodic function)

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt}{1 - e^{-as}}$$

เมื่อ a คือ คาบ (period) ของ f(t)

11. ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$L\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \qquad ; a \geqslant 0$$

และ

$$L\{f(t)\,u(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t-a)\}$$

12. การแปลงลาปลาซของผลการประสาน (Convolution) ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ และ $L\{g(t)\} = G(s)$ ดังนั้น

$$L\{f(t)\}L\{g(t)\} = L\left\{\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\right\}$$
$$= L\left\{\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx\right\}$$

หรือเขียนใหม่ตามนิยามผลการประสานจะได้

$$F(s)\,G(s) = L\{f * g\} = L\{g * f\}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $2t^2 - e^{-t}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
L\{2t^2 - e^{-t}\} &= 2L\{t^2\} - L\{e^{-t}\} \\
&= 2\,\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s+1} \\
&= \frac{4(s+1) - s^3}{s^3(s+1)} \\
&= \frac{4 + 4s - s^3}{s^3(s+1)} \qquad \textbf{ตอบ}
\end{aligned}
$$

2. จงหาค่าของ $L\{6 \sin 2t - 5 \text{Cos}\, 2t\}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
L\{6 \text{ Sin } 2t - 5 \text{ Cos } 2t\} &= 6L\{\text{Sin } 2t\} - 5L\{\text{Cos } 2t\} \\
&= 6\,\frac{2}{s^2+4} - 5\,\frac{s}{s^2+4} \\
&= \frac{12 - 5s}{s^2+4} \qquad \textbf{ตอบ}
\end{aligned}
$$

3. จงหาค่าของ $L\{(t^2 + 1)^2\}$

วิธีทำ เพราะว่า $(t^2 - 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
L\{(t^2+1)^2\} &= L\{t^4 + 2t^2 + 1\} \\
&= L\{t^4\} + 2L\{t^2\} + L\{1\} \\
&= \frac{4!}{s^5} + 2\,\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{24 + 4s^2 + s^4}{s^5} \qquad \textbf{ตอบ}
\end{aligned}
$$

4. จงหาค่าของ $L\{(\text{Sin } t - \text{Cos } t)^2\}$

วิธีทำ เพราะว่า $(\text{Sin } t - \text{Cos } t)^2 = \text{Sin}^2 t - 2 \text{ Sin } t \text{ Cos } t + \text{Cos}^2 t$

$$= 1 - 2\,\mathrm{Sin}\,t\,\mathrm{Cos}\,t$$

$$= 1 - \mathrm{Sin}\,2t$$

เพราะฉะนั้น $L\{(\mathrm{Sin}\,t - \mathrm{Cos}\,t)^2\} = L\{1 - \mathrm{Sin}\,2t\}$

$$= L\{1\} - L\{\mathrm{Sin}\,2t\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{s^2 - 2s + 4}{s(s^2 + 4)}$$ **ตอบ**

5. จงหาค่าของ $L\{3\,\mathrm{Cos\,h}\,5t - 4\,\mathrm{Sin\,h}\,5t\}$

วิธีทำ $L\{3\,\mathrm{Cos\,h}\,5t - 4\,\mathrm{Sin\,h}\,5t\} = 3L\{\mathrm{Cos\,h}\,5t\} - 4L\{\mathrm{Sin\,h}\,5t\}$

$$= 3 \cdot \frac{s}{s^2 - 25} - 4\,\frac{4}{s^2 - 25}$$

$$= \frac{3s - 20}{s^2 - 25}$$ **ตอบ**

6. จงหาค่าของ $L\{(5e^{2t} - 3)^2\}$

วิธีทำ เพราะว่า $(5e^{2t} - 3)^2 = 25e^{4t} - 30e^{2t} + 9$

เพราะฉะนั้น $L\{(5e^{2t} - 3)^2\} = 25L\{e^{4t}\} - 30L\{e^{2t}\} + L\{9\}$

$$= \frac{25}{s-4} - \frac{30}{s-2} + \frac{9}{s}$$ **ตอบ**

7. จงหาค่าของ $L\{4\,\mathrm{Cos}^2\,2t\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\mathrm{Cos}^2\,2t = \dfrac{1 + \mathrm{Cos}\,4t}{2}$

เพราะฉะนั้น $L\{4\,\mathrm{Cos}^2\,2t\} = 4L\left\{\dfrac{1 + \mathrm{Cos}\,4t}{2}\right\}$

$$= 2L\{1\} + 2L\{\mathrm{Cos}\,4t\}$$

$$= \frac{2}{s} + 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 16}$$ **ตอบ**

8. จงหาค่าของ $L\{\mathrm{Cos}\,(at + b)\}$

วิธีทำ การจาย Cos (at + b) ให้อยู่ในรูปผลต่าง 2 พจน์

จะได้ $\text{Cos}(at + b) = \text{Cos } at \text{ Cos } b - \text{Sin } at \text{ Sin } b$

ดังนั้น

$$L\{\text{Cos}(at + b)\} = L\{\text{Cos } at \text{ Cos } b\} - L\{\text{Sin } at \text{ Sin } b\}$$

$$= \text{Cos } b\, L\{\text{Cos } at\} - \text{Sin } b\, L\{\text{Sin } at\}$$

$$= \text{Cos } b \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - \text{Sin } b \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{s\,\text{Cos } b - a\,\text{Sin } b}{s^2 + a^2}$$ **ตอบ**

9. จงหาค่าของ $L\{\text{Cos } h^2\, 4t\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\text{Co sh } 4t = \frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2}$

เพราะฉะนั้น $\text{Cos } h^2\, 4t = \left(\frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{8t} + 2 + e^{-8t}}{4}$$

$$= \frac{e^{8t} + e^{-8t}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Cos } h\, 8t + \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $L\{\text{Cos } h^2\, 4t\} = \frac{1}{2} L\{\text{Cos } h\, 8t\} + \frac{1}{2} L\{1\}$

$$= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - 64} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2 + s^2 - 64}{s(s^2 - 64)}\right\}$$

$$= \frac{s^2 - 32}{s(s^2 - 64)}$$ **ตอบ**

10. จงหาค่าของ $L\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\,\text{Sin } 5t + 3\,\text{Cos } 2t\}$

วิธีทำ

$L\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\,\text{Sin } 5t + 3\,\text{Cos } 2t\}$

$$= 3L\{t^4\} - 2L\{t^3\} + 4L\{e^{-3t}\} - 2L\{\text{Sin } 5t\} + 3L\{\text{Cos } 3t\}$$

$$= 3 \cdot \frac{4!}{s^5} - 2 \cdot \frac{3!}{s^4} + \frac{4}{s+3} - 2 \cdot \frac{5}{s^2+25} + 3 \cdot \frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{72}{s^5} - \frac{12}{s^4} + \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s^2+25} + \frac{3s}{s^2+4}$$ **ตอบ**

11. จงแสดงว่า $L\{\text{Cos } h^2 at\} = \dfrac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

วิธีทำ เพราะว่า $\text{Cos } h^2 at = \left(\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2at} + 2 + e^{-2at}}{4}$$

$$= \frac{e^{2at} + e^{-2at}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Cos h } 2at + \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $L\{\text{Cos } h^2 at\} = \dfrac{1}{2} L\{\text{Cos h } 2at\} + \dfrac{1}{2} L\{1\}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2 - 4a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2 + s^2 - 4a^2}{s(s^2 - 4a^2)}\right\}$$

$$= \frac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$$ **ข.ต.พ.**

12. จงแสดงว่า $L\{\text{Sin } h^2 at\} = \dfrac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

วิธีทำ เพราะว่า $\text{Sin h } at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

เพราะฉะนั้น $\text{Sin } h^2 at = \left(\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2at} - 2 + e^{-2at}}{4}$$

$$= \frac{e^{2at} + e^{-2at}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Cos h } 2at - \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$L\{\text{Sin h}^2 at\} = \frac{1}{2}L\{\text{Cos h } 2at\} - \frac{1}{2}L\{1\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - 4a^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2 - s^2 + 4a^2}{s(s^2 - 4a^2)}\right\}$$

$$= \frac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$$ ช.ต.พ.

13. จงแสดงว่า $L\{\text{Cos h } at \text{ Sin } at\} = \frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

วิธทำ เพราะว่า $\text{Cos h } at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$L\{\text{Cos h } at \text{ Sin } at\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot \text{Sin } at\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\text{ Sin } at\} + \frac{1}{2}L\{e^{-at}\text{ Sin } at\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(s-a)^2 + a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(s+a)^2 + a^2}$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{(s+a)^2 + a^2 + (s-a)^2 + a^2}{\{(s-a)^2 + a^2\}\{(s+a)^2 + a^2\}}\right]$$

พิจารณาส่วน

$$\{(s-a)^2 + a^2\}\{(s+a)^2 + a^2\} = \{s^2 - 2as + a^2 + a^2\}\{s^2 + 2as + a^2 + a^2\}$$

$$= \{(s^2 + 2a^2) - 2as\}\{(s^2 + 2a^2) + 2as\}$$

$$= (s^2 + 2a^2)^2 - (2as)^2$$

$$= s^4 + 4a^2s^2 + 4a^4 - 4a^2s^2$$

$$= s^4 + 4a^4$$

ดังนั้น

$$L\{\operatorname{Cos} h\,(at)\operatorname{Sin} at\} = \frac{a}{2}\left\{\frac{s^2+2as+a^2+a^2+s^2-2as+a^2+a^2}{s^4+4a^4}\right\}$$

$$= \frac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4} \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

14. จงแสดงว่า $L\{\operatorname{Cos} h\; at \operatorname{Cos} at\} = \dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

วิธีทำ

$$L\{\operatorname{Cos} h\; at\operatorname{Cos} at\} = L\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\operatorname{Cos} at\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\operatorname{Cos} at\} + \frac{1}{2}L\{e^{-at}\operatorname{Cos} at\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{s+a}{(s+a)^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)\{(s+a)^2+a^2\}+(s+a)\{(s-a)^2+a^2\}}{\{(s-a)^2+a^2\}\{(s+a)^2+a^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)(s^2+2as+2a^2)+(s+a)(s^2-2as+2a^2)}{s^4+4a^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s^3+as^2-2a^3)+(s^3-as^2+2a^3)}{s^4+4a^4}\right]$$

$$= \frac{s^3}{s^4+4a^4} \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

15. จงแสดงว่า $L\{\operatorname{Sin} h\; at\operatorname{Sin} at\} = \dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

วิธีทำ

$$L\{\operatorname{Sin} h\; at\operatorname{Sin} at\} = L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\operatorname{Sin} at\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\operatorname{Sin} at\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\operatorname{Sin} at\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a}{(s-a)^2+a^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2}$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{\{(s+a)^2+a^2\}-\{(s-a)^2+a^2\}}{\{(s-a)^2+a^2\}\{(s+a)^2+a^2\}}\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{s^2+2as+a^2+a^2-s^2+2as-a^2-a^2}{s^4+4a^4}\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{4as}{s^4+4a^4}\right]$$

$$= \frac{2as}{s^4 + 4a^4}$$ ซ.ต.พ.

16. จงแสดงว่า $L\{\text{Sin h at Cos at}\} = \frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

วิธีทำ

$$L\{\text{Sin h at Cos at}\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\text{ Cos at}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\text{ Cos at}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\text{ Cos at}\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + a^2} - \frac{1}{2}\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)\{(s+a)^2 + a^2\} - (s+a)\{(s-a)^2 + a^2\}}{\{(s-a)^2 + a^2\}\{(s+a)^2 + a^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s^3 + as^2 - 2a^3) - (s^3 + as^2 + 2a^3)}{s^4 + 4a^4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2as^2 - 4a^3}{s^4 + 4a^4}\right]$$

$$= \frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$$

17. จงหาค่าของ $L\{\text{Cosh at Cos h bt}\}$

วิธีทำ

$$L\{\text{Cos h at Cos h bt}\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}L\{e^{(a+b)t} + e^{-(a+b)t} + e^{(a-b)t} + e^{-(a-b)t}\}$$

$$= \frac{1}{2}L\left\{\frac{e^{(a+b)t} + e^{-(a+b)t}}{2} + \frac{e^{(a-b)t} + e^{-(a-b)t}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{\text{Cos h }(a+b)t + \text{Cos h }(a-b)t\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - (a+b)^2} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - (a-b)^2}$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{\{s^2 - (a-b)^2\} + \{s^2 - (a+b)^2\}}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s^2 - a^2 + 2ab - b^2 + s^2 - a^2 - 2ab - b^2}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{2s^2 - 2a^2 - 2b^2}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}\right]$$

$$= \frac{s(s^2 - a^2 - b^2)}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}$$ **ตอบ**

18. จงหาค่าของ $L\{\text{Sin h at Sin h bt}\}$

วิธีทำ

$$L\{\text{Sin h at Sin h bt}\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \cdot \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} L\{e^{(a+b)t} + e^{-(a+b)t} - e^{(a-b)t} - e^{-(a-b)t}\}$$

$$= \frac{1}{2} L\left\{\frac{e^{(a+b)t} + e^{-(a+b)t}}{2} - \frac{e^{(a-b)t} + e^{-(a-b)t}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\{\text{Cos h }(a+b)t - \text{Cos h }(a-b)t\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - (a+b)^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 - (a-b)^2}$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{\{s^2 - (a-b)^2\} - \{s^2 - (a+b)^2\}}{\{s^2 - (a+b)^2\} - \{s^2 - (a-b)^2\}}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s^2 - a^2 + 2ab - b^2 - s^2 + a^2 + 2ab + b^2}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\frac{4as}{\{s^2 - (a+b)^2\}\{s^2 - (a-b)^2\}}$$

$$= \frac{2as^2}{\{s^2 - (a+b)^2\} \cdot \{s^2 - (a-b)^2\}}$$ **ตอบ**

19. จงหาค่าของ $L\{\text{Cos h at Sin bt}\}$

วิธีทำ

$$L\{\text{Cos h at Sin bt}\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\ \text{Sin bt}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\{e^{at}\ \text{Sin bt}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-at}\ \text{Sin bt}\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b}{(s-a)^2+b^2} + \frac{1}{2}\,\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

$$= \frac{b}{2}\left[\frac{\{(s+a)^2+b^2\} + \{(s-a)^2+b^2\}}{(s^2-2as+a^2+b^2)(s^2+2as+a^2+b^2)}\right]$$

$$= \frac{b}{2}\left[\frac{s^2+2as+a^2+b^2+s^2-2as+a^2+b^2}{\{(s^2+a^2+b^2)-2as\}\{(s^2+a^2+b^2)+2as\}}\right]$$

$$= \frac{b(s^2+a^2+b^2)}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$$ **ตอบ**

20. จงหาค่าของ $L\{\operatorname{Cos} h\, at \operatorname{Cos} bt\}$

วิธีทำ

$$L\{\operatorname{Cos} h\, at \operatorname{Cos} bt\} = L\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\operatorname{Cos} bt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\operatorname{Cos} bt\} + \frac{1}{2}L\{e^{-at}\operatorname{Cos} bt\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} + \frac{1}{2}\,\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)\{(s+a)^2+b^2\}+(s+a)\{(s-a)^2+b^2\}}{\{(s-a)^2+b^2\}\{(s+a)^2+b^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\{s^3+as^2-a^2s+b^2s-ab^2-a^3\}+\{s^3-as^2-a^2s+b^2s+ab^2+a^3\}}{\{s^2-2as+a^2+b^2\}\{s^2+2as+a^2+b^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2s^3-2a^2s+2b^2s}{\{(s^2+a^2+b^2)-2as\}\{(s^2+a^2+b^2)+2as\}}\right]$$

$$= \frac{s(s^2-a^2+b^2)}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$$ **ตอบ**

21. จงหาค่าของ $L\{\operatorname{Sin} h\, at \operatorname{Sin} bt\}$

วิธีทำ

$$L\{\operatorname{Sin} h\, at \operatorname{Sin} bt\} = L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\operatorname{Sin} bt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\operatorname{Sin} bt\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\operatorname{Sin} bt\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b}{(s-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

$$= \frac{b}{2}\left[\frac{\{(s+a)^2+b^2\}-\{(s-a)^2+b^2\}}{\{(s-a)^2+b^2\}\{(s+a)^2+b^2\}}\right]$$

$$= \frac{b}{2}\left[\frac{(s^2+2as+a^2+b^2)-(s^2-2as+a^2+b^2)}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}\right]$$

$$= \frac{b}{2}\left[\frac{4as}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}\right]$$

$$= \frac{2abs}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$$ **ตอบ**

22. จงหาค่าของ $L\{\text{Sin h at Cos bt}\}$

วิธีทำ

$$L\{\text{Sin h at Cos bt}\} = L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\text{ Cos bt}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{at}\text{ Cos bt}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\text{ Cos bt}\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\,\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)\{(s+a)^2+b^2\}-(s+a)\{(s-a)^2+b^2\}}{\{(s-a)^2+b^2\}\{(s+a)^2+b^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\{s^3+as^2-a^2s+b^2s-ab^2-a^3\}-\{s^3-as^2-a^2s+b^2s+ab^2+a^3\}}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2as^2-2ab^2-2a^3}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}\right]$$

$$= \frac{a(s^2-a^2-b^2)}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$$ **ตอบ**

23. จงหาค่าของ $L\{t^3 e^{-3t}\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s)\Big|_{s \to s+a}$$

และ $L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

ดังนั้น

$$L\{e^{-3t}t^3\} = \frac{3!}{(s+3)^4} = \frac{6}{(s+3)^4}$$ ตอบ

24. จงหาค่าของ $L\{(t+2)^2 e^t\}$

วิธีทำ เพราะว่า $(t+2)^2 = t^2 + 4t + 4$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
L\{(t+2)^2 e^t\} &= L\{(t^2+4t+4)e^t\} \\
&= L\{e^t t^2\} + 4L\{e^t t\} + 4L\{e^t\} \\
&= \frac{2!}{(s-1)^3} + 4\cdot\frac{1}{(s-1)^2} + 4\cdot\frac{1}{s-1} \\
&= \frac{2+4(s-1)+4(s-1)^2}{(s-1)^3} \\
&= \frac{2+4s-4+4s^2-8s+4}{(s-1)^3} \\
&= \frac{4s^2-4s+2}{(s-1)^3}
\end{aligned}$$ ตอบ

25. จงหาค่าของ $L\{e^{2t}(3\,\text{Sin}\,4t - 4\,\text{Cos}\,4t)\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
L\{e^{2t}(3\,\text{Sin}\,4t - 4\,\text{Cos}\,4t)\} &= 3L\{e^{2t}\,\text{Sin}\,4t\} - 4L\{e^{2t}\,\text{Cos}\,4t\} \\
&= 3\,\frac{4}{(s-2)^2+16} - 4\,\frac{s-2}{(s-2)^2+16} \\
&= \frac{12-4s+8}{(s-2)^2+16} \\
&= \frac{20-4s}{s^2-4s+20}
\end{aligned}$$ ตอบ

26. จงหาค่าของ $L\{e^{-t}(3\,\text{Sin h}\,2t - 5\,\text{Cos h}\,2t)\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
L\{e^{-t}(3\,\text{Sin h}\,2t - 5\,\text{Cos h}\,2t)\} &= 3L\{e^{-t}\,\text{Sin h}\,2t\} - 5L\{e^{-t}\,\text{Cos h}\,2t\} \\
&= 3\cdot\frac{2}{(s+1)^2-4} - 5\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2-4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{6 - 5s - 5}{(s + 1)^2 - 4}$$

$$= \frac{1 - 5s}{s^2 + 2s - 3}$$ **ตอบ**

27. จงหาค่าของ $L\{ e^{-t} \operatorname{Sin}^2 t \}$

วิธีทำ เพราะว่า $\operatorname{Sin}^2 t = \frac{1 - \operatorname{Cos} 2t}{2}$

ดังนั้น

$$L\{ e^{-t} \operatorname{Sin}^2 t \} = L\{ e^{-t} \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} 2t}{2} \right) \}$$

$$= \frac{1}{2} L\{ e^{-t} \} - \frac{1}{2} L\{ e^{-t} \operatorname{Cos} 2t \}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + 1} \right) - \frac{1}{2} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(s + 1)^2 + 4 - (s + 1)^2}{(s + 1) \{ (s + 1)^2 + 4 \}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{s^2 + 2s + 1 + 4 - s^2 - 2s - 1}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)} \right]$$

$$= \frac{2}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$ **ตอบ**

28. จงหาค่าของ $L\{ (1 + t e^{-t})^3 \}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$(1 + t e^{-t})^3 = 1 + 3t e^{-t} + 3t^2 e^{-2t} + t^3 e^{-3t}$$

ดังนั้น

$$L\{ (1 + t e^{-t})^3 \} = L\{ 1 + 3t e^{-t} + 3t^2 e^{-2t} + t^3 e^{-3t} \}$$

$$= L\{ 1 \} + 3L\{ e^{-t} t \} + 3L\{ e^{-2t} t^2 \} + L\{ e^{-3t} t^3 \}$$

$$= \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{(s + 1)^2} + 3 \frac{2!}{(s + 2)^3} + \frac{3!}{(s + 3)^4}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{3}{(s + 1)^2} + \frac{6}{(s + 2)^3} + \frac{6}{(s + 3)^4}$$ **ตอบ**

29. จงหาค่าของ $L\{ f(2t) \}$ เมื่อกำหนดให้

$$L\{f(t)\} = \frac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)\Big|_{s \to \frac{s}{a}}$$

ดังนั้น

$$L\{f(2t)\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}\right\}\Big|_{s \to \frac{s}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(\frac{s}{2})^2 - (\frac{s}{2}) + 1}{(2\frac{s}{2}+1)^2(\frac{s}{2}-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{s^2 - 2s + 4}{4(s+1)^2\frac{(s-2)}{2}}\right\}$$

$$= \frac{s^2 - 2s + 4}{4(s+1)^2(s-2)}$$ **ตอบ**

30. ถ้า $L\{f(t)\} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{s}$ จงหา $L\{e^{-t} f(3t)\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)\Big|_{s \to \frac{s}{a}}$$

ดังนั้น

$$L\{f(3t)\} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}\right)\Big|_{s \to \frac{s}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-\frac{3}{s}}}{\frac{s}{3}}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{3}{s}}}{s}$$

เพราะว่า

$$L\{e^{-t} f(3t)\} = L\{f(3t)\}\Big|_{s \to s+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$L\{e^{-t} f(3t)\} = \frac{e^{-\frac{3}{s}}}{s}\Big|_{s \to s+1}$$

$$= \frac{e^{-\frac{3}{s+1}}}{s+1}$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่าของ $L\{\int_0^t te^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t\,dt\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{\int_a^t f(t)\,dt\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)\,dt$$

ดังนั้น

$$L\{\int_0^t t\,e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t\,dt\} = \frac{1}{s}L\{t\,e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t\} + \frac{1}{s}\int_0^0 t\,e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t\,dt$$

$$= \frac{1}{s}L\{e^{-3t}\,t\,\mathrm{Sin}\,2t\} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L\{e^{-at}f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s \to s+a}$$

เพราะฉะนั้น

$$L\{e^{-3t}\,t\,\mathrm{Sin}\,2t\} = L\{t\,\mathrm{Sin}\,2t\}\Big|_{s \to s+3} \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา $L\{t\,\mathrm{Sin}\,2t\}$

จากสูตร $L\{t\,f(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{f(t)\}$

ดังนั้น

$$L\{t\,\mathrm{Sin}\,2t\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{\mathrm{Sin}\,2t\}$$

$$= (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{4s}{(s^2+4)^2} \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า (3) ลงใน (2) แล้วแทนค่าลงใน (1) จะได้

$$L\left\{ \int_0^t t\, e^{-3t} \operatorname{Sin} 2t\, dt \right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{4(s+3)}{\{(s+3)^2+4\}^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{s(s^2+6s+13)^2}$$ **ตอบ**

2. จงหาค่าของ $L\left\{ e^{-3t} \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt \right\}$

วิธีทำ ใช้สูตร

$$L\{e^{-at} f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s \to s+a}$$

โดยคิดว่า $f(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt$ ดังนั้น

$$L\left\{ e^{-3t} \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt \right\} = L\left\{ \int_0^t \frac{\sin 2t}{t}\, dt \right\}\Big|_{s \to s+3} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา $L\left\{ \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt \right\}$ โดยใช้สูตร

$$L\left\{ \int_a^t f(t)\, dt \right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(t)\, dt$$

เพราะฉะนั้น

$$L\left\{ \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt \right\} = \frac{1}{s} L\left\{ \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t} \right\} + \frac{1}{s} \int_0^0 \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s} L\left\{ \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t} \right\} \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา $L\left\{ \frac{\operatorname{Sin} 2t}{t} \right\}$ โดยเทียบกับสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{f(t)\}\,ds$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$L\left\{\frac{\text{Sin } 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{\text{Sin } 2t\}\,ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4}\,ds$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{s}{2}\right\}\Big|_s^\infty$$

$$= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left\{\frac{s}{2}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left\{\frac{s}{2}\right\}$$

$$= \text{Cot}^{-1}\left\{\frac{s}{2}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

แทนค่า (3) ลงใน (2) แล้วนำไปแทนใน (1) จะได้

$$L\left\{e^{-3t}\int_0^t \frac{\text{Sin } 2t}{t}\,dt\right\} = \frac{1}{s+3}\cdot\text{Cot}^{-1}\left\{\frac{s+3}{2}\right\}$$

ตอบ

3. จงหาค่าของ $L\{e^{-3t}\int_0^t t\,\text{Sin } 2t\,dt\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L\{e^{-3t}\int_0^t t\,\text{Sin } 2t\,dt\} = L\left\{\int_0^t t\,\text{Sin}2t\,dt\right\}\Big|_{s\to s+3} \qquad (1)$$

และ

$$L\{\int_0^t t\,\text{Sin } 2t\,dt\} = \frac{1}{s}L\{t\,\text{Sin } 2t\} + \frac{1}{s}\int_0^0 t\,\text{Sin } 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{s}L\{t\,\text{Sin } 2t\}$$

แต่ $L\{t\,\text{Sin } 2t\} = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

เพราะฉะนั้น

$$L\{\int_0^t t \operatorname{Sin} 2t\, dt\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$= \frac{4}{(s^2+4)^2} \quad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L\{e^{-3t}\int_0^t t \operatorname{Sin} 2t\, dt\} = \frac{4}{\{(s+3)^2+4\}^2}$$

$$= \frac{4}{(s^2+6s+13)^2} \quad \text{ตอบ}$$

4. จงหาค่าของ $L\left\{\int_0^t \frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\, dt\right\}$

วิธีทำ ใช้สูตร

$$L\{\int_a^t f(t)\, dt\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)\, dt$$

จะได้

$$L\left\{\int_0^t \frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\, dt\right\} = \frac{1}{s}L\left\{\frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\right\} + \frac{1}{s}\int_0^0 \frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s}L\left\{\frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\right\} \quad \text{..........(1)}$$

ใช้สูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{f(t)\}\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{e^t - \operatorname{Cos} 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{e^t - \operatorname{Cos} 2t\}\, ds \quad \text{..........(2)}$$

พิจารณา $L\{e^t - \cos 2t\}$

$$L\{e^t - \cos 2t\} = L\{e^t\} - L\{\cos 2t\}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4} \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า (3) ลงใน (2) จะได้

$$L\left\{\frac{e^t - \cos 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left\{\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4}\right\} ds$$

$$= \left\{\ln(s-1) - \frac{1}{2}\ln(s^2+4)\right\}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s-1}{(s^2+4)^{1/2}}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s\left(1-\frac{1}{s}\right)}{s\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{\left(1-\frac{1}{s}\right)}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln(1) - \ln \frac{\left(1-\frac{1}{s}\right)}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \ln \frac{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{1}{s}\right)}$$

$$= \ln \frac{s^2+4)^{1/2}}{(s-1)} \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า (4) ลงใน (1) จะได้

$$L\left\{ \int_0^t \frac{e^t - \cos 2t}{t}\, dt \right\} = \frac{1}{s} \ln \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{(s - 1)} \qquad \textbf{ตอบ}$$

6. จงแสดงว่า

$$L\left\{ \int_0^t \frac{1 - e^t}{t}\, dt \right\} = \frac{1}{s} \ln \left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$L\left\{ \int_0^t \frac{1 - e^t}{t}\, dt \right\} = \frac{1}{s} L\left\{ \frac{1 - e^t}{t} \right\} + \frac{1}{s} \int_0^0 \frac{1 - e^t}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s} L\left\{ \frac{1 - e^t}{t} \right\} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty L\{f(t)\}\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{ \frac{1 - e^t}{t} \right\} = \int_s^\infty L\{1 - e^t\}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \Big[L\{1\} - L\{e^t\} \Big]\, ds$$

$$= \int_s^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s - 1} \right] ds$$

$$= \{\ln s - \ln (s - 1)\} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \left(\frac{s}{s - 1} \right) \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s}{s\left(1 - \frac{1}{s}\right)} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln 1 - \ln \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{s}\right)}$$

$$= \ln \left(1 - \frac{1}{s}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L \left\{ \int_0^t \frac{1 - e^t}{t}\, dt \right\} = \frac{1}{s} \ln \left(1 - \frac{1}{s}\right) \qquad \text{ซ.ต.พ.}$$

7. จงแสดงว่า

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t} \operatorname{Sin} u}{u}\, du\, dt = \frac{\pi}{4}$$

พิสูจน์ จัดรูปใหม่เพื่อให้เข้านิยามของการแปลงลาปลาซ จะได้

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t} \operatorname{Sin} u}{u}\, du\, dt = \int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} \frac{\operatorname{Sin} u}{u}\, du \right\} e^{-t}\, dt$$

$$= L \left\{ \int_{u=0}^{t} \frac{\operatorname{Sin} u}{u}\, du \right\} \Big|_{s=1} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L \left\{ \int_a^t f(t)\, dt \right\} = \frac{1}{s} L \{ f(t) \} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(t)\, dt$$

ดังนั้น

$$L \left\{ \int_0^t \frac{\operatorname{Sin} u}{u}\, du \right\} = \frac{1}{s} L \left\{ \frac{\operatorname{Sin} t}{t} \right\} + \frac{1}{s} \int_0^0 \frac{\operatorname{Sin} t}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s} L \left\{ \frac{\operatorname{Sin} t}{t} \right\} \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา $L \left\{ \frac{\operatorname{Sin} t}{t} \right\}$ โดยใช้สูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{f(t)\}\,ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\text{Sin } t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{\text{Sin } t\}\,ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds$$

$$= \tan^{-1}(s)\Big|_s^\infty$$

$$= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(s)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)$$

$$= \text{Cot}^{-1}(s) \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า (3) ลงใน (2) แล้วแทนต่อลงใน (1) จะได้

$$\int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t \frac{e^{-t}\,\text{Sin } u}{u}\,du\,dt = \left[\frac{1}{s}\text{Cot}^{-1}(s)\right]\Bigg|_{s=1}$$

$$= \text{Cot}^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

ช.ต.พ.

8. จงแสดงว่า

$$L\{t \text{ Cos } at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

พิสูจน์ จากสูตร

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

และ $L\{\text{Cos } at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} = F(s)$

ดังนั้น

$$L\{t \text{ Cos } at\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)$$

$$= \quad (-1)\left\{ \frac{(s^2 + a^2) - s(2s)}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

$$= \quad \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$ ช.ต.พ.

9. จงแสดงว่า

$$L\{t \text{ Sin } at\} \quad = \quad \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

พิสูจน์ จากสูตร

$$L\{t^n f(t)\} \quad = \quad (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

และ $L\{\text{Sin } at\} \quad = \quad \frac{a}{s^2 + a^2} \quad = \quad F(s)$

ดังนั้น

$$L\{t \text{ Sin } at\} \quad = \quad (-1) \frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)$$

$$= \quad (-1)\left\{ \frac{-a(2s)}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

$$= \quad \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$ ช.ต.พ.

10. จงแสดงว่า

$$L\{t^2 \text{ Sin } t\} \quad = \quad \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$$

พิสูจน์ ใช้ผลจากข้อ 9 แทนค่า $a = 1$ จะได้

$$L\{t \text{ Sin } t\} \quad = \quad \frac{2(1)s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$= \quad \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

เพราะว่า

$$L\{t^2 \operatorname{Sin} t\} = L\{t \cdot t \operatorname{Sin} t\}$$

ใช้สูตร

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

จะได้ $$L\{t^2 \operatorname{Sin} t\} = (-1) \frac{d}{ds} L\{t \operatorname{Sin} t\}$$

$$= (-1) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{2s}{(s^2+1)^2} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{(s^2+1)^2(2) - (2s)\,2(s^2+1)(2s)}{(s^2+1)^4} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{2s^4 + 4s^2 + 2 - 8s^4 - 8s^2}{(s^2+1)^4} \right\}$$

$$= \frac{6s^4 + 4s^2 - 2}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{(6s^2 - 2)(s^2+1)}{(s^2+1)^4}$$

$$= \frac{6s^2 - 2}{(s^2+1)^3}$$ **ซ.ต.พ.**

11. จงหาค่าของ $L\{t(3 \sin 2t - 2 \operatorname{Cos} 2t)\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L\{t(3 \operatorname{Sin} 2t - 2 \operatorname{Cos} 2t)\} = 3L\{t \operatorname{Sin} 2t\} - 2L\{t \operatorname{Cos} 2t\}$$

ใช้ผลจากข้อ 8 และข้อ 9 เมื่อแทนค่า $a = 2$ จะได้

$$L\{t \operatorname{Cos} 2t\} = \frac{s^2 - (2)^2}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2 - 4}{(s^2+4)^2}$$

และ $$L\{t \operatorname{Sin} 2t\} = \frac{2(2)s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

ดังนั้น

$$L\{t(3 \operatorname{Sin} 2t - 2 \operatorname{Cos} 2t)\} = 3\frac{4s}{(s^2+4)^2} - 2\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$= \frac{12s - 2s^2 + 8}{(s^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$$ **ตอบ**

12. จงหาค่าของ $L\{t^2 \text{Cos } t\}$

วิธีทำ ใช้ผลจากข้อ 8 แทนค่า $a = 1$ จะได้

$$L\{t \text{ Cos } t\} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

เพราะว่า $L\{t^2 \text{Cos } t\} = L\{t \cdot t \text{ Cos } t\}$

ใช้สูตร

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}$$

ดังนั้น

$$L\{t^2 \text{ Cos } t\} = (-1) \frac{d}{ds} L\{t \text{ Cos } t\}$$

$$= (-1) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{(s^2 + 1)^2 (2s) - (s^2 - 1) 2(s^2 + 1)(2s)}{(s^2 + 1)^4} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{2s^5 + 4s^3 + 2s - 4s^5 + 4s}{(s^2 + 1)^4} \right\}$$

$$= \frac{2s^5 - 4s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(2s^3 - 6s)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}$$ **ตอบ**

13. จงหาค่าของ $L\{t^3 \cos t\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L\{t^3 \cos t\} = L\{t \cdot t^2 \cos t\}$$

ใช้ผลจากข้อ 12

$$L\{t^2 \cos t\} = \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}$$

และสูตร

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}$$

ดังนั้น

$$L\{t^3 \cos t\} = (-1) \frac{d}{ds} L\{t^2 \cos t\}$$

$$= (-1) \frac{d}{ds} \left\{ \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{(s^2 + 1)^3 (6s^2 - 6) - (2s^3 - 6s)\, 3(s^2 + 1)^2 (2s)}{(s^2 + 1)^6} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{6s^8 + 12s^6 - 12s^2 - 6 - 12s^8 + 12s^6 + 60s^4 + 36s^2}{(s^2 + 1)^6} \right\}$$

$$= (-1) \left\{ \frac{-6s^8 + 24s^6 + 60s^4 + 24s^2 - 6}{(s^2 + 1)^6} \right\}$$

$$= \frac{6s^8 - 24s^6 - 60s^4 - 24s^2 + 6}{(s^2 + 1)^6}$$

$$= \frac{6s^6 (s^2 + 1) - 30s^4 (s^2 + 1) - 30s^2 (s^2 + 1) + 6(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^6}$$

$$= \frac{(6s^6 - 30s^4 - 30s^2 + 6)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^6}$$

$$= \frac{6s^4 (s^2 + 1) - 36s^2 (s^2 + 1) + 6(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^5}$$

$$= \frac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2 + 1)^4}$$ **ตอบ**

14. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty t\, e^{-3t} \text{Sin } t\, dt = \frac{3}{50}$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\int_0^\infty t\, e^{-3t} \text{Sin } t\, dt = \int_0^\infty \{ t \text{ Sin } t \} e^{-3t}\, dt$$

$$= L\{ t \text{ Sin } t \} \Big|_{s=3}$$

จากแบบฝึกหัด ข้อ 9 เมื่อแทนค่า $a = 1$ จะได้

$$L\{\{ t \text{ Sin } t \} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty t\, e^{-3t} \text{Sin } t\, dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=3}$$

$$= \frac{2(3)}{(3^2+1)^2}$$

$$= \frac{6}{100}$$

$$= \frac{3}{50}$$ ช.ต.พ.

15. จงหาค่าของ $L\left\{ \frac{e^{2t}-1}{t} \right\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{ \frac{e^{2t}-1}{t} \right\} = \int_s^\infty L\{ e^{2t} - 1 \}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \left\{ \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} \right\} ds$$

$$= \{\ln(s-2) - \ln(s)\} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln\left(\frac{s-2}{s}\right) \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln\left(1-\frac{2}{s}\right) \Big|_s^\infty$$

$$= \ln(1) - \ln\left(1-\frac{2}{s}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{s-2}{s}\right) \qquad ;\ \ln(1) = 0$$

$$= \ln\left(\frac{s}{s-2}\right)$$ **ตอบ**

16. จงหาค่าของ $L\left\{\frac{e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t}{t}\right\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{e^{-at} f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s\to s+a}$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t}{t}\right\} = L\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,2t}{t}\right\}\Big|_{s\to s+3} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,2t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{\mathrm{Sin}\,2t\}\,ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4}\,ds$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \Big|_s^\infty$$

$$= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$= \mathrm{Cot}^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L\left\{\frac{e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\,2t}{t}\right\} = \mathrm{Cot}^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\Big|_{s\to s+3}$$

$$= \mathrm{Cot}^{-1}\left(\frac{s+3}{2}\right)$$

ตอบ

17. จงหาค่าของ $L\left\{\frac{\mathrm{Sin\,h}\,t}{t}\right\}$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

และ $L\{\mathrm{Sin\,h}\,t\} = \frac{1}{s^2-1} = F(s)$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\mathrm{Sin\,h}\,t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{s^2-1}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right\} ds$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln(s-1) - \ln(s+1)\right\}\Big|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\Big|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{s\left(1 - \frac{1}{s}\right)}{s\left(1 + \frac{1}{s}\right)} \Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)} \Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln (1) - \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 - \frac{1}{s}\right)}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{s}\right)}{\left(1 - \frac{1}{s}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s + 1}{s - 1}\right)$$

ตอบ

18. จงแสดงว่า

$$L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s + b}{s + a}\right)$$

พิสูจน์ จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\left\{e^{-at} - e^{-bt}\right\} ds$$

$$= \int_s^{\infty} \left\{\frac{1}{s + a} - \frac{1}{s + b}\right\} ds$$

$$= \left\{\ln (s + a) - \ln (s + b)\right\} \Big|_s^{\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \ln \frac{\left(1+\frac{a}{s}\right)}{\left(1+\frac{b}{s}\right)}\Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \ln(1) - \ln \frac{\left(1+\frac{a}{s}\right)}{\left(1+\frac{b}{s}\right)}$$

$$= \ln \frac{\left(1+\frac{b}{s}\right)}{\left(1+\frac{a}{s}\right)}$$

$$= \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$$ ช.ต.พ.

19. จงแสดงว่า

$$L\left\{\frac{\text{Cos } at - \text{Cos } bt}{t}\right\} \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$L\left\{\frac{\text{Cos } at - \cos bt}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\cdot\{\text{Cos } at - \text{Cos } bt\}\, ds$$

$$= \int_s^{\infty}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right\} ds$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2) - \frac{1}{2}\ln(s^2+b^2)\right\}\Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)}{\left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)}\Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)}{\left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$ ซ.ต.พ.

20. ใช้ผลจากข้อ 18 แสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \ln 2$$

พิสูจน์ จากข้อ 18 ถ้าแทนค่า $a = 3$ และ $b = 6$ จะได้

$$L\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\} = \ln\frac{(s+6)}{(s+3)}$$

แต่ $$\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = L\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\}\Bigg|_{s=0}$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \ln\frac{(0+6)}{(0+3)} = \ln 2$$ ซ.ต.พ.

21. จงหาค่าของ $\int_s^\infty \frac{\text{Cos } 6t - \text{Cos } 4t}{t}\,dt$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos } 6t - \text{Cos } 4t}{t}\,dt = L\left\{\frac{\text{Cos } 6t - \text{Cos } 4t}{t}\right\}\Bigg|_{s=0}$$

จากข้อ 19 $L\left\{\frac{\text{Cos } at - \text{Cos } bt}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$ ถ้าแทนค่า $a = 6$ และ $b = 4$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos } 6t - \text{Cos } 4t}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{0 + 16}{0 + 36} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \ln \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}$$

$$= \ln \frac{2}{3}$$

ตอบ

22. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin}^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin}^2 t}{t^2}\, dt = L\left\{ \frac{\text{Sin}^2 t}{t^2} \right\}\Big|_{s=0} \qquad \text{..........(1)}$$

และ $\text{Sin}^2 t = \dfrac{1 - \text{Cos } 2t}{2}$

ดังนั้น

$$L\left\{ \frac{\text{Sin}^2 t}{t^2} \right\} = L\left\{ \frac{1 - \text{Cos } 2t}{2t^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\left\{ \frac{\frac{1 - \text{Cos } 2t}{t}}{t} \right\} \qquad \text{..........(2)}$$

จากสูตร

$$L\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{ \frac{1 - \text{Cos } 2t}{t^2} \right\} = \int_s^\infty L\left\{ \frac{1 - \text{Cos } 2t}{t} \right\} ds \qquad \text{..........(3)}$$

พิจารณา

$$L\left\{\frac{1-\text{Cos}\,2t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{1-\text{Cos}\,2t\}\,ds$$

$$= \int_s^\infty \left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right\} ds$$

$$= \ln \frac{s}{(s^2+4)^{1/2}} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{1}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln(1) - \ln \frac{1}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}$$

$$= \ln \frac{(s^2+4)^{1/2}}{s}$$

$$= \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) \qquad \text{..........(4)}$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{1-\text{Cos}\,2t}{t^2}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) ds$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $\quad u = \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$

$$du = \frac{s^2}{s^2+4}\left\{\frac{s^2(2s) - (s^2+4)(2s)}{s^4}\right\} ds$$

$$= \frac{-8ds}{s(s^2+4)}$$

$$dv = ds$$

$$v = s$$

แทนค่าจะได้

$$\frac{1}{2}\int_s^\infty \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) ds = \frac{1}{2}\left[s\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) \Big|_s^\infty + \int_s^\infty \frac{8s\,ds}{s(s^2+4)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[s\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)\Big|_s^\infty + 8\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \Big|_s^\infty\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-s\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right) + 4\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= -\frac{s}{2}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) + \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \qquad \text{..........(5)}$$

แทนค่า (5) ลงใน (2) จะได้

$$L\left\{\frac{\text{Sin}^2 t}{t^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{s}{2}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) + \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{s}{4}\ln\left(\frac{s^2}{s^2+4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$$

แทนค่า $s = 0$ จะได้

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = L\left\{\frac{\text{Sin}^2 t}{t^2}\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{(0)}{4}\ln\left(\frac{0}{0+4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

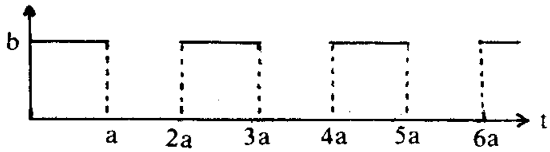
ช.ต.พ.

ข้อสังเกต

$s \ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$ จะเข้าสู่ 0 เมื่อ $s \to \infty$ เพราะว่าพจน์ $\frac{4}{s^2}$ จะเข้าสู่ 0 ได้เร็วมาก เมื่อ s มีค่ามาก ๆ ทำให้ฟังก์ชัน $\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$ เข้าสู่ 0 ก่อนที่ s เข้าสู่ ∞

เฉลยแบบฝึกหัด 2.3

1. จงเขียนฟังก์ชัน f(t) ให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยตามรูป พร้อมทั้งหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเหล่านี้ด้วย



วิธีทำ

$$f(t) = bu(t) - bu(t-a) + bu(t-2a) - bu(t-3a) + \ldots$$

จากสูตร

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

และ $$L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad ; s > 0$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = bL\{u(t)\} - bL\{u(t-a)\} + bL\{u(t-2a)\} - bL\{u(t-3a)\} + \ldots$$

$$= \frac{b}{s} - \frac{be^{-as}}{s} + \frac{be^{-2as}}{s} - \frac{be^{-3as}}{s} + \ldots$$

$$= \frac{b}{s}(1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \ldots) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ใช้สูตรการหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์ (S)

$$S = \frac{a}{1-r} \quad ; \quad r < 1$$

เมื่อ $r = -e^{-as} < 1$

$a = 1$

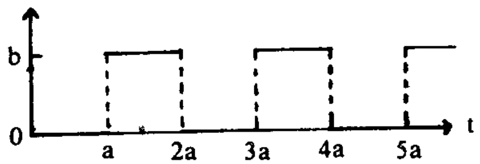
ดังนั้น

$$1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \ldots = \frac{1}{1-(-e^{-as})} = \frac{1}{1+e^{-as}} \quad \ldots\ldots(2)$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{b}{s(1+e^{-as})}$$ **ตอบ**

2. จงเขียนฟังก์ชัน f(t) ให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยตามรูป พร้อมทั้งหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเหล่านี้ด้วย



วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(t) &= bu(t-a) - bu(t-2a) + bu(t-3a) - bu(t-4a) \\ &\quad + bu(t-5a) - bu(t-6a) + \ldots \\ &= b\{u(t-a) - u(t-2a) + u(t-3a) - u(t-4a) + u(t-5a) - \ldots\} \end{aligned}$$

เพราะว่า

$$L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad ; \quad s > 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= b\left[L\{u(t-a)\} - L\{u(t-2a)\} + L\{u(t-3a)\}\right. \\ &\quad - L\{u(t-4a) + L\{u(t-5a) - L\{u(t-6a)\} + \\ &= b\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s} - \frac{e^{-4as}}{s} + \frac{e^{-5as}}{s} - \ldots\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{s}\left[e^{-as}(1 - e^{-as}) + e^{-3as}(1 - e^{-as}) + e^{-5as}(1 - e^{-as}) + \dots \right]$$

$$= \frac{b}{s}(1 - e^{-as})(e^{-as} + e^{-3as} + e^{-5as} + \dots)$$

$$= \frac{be^{-as}(1 - e^{-as})}{s}(1 + e^{-2as} + e^{-4as} + \dots)$$

พิจารณาหาค่า $(1 + e^{-2as} + e^{-4as} + \dots)$ โดยใช้สูตรการหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์ เมื่อ $a = 1$ และ $r = e^{-2as}$

ดังนั้น

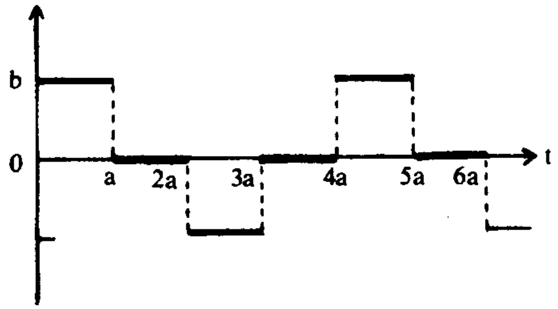
$$1 + e^{-2as} + e^{-4as} + \dots = \frac{1}{1 - (e^{-2as})}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2as}}$$

แทนในสูตรการแปลงลาปลาซ จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{be^{-as}(1 - e^{-as})}{(1 - e^{-2as})} = \frac{be^{-as}}{1+e^{-as}}$$ **ตอบ**

3. จงเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยตามรูป พร้อมทั้งหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนี้



วิธีทำ

$$f(t) = b\{u(t) - u(t - a) - u(t - 2a) + u(t - 3a) + u(t - 4a) - \dots\}$$

เพราะว่า

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

และ $$L\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad ; s > 0$$

ดังนั้น

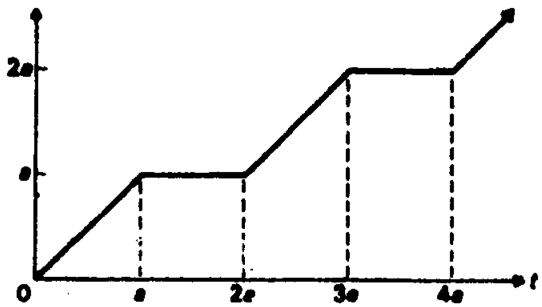
$$
\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= b\left[L\{u(t)\} - L\{u(t-a)\} - L\{u(t-2a)\} + L\{u(t-3a)\} + L\{u(t-4a)\} - \dots\right] \\
&= b\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s} + \frac{e^{-4as}}{s} \dots\dots\right] \\
&= \frac{b}{s}\left[(1-e^{-as}) - e^{-2as}(1-e^{-as}) + e^{-4as}(1-e^{-as}) \dots\dots\right] \\
&= \frac{b(1-e^{-as})}{s}\,(1 - e^{-2as} + e^{-4as} \dots)
\end{aligned}
$$

จากแบบฝึกหัดข้อ 2 $\quad 1 - e^{-2as} + e^{-4as} - \dots = \dfrac{1}{1+e^{-2as}}$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{b(1-e^{-as})}{s(1+e^{-2as})} \qquad \textbf{ตอบ}$$

4. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดให้ตามรูป



วิธีทำ จากรูป

$$
f(t) = \begin{cases} t & ; \ 0 < t < a \\ a & ; \ a < t < 2a \\ t - a & ; \ 2a < t < 3a \\ 2a & ; \ 3a < t < 4a \end{cases}
$$

จากสูตร $\quad L\{f(t)\} = \dfrac{\int_0^a f(t)\,e^{-st}\,dt}{1 - e^{-as}}$

คาบของฟังก์ชัน $f(t) = 4a$ ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^{4a} f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-4as}}$$

พิจารณาอินทิกรัล

$$\int_0^{4a} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^a te^{-st}\,dt + \int_a^{2a} ae^{-st}\,dt + \int_{2a}^{3a}(t-a)e^{-st}\,dt + \int_{3a}^{4a} 2a\,e^{-st}\,dt \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา

$$\int_0^a te^{-st}\,dt = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} + \frac{1}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \qquad \text{..........(3)}$$

พิจารณา

$$\int_{2a}^{3a}(t-a)e^{-st}\,dt = \int_{2a}^{3a} te^{-st}\,dt - a\int_{2a}^{3a} e^{-st}\,dt$$

$$= t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{2a}^{3a} + \frac{1}{s}\int_{2a}^{3a} e^{-st}\,dt + a\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{2a}^{3a}$$

$$= -\frac{3ae^{-3as}}{s} + \frac{2ae^{-2as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{2a}^{3a} + \frac{ae^{-3as}}{s} - \frac{ae^{-2as}}{s}$$

$$= -\frac{2ae^{-3as}}{s} + \frac{ae^{-2as}}{s} - \frac{e^{-3as}}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} \qquad \text{..........(4)}$$

พิจารณา

$$\int_a^{2a} a\,e^{-st}\,dt = -\frac{ae^{-st}}{s}\Big|_a^{2a}$$

$$= -\frac{ae^{-2as}}{s} + \frac{ae^{-as}}{s} \qquad \text{..........(5)}$$

$$= \quad -3a\,\frac{e^{-3as}}{s} + 3a\,\frac{e^{-2as}}{s} \qquad \ldots\ldots\ldots.(6)$$

และ $$\int_{3a}^{4a} 2a\,e^{-st}\,dt = -2a\,\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{3a}^{4a}$$

$$= -\frac{2ae^{-4as}}{s} + \frac{2ae^{-3as}}{s}$$

แทนค่า (3), (4), (5) และ (6) ลงใน (2) จะได้

$$\int_{0}^{4a} f(t)\,e^{-st}\,dt = -a\,\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} - a\frac{e^{-2as}}{s} + a\frac{e^{-as}}{s}$$

$$- 2a\,\frac{e^{-3as}}{s} + a\frac{e^{-2as}}{s} - \frac{e^{-3as}}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} - \frac{2ae^{-4as}}{s}$$

$$+ 2a\,\frac{e^{-3as}}{s}$$

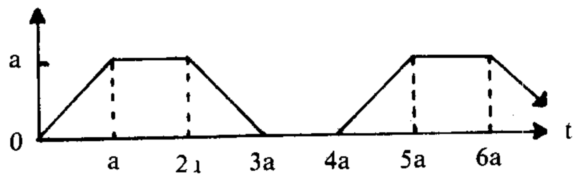
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} - \frac{e^{-3as}}{s^2} - \frac{2ae^{-4as}}{s}$$

$$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-as})(1 + e^{-2as}) - 2a\,\frac{e^{-4as}}{s}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{(1 - e^{-as})(1 + e^{-2as}) - 2as\,e^{-4as}}{1 - 4as}$$ **ตอบ**

5. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) ซึ่งแสดงตามรูป



วิธีทำ คาบของ f(t) คือ 4a ตามรูป

และ $$f(t) = \begin{cases} t & ; \quad 0 < t < a \\ a & ; \quad a < t < 2a \\ -t + 3a & ; \quad 2a < t < 3a \\ 0 & ; \quad 3a < t < 4a \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^{4a} f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-4as}} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{4a} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^a t\, e^{-st}\, dt + a\int_a^{2a} e^{-st}\, dt + \int_{2a}^{3a} (-t + 3a)\, e^{-st}\, dt + \int_{3a}^{4a} (0)\, e^{-st}\, dt \text{..........(2)}$$

เพราะว่า

$$\int_0^a t\, e^{-st}\, dt = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \qquad \text{..........(3)}$$

$$a\int_a^{2a} e^{-st}\, dt = -\frac{ae^{-st}}{s}\Big|_a^{2a}$$

$$= -\frac{ae^{-2as}}{s} + \frac{ae^{-as}}{s} \qquad \text{..........(4)}$$

$$\int_{2a}^{3a} t\, e^{-st}\, dt = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{2a}^{3a} + \int_{2a}^{3a} \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= -\frac{3ae^{-3as}}{s} + \frac{2ae^{-2as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{2a}^{3a}$$

$$= -\frac{3ae^{-3as}}{s} + \frac{2ae^{-2as}}{s} - \frac{e^{-3as}}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} \qquad \text{..........(5)}$$

$$3a\int_{2a}^{3a} e^{-st}\,dt = -3a\,\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{2a}^{3a}$$

$$= -3a\,\frac{e^{-3as}}{s} + 3a\,\frac{e^{-2as}}{s} \qquad \text{..........(6)}$$

แทนค่า (3), (4), (5) และ (6) ลงใน (2) จะได้

$$\int_0^{4a} f(t)\,e^{-st}\,dt = -a\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{1}{s^2} - a\frac{e^{-2as}}{s^2} + a\frac{e^{-as}}{s}$$

$$+3a\,\frac{e^{-3as}}{s} - 2a\,\frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s^2} - \frac{e^{-4as}}{s^2} - 3a\,\frac{e^{-3as}}{s}$$

$$+ 3a\frac{e^{-2as}}{s}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{e^{-2as}}{s^2} + \frac{e^{-3as}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\left\{(1 - e^{-as}) - e^{-2as}(1 - e^{-as})\right\}$$

$$= \frac{(1 - e^{-as})(1 - e^{-2as})}{s^2} \qquad \text{..........(7)}$$

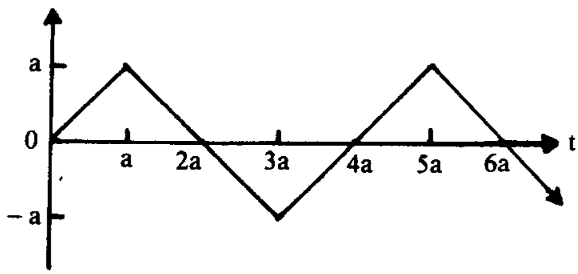
แทนค่า (7) ลงใน (1) จะได้

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{(1 - e^{-as})(1 - e^{-2as})}{s^2(1 - e^{-4as})}$$

$$= \frac{(1 - e^{-as})(1 - e^{-2as})}{s^2(1 - e^{-2as})(1 + e^{-2as})}$$

$$= \frac{(1 - e^{-as})}{s^2(1 + e^{-2as})} \qquad \text{ตอบ}$$

6. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) ซึ่งกำหนดให้ตามรูป



วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ 4a หาสมการเส้นตรง f(t) ในช่วงย่อย $0 < t < a$, $a < t < 3a$, $3a < t < 4a$

จะได้

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < a \\ -t + 2a & a < t < 3a \\ t - 4a & 3a < t < 4a \end{cases}$$

จากสูตร

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}} \quad ; \text{a คือคาบของ } f(t)$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^{4a} f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-4as}} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{4a} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^a t\, e^{-st}\, dt + \int_a^{3a} (-t + 2a)\, e^{-st}\, dt + \int_{3a}^{4a} (t - 4a)\, e^{-st}\, dt \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะว่า

$$\int_0^a t\,e^{-st}\,dt = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= -a\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \qquad \text{..........(3)}$$

$$\int_a^{3a} (-t)\,e^{-st}\,dt = (-t)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_a^{3a} - \int_a^{3a} \frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= 3a\frac{e^{-3s}}{s} - a\frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_a^{3a}$$

$$= 3a\frac{e^{-3as}}{s} - a\frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} \qquad \text{..........(4)}$$

$$\int_a^{3a} 2a\,e^{-st}\,dt = -2a\frac{e^{-st}}{s}\Big|_a^{3a} = -2a\frac{e^{-3as}}{s} + 2a\frac{e^{-as}}{s} \qquad \text{..........(5)}$$

$$\int_{3a}^{4a} t\,e^{-st}\,dt = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{3a}^{4a} + \int_{3a}^{4a} \frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= -4a\frac{e^{-4as}}{s} + 3a\frac{e^{-3as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{3a}^{4a}$$

$$= -4a\frac{e^{-3as}}{s} + 3a\frac{e^{-3as}}{s} - \frac{e^{-4as}}{s^2} + \frac{e^{-3as}}{s^2} \qquad \text{..........(6)}$$

$$\int_{3a}^{4a} (-4a)\,e^{-st}\,dt = 4a\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{3a}^{4a}$$

$$= 4a\frac{e^{-4as}}{s} - 4a\frac{e^{-3as}}{s} \qquad \text{..........(7)}$$

แทนค่า (3), (4), (5), (6) และ (7) ลงใน (2) จะได้

$$\int_0^{4a} f(t)\,e^{-st}\,dt = -a\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + 3a\frac{e^{-3as}}{s} - a\frac{e^{-as}}{s}$$

$$+ \frac{e^{-3as}}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} - 2a\frac{e^{-3as}}{s} + 2a\frac{e^{-as}}{s} - 4a\frac{e^{-3as}}{s}$$

$$+ 3a\frac{e^{-3as}}{s} - \frac{e^{-4as}}{s^2} + \frac{e^{-3as}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-as}}{s^2} + 2\frac{e^{-3as}}{s^2} - \frac{e^{-4as}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4as}}{s^2} - 2\frac{e^{-as}}{s^2} + 2\frac{e^{-3as}}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-4as}) - \frac{2e^{-as}}{s^2}(1 - e^{-2as})$$

$$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2as})\{(1 + e^{-2as}) - 2e^{-as}\}$$

$$= \frac{(1 - e^{-2as})(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})}{s^2}$$

$$= \frac{(1 - e^{-2as})(1 - e^{-as})^2}{s^2} \qquad \text{..........(8)}$$

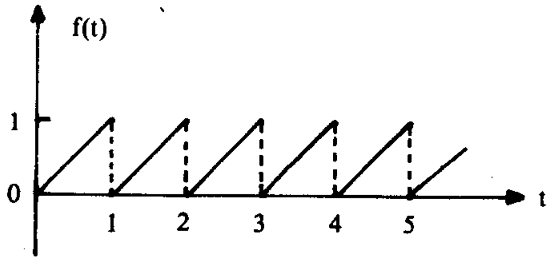
แทนค่า (8) ลงใน (1) จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{(1 - e^{-2as})(1 - e^{-as})^2}{s^2(1 - e^{-4as})}$$

$$= \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2(1 + e^{-2as})}$$

ตอบ

7. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) ซึ่งแสดงตามรูป



วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t)คือ 1

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^1 f(t)\,e^{-st}\,dt}{1 - e^{-s}} \qquad \text{..........(1)}$$

$$= \quad -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^1$$

$$= \quad -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L\{f(t)\} \quad = \quad \frac{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}}{(1 - e^{-s})}$$

$$= \quad \frac{\frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}) - \frac{e^{-s}}{s}}{(1 - e^{-s})}$$

$$L\{f(t)\} \quad = \quad \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$$ **ตอบ**

8. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบ

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 3t & 0 < t < 2 \\ 6 & 2 < t < 4 \end{cases}$$

วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ 4 แทนค่าในสูตร

$$L\{f(t)\} \quad = \quad \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}}$$; a คือคาบของฟังก์ชัน f(t)

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} \quad = \quad \frac{\int_0^4 f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-4s}} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^4 f(t)\, e^{-st}\, dt \quad = \quad \int_0^2 (3t)\, e^{-st}\, dt + 6\int_2^4 e^{-st}\, dt$$

$$= \quad 3\left\{ t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-st}}{s}\, dt \right\} - 6\frac{e^{-st}}{s}\Big|_2^4$$

พิจารณา

$$\int_0^1 f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 t\, e^{-st}\, dt$$

$$= t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= 3\left\{-2\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^2\right\} - 6\frac{e^{-4s}}{s} + 6\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$= -6\frac{e^{-2s}}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{3}{s^2} - 6\frac{e^{-4s}}{s} + 6\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$= \frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2} \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}$$ **ตอบ**

9. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบ

$$f(t) = t^2 \qquad 0 < t < 2$$

วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ 2 แทนในสูตร

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}} \quad ; a \text{ คือคาบของ } f(t)$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-2s}} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^2 t^2 e^{-st}\, dt$$

$$= t^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^2 + 2\int_0^2 t\,\frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= -4\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{2}{s}\left\{t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-st}}{s}\, dt\right\}$$