$$= -4\frac{e^{-2s}}{s} - 4\frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-st}}{s^3}\Big|_0^2$$

$$= -4\frac{e^{-2s}}{s} - 4\frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s^3} + \frac{2}{s^3}$$

$$= \frac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3}$$

แทนค่า ลงใน (1).

$$L\{f(t)\} = \frac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3(1 - e^{-2s})}$$ **ตอบ**

10. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบ

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ 2 แทนในสูตร

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}} \quad ; a \text{ คือคาบของ } f(t)$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-2s}} \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 t\, e^{-st}\, dt + \int_1^2 (0)\, e^{-st}\, dt$$

$$= t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}$$

แทนค่า ลงใน (1)

$$L\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$$

$$= \frac{1 - e^{-s}(1 + s)}{s^2(1 - e^{-2s})}$$ **ตอบ**

11. จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสาน

$$f(t) = \int_0^t (t - u)^3 \operatorname{Sin} u \, du$$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} = L\left\{\int_0^t f(t - x)\, g(x)\, dx\right\}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t (t - u)^3 \operatorname{Sin} x \, du\right\}$$

$$= L\{t^3\} \cdot L\{\operatorname{Sin} t\}$$

$$= \frac{3!}{s^4} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{6}{s^4(s^2 + 1)}$$ **ตอบ**

12. จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสาน

$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \operatorname{Cos} 2u \, du$$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 11 จะได้

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t e^{-(t-u)} \operatorname{Cos} 2u \, du\right\}$$

$$= L\{e^{-t}\}\, L\{\operatorname{Cos} 2t\}$$

$$= \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)}$$ **ตอบ**

13. จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสาน

$$f(t) = \int_0^t (t-u)^3 u^5 \, du$$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 11 จะได้

$$\begin{aligned} L\{f(t) &= L\{\int_0^t (t-u)^3 u^5 \, du\} \\ &= L\{t^3\} \cdot L\{t^5\} \\ &= \frac{3!}{s^4} \quad \frac{5!}{s^6} \\ &= \frac{720}{s^{10}} \end{aligned}$$

ตอบ

14. จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสาน

$$f(t) = \int_0^t \text{Sin h } 4(t-u) \text{ Cos h } 5u \, du$$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 11 จะได้

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\int_0^t \text{Sin h } 4(t-u) \text{ Cos h } 5u \, du\} \\ &= L\{\text{Sin h } 4t\} \cdot L\{\text{Cos h } 5t\} \\ &= \frac{4}{s^2-16} \cdot \frac{s}{s^2-25} \\ &= \frac{4s}{(s^2-16)(s^2-25)} \end{aligned}$$

ตอบ

15. จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสาน

$$f(t) = \int_0^t e^{17(t-u)} u^{19} \, du$$

วิธีทำ ใช้สูตรเหมือนข้อ 11 จะได้

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\int_0^t e^{17(t-u)} u^{19} \, du\} \\ &= L\{e^{17t}\} \cdot L\{t^{19}\} \\ &= \frac{1}{s-17} \cdot \frac{19!}{s^{20}} \\ &= \frac{19!}{s^{20}(s-17)} \end{aligned}$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัดระคน

1. ถ้า $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$

จงแสดงว่า $L\{f(t)\} = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\pi \sin t\, e^{-st}\, dt + \int_\pi^\infty (0)\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sin t \quad ; \quad dv = e^{-st}\, dt$

$du = \cos t\, dt \quad ; \quad v = -\dfrac{e^{-st}}{s}$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \sin t \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{e^{-st}}{s} \cos t\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\pi \cos t\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนอินทิกรัล $\int_0^\pi \cos t\, e^{-st}\, dt$ **อีกครั้ง**

ให้ $u = \cos t \quad ; \quad dv = e^{-st}\, dt$

$du = -\sin t\, dt \quad ; \quad v = -\dfrac{e^{-st}}{s}$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left\{\cos t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt\right\}$$

หรือ $\int_0^\pi \sin t\, e^{-st}\, dt = \dfrac{1}{s}\left\{\dfrac{e^{-\pi s} + 1}{s} - \dfrac{1}{s}\int_0^\pi \sin t\, e^{-st}\, dt\right\}$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\int_0^{\pi} \operatorname{Sin} t\, e^{-st}\, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Sin} t\, e^{-st}\, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

นั่นคือ $L\{f(t)\} = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$ **ตอบ**

2. ถ้า $f(t) = \begin{cases} \operatorname{Cos} t & 0 < t < \pi \\ \operatorname{Sin} t & t > \pi \end{cases}$

จงหาค่าของ $L\{f(t)\}$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt + \int_{\pi}^{\infty} \operatorname{Sin} t\, e^{-st}\, dt \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา อินทิกรัล $\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt$ โดยวิธีอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt = \operatorname{Cos} t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) - \int_0^{\pi} \operatorname{Sin} t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= \frac{e^{-\pi s} + 1}{s} - \frac{1}{s}\int_0^{\pi} \operatorname{Sin} t\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{e^{-\pi s} + 1}{s} - \frac{1}{s}\left\{\operatorname{Sin} t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt\right\}$$

$$= \frac{e^{-\pi s} + 1}{s} - \frac{1}{s^2}\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s}$$

หรือ $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} t\, e^{-st}\, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 1}$

$$= \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{(s^2 + 1)} \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา อินทิกรัล $\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, e^{-st}\, dt$ โดยวิธีอินทิกรัลทีละส่วน

$$\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\; e^{-st}\, dt = \text{Sin } t \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{\pi}^{\infty} + \int_{\pi}^{\infty} \text{Cos } t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_{\pi}^{\infty} \text{Cos } t\; e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง จะได้

$$\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}\left\{\text{Cos } t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{\pi}^{\infty} - \int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, \frac{e^{-st}}{s}\, dt\right\}$$

$$= \frac{1}{s}\left\{-\frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{1}{s}\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, e^{-st}\, dt\right\}$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

หรือ $\int_{\pi}^{\infty} \text{Sin } t\, e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2+1}$

$$= \frac{-e^{-\pi s}}{(s^2+1)} \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า (2) และ (3) ลงใน (1) จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{s(1+e^{-\pi s})}{(s^2+1)} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$= \frac{s + se^{-\pi s} - e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$= \frac{s + e^{-\pi s}(s-1)}{s^2+1}$$

ตอบ

3. จงแสดงว่า $L\{\text{Sin}^3 t\} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\text{Sin}^3 t = \text{Sin } t\,(\text{Sin}^2 t)$$

$$= \operatorname{Sin} t \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} 2t}{2} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} t}{2} - \frac{\operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} 2t}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} t}{2} - \frac{2 \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} 2t}{4}$$

จากสูตรตรีโกณมิติ

$$2 \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B = \operatorname{Sin} (A + B) + \operatorname{Sin} (A - B)$$

ดังนั้น

$$2 \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} 2t = \operatorname{Sin} (1 + 2)t + \operatorname{Sin} (1 - 2)t$$

$$= \operatorname{Sin} 3t - \operatorname{Sin} t$$

เพราะฉะนั้น

$$L \{ \operatorname{Sin}^3 t \} = L \left\{ \frac{\operatorname{Sin} t}{2} - \frac{\operatorname{Sin} 3t}{4} + \frac{\operatorname{Sin} t}{4} \right\}$$

$$= L \left\{ \frac{3 \operatorname{Sin} t}{4} - \frac{\operatorname{Sin} 3t}{4} \right\}$$

$$= \frac{3}{4} L \{ \operatorname{Sin} t \} - \frac{1}{4} L \{ \operatorname{Sin} 3t \}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{4} \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$= \frac{3}{4} \left\{ \frac{s^2 + 9 - s^2 - 1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} \right\}$$

$$= \frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$ **ตอบ**

4. จงหาค่าของ $L \{ \operatorname{Sin} h^3 (2t) \}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\operatorname{Sin} h^3 (2t) = \operatorname{Sin} h (2t) \{ \operatorname{Sin} h^2 (2t) \}$$

และ $\quad \operatorname{Sin} h^2 (2t) = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \right)^2$

$$= \frac{e^{4t} - 2 + e^{-4t}}{4}$$

$$= \frac{e^{4t} + e^{-4t} - 2}{4}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} h\,(4t) - 1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$L\,\{\operatorname{Sin} h^3 (2t)\} = L \left\{ \operatorname{Sin} h(2t) \left(\frac{\operatorname{Cos} h\,(4t) - 1}{2} \right) \right\}$$

$$= L \left\{ \frac{\operatorname{Sin} h\,(2t) \operatorname{Cos} h\,(4t)}{2} - \frac{\operatorname{Sin} h\,(2t)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} L\,\{2 \operatorname{Sin} h\,(2t) \operatorname{Cos} h\,(4t)\} - \frac{1}{2} L\,\{\operatorname{Sin} h\,(2t)$$

จากสูตร

$$2 \operatorname{Sin} h\,(A) \operatorname{Cos} h\,(B) = \operatorname{Sin} h\,(A + B) + \operatorname{Sin} h\,(A - B)$$

ดังนั้น

$$2 \operatorname{Sin} h\,(2t) \operatorname{Cos} h\,(4t) = \operatorname{Sin} h\,(6t) - \operatorname{Sin} h\,(2t)$$

แทนค่าจะได้

$$L\,\{\operatorname{Sin} h^3 (2t)\} = \frac{1}{4} L\,\{\operatorname{Sin} h\,(6t) - \operatorname{Sin} h\,(2t)\} - \frac{1}{2} L\,\{\operatorname{Sin} h\,(2t)\}$$

$$= \frac{1}{4} L\,\{\operatorname{Sin} h\,(6t)\} - \frac{3}{4} L\,\{\operatorname{Sin} h\,(2t)\}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{6}{s^2 - 36} - \frac{3}{4} \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \frac{s^2 - 4 - s^2 + 36}{(s^2 - 36)(s^2 - 4)} \right\}$$

$$= \frac{48}{(s^2 - 36)(s^2 - 4)}$$ ตอบ

5. ถ้า $f(t) = \begin{cases} 5 \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & t > \frac{\pi}{4} \\ 0 & t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

จงหาค่าของ $L\{f(t)\}$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (0)\, e^{-st}\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^\infty 5 \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\, dt$$

$$= 5 \int_{\frac{\pi}{4}}^\infty \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\, dt \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$; $dv = e^{-st}\, dt$

$du = 3 \cos 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$; $v = -\frac{e^{-st}}{s}$

ดังนั้น

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^\infty \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\, dt = \sin 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ -\frac{e^{-st}}{s} \right\}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^\infty + 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^\infty \cos 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \frac{e^{-st}}{s}\, dt$$

$$= 0 + \frac{3}{s} \int_{\frac{\pi}{4}}^\infty \cos 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = \operatorname{Cos} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$; $dv = e^{-st}\,dt$

$du = -3 \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$; $v = -\frac{e^{-st}}{s}$

แทนค่าจะได้

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\,dt = \frac{3}{s}\left[\operatorname{Cos} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\left\{-\frac{e^{-st}}{s}\right\}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \right.$$

$$\left. - 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \frac{e^{-st}}{s}\,dt \right]$$

$$= \frac{3}{s}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s} - \frac{3}{s}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\,dt \right]$$

$$\left(1 + \frac{9}{s^2}\right)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\,dt = \frac{3e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2}$$

หรือ $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \operatorname{Sin} 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\,dt = \frac{3e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 9}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{3e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 9}$$ ตอบ

6. ถ้า $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$ จงหาค่าของ $L\{e^{-t} f(2t)\}$

วิธีทำ

$$L\{t\,f(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{f(t)\}$$

แต่โจทย์กำหนดให้

$$L\{t\,f(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

ดังนั้น

$$(-1)\frac{d}{ds}L\{f(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\frac{d}{ds}L\{f(t)\} = \frac{-1}{s(s^2+1)}$$

หรือ $$L\{f(t)\} = \int \frac{-1}{s(s^2+1)}\,ds$$

$$= \int\left\{-\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}\right\}ds$$

$$= -\ln s + \frac{1}{2}\ln(s^2+1)$$

$$L\{f(t)\} = \ln\frac{(s^2+1)^{1/2}}{s}$$

จากสูตร

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}L\{f(t)\}\Big|_{s\to\frac{s}{a}}$$

ดังนั้น

$$L\{f(2t)\} = \frac{1}{2}\ln\frac{(s^2+1)^{1/2}}{s}\Big|_{s\to\frac{s}{a}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\frac{s^2}{4}+1\right)^{1/2}}{\frac{s}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(s^2+4)^{1/2}}{s}$$

จากสูตร

$$L\{e^{-at} f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s\to s+a}$$

เพราะฉะนั้น

$$L\{e^{-t} f(2t)\} = L\{f(2t)\}\Big|_{s\to s+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(s^2+4)^{\frac{1}{2}}}{s}\Big|_{s\to s+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\{(s+1)^2+4\}^{\frac{1}{2}}}{s+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{s^2+2s+1+4}{(s+1)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left\{\frac{s^2+2s+5}{(s+1)^2}\right\}$$ **ตอบ**

7. จงหาค่าของ

(ก) $L\{\text{Sin h }(2t)\text{ Cos }2t\}$

(ข) $L\{\text{Cos h }(2t)\text{ Cos }2t\}$

วิธีทำ (ก) จากสูตร .

$$\text{Sin h }(2t) = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$$

ดังนั้น

$$L\{\text{Sin h }(2t)\text{ Cos }2t\} = L\left\{\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\ .\ \text{Cos }2t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{2t}\text{ Cos }2t\} - \frac{1}{2}L\{e^{-2t}\text{ Cos }2t\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-2)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-2)\{(s+2)^2+4\}-(s+2)\{(s-2)^2+4\}}{\{(s-2)^2+4\}\cdot\{(s+2)^2+4\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^3+2s^2-16-s^3+2s^2-16}{\{s^2+4s+8\}\{s^2-4s+8\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4s^2 - 32}{\{(s^2+8)+4s\}\{(s^2+8)-4s\}}\right]$$

$$= \frac{2s^2 - 16}{(s^2+8)^2 - 16s^2}$$

$$= \frac{2(s^2-8)}{s^4+64}$$ **ตอบ**

(ข) จากสูตร

$$\text{Cos h }(2t) = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$$

ดังนั้น

$$L\{\text{Cos h }(2t)\text{ Cos }2t\} = L\left\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cdot \text{Cos }2t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{2t}\text{ Cos }2t\} + \frac{1}{2}L\{e^{-2t}\text{ Cos }2t\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s-2)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-2)\{(s+2)^2+4\} + (s+2)\{(s-2)^2+4\}}{\{(s-2)^2+4\}\cdot\{(s+2)^2+4\}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^3+2s^2-16+s^3-2s^2+16}{s^4+64}\right]$$

$$= \frac{s^3}{s^4+64}$$ **ตอบ**

8. **จงแสดงว่า** $L\{e^{\alpha t} f(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}F\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right)$ เมื่อ α และ β เป็นค่าคงที่ และ

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

วิธีทำ จากสูตร

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

ดังนั้น

$$L\{f(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}F\left(\frac{s}{\beta}\right)$$

จากสูตร

$$L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s \to s-a}$$

ดังนั้น

$$L\{e^{\alpha t} f(\beta t)\} = L\{f(\beta t)\}\Big|_{s \to s-\alpha}$$

$$= \frac{1}{\beta} F\left(\frac{s}{\beta}\right)\Big|_{s \to s-\alpha}$$

$$= \frac{1}{\beta} F\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right)$$ ซ.ต.พ.

9. (ก) จงแสดงว่า

$$L\left\{\frac{\text{Sin}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

(ข) จงหาค่าของ

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin}^2 t}{t} e^{-t}\, dt$$

วิธีทำ (ก) เพราะว่า $\text{Sin}^2 t = \dfrac{1 - \text{Cos } 2t}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$L\left\{\frac{\text{Sin}^2 t}{t}\right\} = L\left\{\frac{1 - \text{Cos } 2t}{2t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\left\{\frac{1 - \text{Cos } 2t}{t}\right\} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{f(t)\}\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{1 - \text{Cos } 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty L\{1 - \text{Cos } 2t\}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right\} ds$$

$$= \left[\ln s - \frac{1}{2} \ln (s^2+4) \right]_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s}{(s^2+4)^{1/2}} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{1}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}} \Big|_s^\infty$$

$$= \ln 1 - \ln \frac{1}{\left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \ln \left(1+\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

แทนค่าลงใน (1) จะได้

$$L\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

ซ.ต.พ.

(ข)

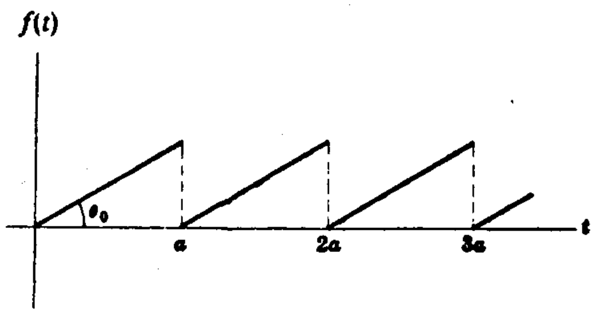
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^2 t}{t} e^{-t}\, dt = L\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2 t}{t}\right\}\Big|_{s=1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)\Big|_{s=1}$$

$$= \frac{1}{4} \ln (5)$$

ตอบ

10. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีคาบ f(t) ซึ่งแสดงตามรูป



วิธีทำ คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ a จากสูตร

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a t \tan\theta_0\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-as}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_0^a t \tan\theta_0\, e^{-st}\, dt &= \tan\theta_0 \int_0^a t\, e^{-st}\, dt \\
&= \tan\theta_0 \left\{ t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{e^{-st}}{s}\, dt \right\} \\
&= \tan\theta_0 \left\{ -a\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a \right\} \\
&= \tan\theta_0 \left\{ -a\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right\} \\
&= \frac{\tan\theta_0\,(1 - e^{-as} - ase^{-as})}{s^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-as} - ase^{-as}}{s^2(1 - e^{-as})} \tan\theta_0$$ **ตอบ**

11. (ก) จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - \text{Cos } t}{t^2}\right) e^{-st}\, dt \quad = \quad \frac{\pi}{2} + s \ln\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) - 2 \tan^{-1}(s)$$

(ข) $\int_0^\infty \left(\frac{1 - \text{Cos } t}{t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ (ก)

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - \text{Cos } t}{t^2}\right) e^{-st}\, dt \quad = \quad L\left\{\frac{1 - \text{Cos } t}{t^2}\right\} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \quad = \quad \int_s^\infty F(s)\, ds$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{1 - \text{Cos } t}{t^2}\right\} &= \int_s^\infty L\left\{\frac{1 - \text{Cos } t}{t}\right\} ds \\
&= \int_s^\infty \left\{\int_s^\infty L\{1 - \text{Cos } t\}\, ds\right\} ds \\
&= \int_s^\infty \left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}\right) ds\right\} ds \\
&= \int_s^\infty \left\{\ln \frac{s}{(s^2 + 1)^{1/2}} \Big|_s^\infty\right\} ds \\
&= \int_s^\infty \left\{\ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{1/2}} \Big|_s^\infty\right\} ds \\
&= \int_s^\infty \left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{1/2}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2}\int_s^\infty \ln \frac{(s^2 + 1)}{s^2}\, ds
\end{aligned}$$

พิจารณา $\int_s^\infty \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2}\right) ds$ อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2}\right)$

$$du = \frac{s^2}{s^2 + 1}\left\{\frac{s^2(2s) - (s^2 + 1)(2s)}{s^4}\right\} ds$$

$$du = \frac{-2ds}{s(s^2+1)}$$

และ $dv = ds$

$$v = s$$

ดังนั้น

$$\int_s^{\infty} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)ds = s\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)\Big|_s^{\infty} + \int_s^{\infty}\frac{s\cdot 2ds}{s(s^2+1)}$$

แต่ $\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ จะเข้าสู่ศูนย์ได้เร็วกว่า

s เข้าสู่ค่าอนันต์ เมื่อแทนลิมิต $s \to \infty$

เพราะฉะนั้น

$$\int_s^{\infty} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)ds = -s\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) + 2\tan^{-1}(s)\Big|_s^{\infty}$$

$$= s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + 2\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)\right\}$$

แทนค่าลงใน (1) จะได้

$$\int_s^{\infty}\left(\frac{1-\text{Cos } t}{t^2}\right)e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(s)$$

$$= \frac{\pi}{2} + s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(s)$$

(ข) เพราะว่า

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\text{Cos } t}{t^2}\,dt = L\left\{\frac{1-\text{Cos } t}{t^2}\right\}\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$ ตอบ

12. จงแสดงว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t} e^{-\sqrt{2}t}\, dt = \frac{\pi}{8}$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t} e^{-\sqrt{2}t}\, dt = L\left\{\frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t}\right\}\Bigg|_{s=\sqrt{2}} \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตร

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\{f(t)\}\, ds$$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\{\text{Sin h (t) Sin t}\}\, ds \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
L\{\text{Sin h (t) Sin t}\} &= L\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \text{Sin t}\right\} \\
&= \frac{1}{2} L\{e^t \sin t\} - \frac{1}{2} L\{e^{-t} \text{Sin t}\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\{(s+1)^2+1\} - \{(s-1)^2+1\}}{\{(s-1)^2+1\} \cdot \{(s+1)^2+1\}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+2s+1+1-s^2+2s-1-1}{\{(s^2+2)-2s\}\{(s^2+2)+2s\}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4s}{(s^2+2)^2-4s^2}\right] \\
&= \frac{2s}{s^4+4}
\end{aligned}$$

แทนค่าลงใน (2)

$$L\left\{\frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{2s}{s^4+4}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{d(s^2)}{(s^2)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{s^2}{2} \right) \Big|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{s^2}{2} \right) \right\}$$

แทนค่าลงใน (1) จะได้

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin h (t) Sin t}}{t} e^{-\sqrt{2}t} dt = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{s^2}{2} \right) \right\} \Big|_{s=\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

ซ.ต.พ.