บทที่ 1
การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

สูตรและคุณสมบัติที่สำคัญ

1. ฟูเรียร์อินทิกรัล (Fourier integral)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx \right\} e^{iwt}\, dw$$

2. การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

$$F(w) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

3. การแปลงฟูเรียร์ผกผัน (Inverse Fourier transform)

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw$$

4. การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine transform)

$$F_c(w) = \mathfrak{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{Cos} wt\, dt$$

5. การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ผกผัน (Inverse Fourier cosine transform)

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F_c(w)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(w) \operatorname{Cos} wt\, dw$$

6. การแปลงฟูเรียร์ไซน์ (Fourier Sine transform)

$$F_s(w) = \mathfrak{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{Sin} wt\, dt$$

7. การแปลงฟูเรียร์ไซน์ผกผัน (Inverse Fourier Sine transform)

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F_s(w)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w) \sin wt\, dw$$

8. ถ้า $F_1(w) = \mathfrak{F}\{f_1(t)\}$ และ $F_2(w) = \mathfrak{F}\{f_2(t)\}$ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ ดังนั้น

$$\mathfrak{F}\{a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\} = a_1F_1(w) + a_2F_2(w)$$

9. ถ้า a เป็นค่าจริงคงที่ และ $F(w) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ ดังนั้น

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) \quad ; \; a \neq 0$$

10. ถ้า w_0 เป็นค่าจริงคงที่ และ $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$ ดังนั้น

$$\mathfrak{F}\{f(t)\,e^{iw_0t}\} = F(w - W_0)$$

11. สูตรผลการประสาน

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx$$

12. คุณสมบัติผลการประสาน

12.1 เป็นไปตามกฎการสลับที่ (commutative law)

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

12.2 เป็นไปตามกฎเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

$$\{f_1(t) * f_2(t)\} * f_3(t) = f_1(t) * \{f_2(t) * f_3(t)\}$$

13. ทฤษฎีบท "time convolution"

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(w)\, F_2(w)$$

หรือ

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F_2(w)\, F_2(w)\}$$

14. ทฤษฎีบท "frequency convolution"

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = 2\pi\, f_1(t)\, f_2(t)$$

หรือ

$$F\{f_1(t)\,f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\{F_1(w) * F_2(w)\}$$

15. ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (Parseval's theorem)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2\,dw$$

15.1 กรณีที่ทราบค่า $F_c(w)$ จะได้

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_c(w)|^2\,dw$$

15.2 กรณีที่ทราบค่า $F_s(w)$ จะได้

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_s(w)|^2\,dw$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

1. (ก) สมมุติให้คาบของฟังก์ชัน Cosnt คือ T ดังนั้นจะได้

$$\text{Cos}\, n(t + T) = \text{Cos}\, nt \qquad \text{..........(1)}$$

หรือ $\text{Cos}\,(nt + nT) = \text{Cos}\, nt$

แต่คาบของฟังก์ชัน $\text{Cos}\,\theta$ คือ 2π นั่นคือ

$$\text{Cos}\,(\theta + 2\pi) = \text{Cos}\,\theta \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2)

$$nT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

ตอบ

(ข) สมมุติให้คาบของฟังก์ชัน $\text{Cos}\, 2\pi t$ คือ T ดังนั้นจะได้

$$\text{Cos}\, 2\pi(t + T) = \text{Cos}\, 2\pi t$$

หรือ $\text{Cos}\,(2\pi t + 2\pi T) = \text{Cos}\, 2\pi t$ ....(1)

แต่คาบของฟังก์ชัน $\text{Cos}\,\theta$ คือ 2π นั่นคือ

$$\text{Cos}\,(\theta + 2\pi) = \text{Cos}\,\theta \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2)

$$2\pi T = 2\pi$$

$$T = 1$$

ตอบ

(ค) สมมุติให้คาบของฟังก์ชัน $\text{Sin}\left(\frac{2\pi t}{k}\right)$ คือ T ดังนั้นจะได้

$$\text{Sin}\,\frac{2\pi}{k}(t + T) = \text{Sin}\,\frac{2\pi t}{k}$$

หรือ $\sin\left(\frac{2\pi t}{k} + \frac{2\pi T}{k}\right) = \text{Sin}\,\frac{2\pi t}{k}$

แต่คาบของฟังก์ชัน $\text{Sin}\,\theta$ คือ 2π นั่นคือ

$$\text{Sin}\,(\theta + 2\pi) = \text{Sin}\,\theta$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{2\pi T}{k} = 2\pi$$

$$T = k \qquad \textbf{ตอบ}$$

(ง) สมมุติให้คาบของฟังก์ชัน $\sin t + \sin\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{5}$ คือ T ดังนั้นจะได้

$$\sin(t+T) + \sin\frac{1}{3}(t+T) + \sin\frac{1}{5}(t+T) = \sin t + \sin\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{5}$$

หรือ $\sin(t+T) + \sin\left(\frac{t}{3}+\frac{T}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}+\frac{T}{5}\right) = \sin t + \sin\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{5}$

แต่คาบของฟังก์ชัน sine คือ $2m\pi$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$$\sin(\theta + 2m\pi) = \sin\theta$$

เทียบกับ $\sin(t+T) = \sin t$

$$T = 2m\pi \qquad \text{..........(1)}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\frac{T}{3} = 2n\pi \qquad n\text{, เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

$$T = 6n\pi \qquad \text{..........(2)}$$

และ

$$\frac{T}{5} = 2p\pi \qquad p\text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

$$T = 10p\pi \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (1), (2) และ (3) แก้สมการหาค่า m, n, P หรือ นำเอาค่า 2, 6, 10 มาหา ค.ร.น. จะได้ ค.ร.น. เป็น 30 นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $\sin t + \sin\frac{t}{3} + \sin\frac{t}{5}$ คือ 30π **ตอบ**

(จ) สมมุติให้คาบของฟังก์ชัน $|\sin w_0 t|$ คือ T ดังนั้นจะได้

$$|\sin w_0(t+T)| = |\sin w_0 t| \qquad \text{..........(1)}$$

แต่คาบของฟังก์ชัน $|\sin\theta|$ คือ π นั่นคือ

$$|\sin(\theta+\pi)| = |\sin\theta| \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2)

$$w_0 T = \pi$$

$$T = \frac{\pi}{w_0} \qquad \textbf{ตอบ}$$

2. กำหนดให้ $f(t)$ มีคาบเป็น T นั่นคือ

$$f(t + T) = f(t) \qquad \text{..........(1)}$$

สมมุติให้ฟังก์ชัน $f(at)$ มีคาบเป็น P จะได้

$$f\{a(t + p)\} = f(at)$$

หรือ $$f\{at + ap\} = f(at) \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$ap = T$$

$$p = \frac{T}{a}$$ **ตอบ**

3. (ก) สมมุติให้ $f(t) = t^3 \operatorname{Cos} nt$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-t) &= (-t)^3 \operatorname{Cos} n(-t) \\ &= -t^3 \operatorname{Cos} nt \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $t^3 \operatorname{Cos} nt$ เป็นฟังก์ชันคี่ **ตอบ**

(ข) สมมมติให้ $f(t) = e^t$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-t) &= e^{(-t)} \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

ซึ่งไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป e^t หรือ $-e^t$ ได้

นั่นคือ e^t ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ **ตอบ**

(ค) สมมุติให้ $f(t) = tg(t^2)$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-t) &= (-t)\, g\{(-t)^2\} \\ &= -t\, g(t^2) \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $tg(t^2)$ เป็นฟังก์ชันคี่ **ตอบ**

(ง) สมมติให้ $f(t) = (\text{Sin } t)^2$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-t) &= (\text{Sin }(-t))^2 \\ &= (-\sin t)^2 \\ &= (\text{Sin } t)^2 \\ &= f(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $(\text{Sin } t)^2$ เป็นฟังก์ชันคู่ **ตอบ**

(จ) สมมุติให้ $f(t) = \log \dfrac{1+t}{1-t}$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-t) &= \log \frac{1+(-t)}{1-(-t)} \\ &= \log \frac{1-t}{1+t} \\ &= \log (1-t) - \log (1+t) \\ &= -\{\log (1+t) - \log (1-t)\} \\ &= -\log \frac{1+t}{1-t} \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $\log \dfrac{1+t}{1-t}$ เป็นฟังก์ชันคี่ **ตอบ**

4. กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $(-a, a)$ จงแสดงว่า อนุพันธ์ของมัน $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังชันคู่ และอนุพันธ์ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

เพราะว่า $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

$$f(t) = f_e(t) = \frac{1}{2}\{f(t) + f(-t)\}$$

ดังนั้น $f'(t) = f_e'(t) = \frac{1}{2}\{f'(t) - f'(-t)\}$

แทนค่า t ด้วย $-t$

$$\begin{aligned} f'(-t) &= f_e'(-t) \\ &= \frac{1}{2}\{f'(-t) - f'(t)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{f'(t) - f'(-t)\} \\ &= -f_e'(t) \\ &= -f'(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$f(t) = f_0(t) = \frac{1}{2}\{f(t) - f(-t)\}$$

ดังนั้น $f'(t) = f_0'(t) = \frac{1}{2}\{f'(t) + f'(-t)\}$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(-t) &= f_0'(-t) \\ &= \frac{1}{2}\{f'(-t) + f'(t)\} \\ &= \frac{1}{2}\{f'(t) + f'(-t)\} \\ &= f_0'(t) \\ &= f'(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

สรุป
$f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่
$f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ซ.ต.พ.

5. เพราะว่า $f(t) = f_e(t) + f_0(t)$

เพราะฉะนั้น $f^2(t) = f_e^2(t) + 2f_e(t)\,f_0(t) + f_0^2(t)$

และ $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f(t)\}^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_e^2(t) + 2f_e(t)\,f_0(t) + f_0^2(t)\}\,dt$

แต่ $f_e(t) \cdot f_0(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t)\, f_0(t)\, dt = 0$
นั่นคือ

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f(t)\}^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_e(t)\}^2 dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_0(t)\}^2\, dt$$

ช.ต.พ.

6. โจทย์กำหนดให้ $f(t) = f_e(t) + f_0(t)$ ดังนั้น

$$f(t-T) = f_e(t-T) + f_0(t-T)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, f(t-T)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_e(t) + f_0(t)\}\{f_e(t-T) + f_0(t-T)\}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_e(t)\, f_e(t-T) + f_0(t)\, f_e(t-T) + f_e(t)\, f_0(t-T) + f_0(t)\, f_0(t-T)\}\, dt$$

แต่ $f_0(t)\, f_e(t-T)$ และ $f_e(t)\, f_0(t-T)$ เป็นฟังก์ชันคี่
ดังนั้น

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t)\, f_e(t-T)\, dt = 0$$

และ
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t)\, f_0(t-T)\, dt = 0$$

จะได้

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, f(t-T)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t)\, f_e(t-T)\, dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t)\, f_0(t-T)\, dt$$

ช.ต.พ.

7. (ก) สมมุติให้ $f(t) = e^t$

$$f(-t) = e^{-t}$$

จากสูตร $f_e(t) = \frac{1}{2}\{ f(t) + f(-t) \}$

$$= \frac{1}{2}\{ e^t + e^{-t} \}$$

$$f_e(t) = \text{Cos h } t$$ ตอบ

จากสูตร $f_0(t) = \frac{1}{2}\{ f(t) - f(-t) \}$

$$= \frac{1}{2}\{ e^t - e^{-t} \}$$

$$f_0(t) = \text{Sin h } t$$ ตอบ

(ข) สมมุติให้ $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$

$$f(-t) = \frac{(-t)+1}{(-t)-1} = \frac{t-1}{t+1}$$

แทนในสูตร $f_e(t)$ และ $f_0(t)$ จะได้

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1}{t^2 - 1} \right\}$$

$$= \frac{t^2+1}{t^2-1}$$ ตอบ

และ $f_0(t) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{t+1}{t-1} - \frac{t-1}{t+1} \right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2 + 2t - 1}{t^2 - 1} \right\}$$

$$= \frac{2t}{t^2-1}$$ ตอบ

(ค) สมมุติให้ $f(t) = t \text{ Sin } t - \text{Sin } 2t$

$$f(-t) = (-t) \text{ Sin } (-t) - \text{Sin } 2(-t)$$

$$= t \text{ Sin } t + \text{Sin } 2t$$

แทนค่าในสูตร $f_e(t)$ และ $f_0(t)$ จะได้

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\{t \text{ Sin } t - \text{Sin } 2t + t \text{ Sin } t + \text{Sin } 2t\}$$
$$= t \text{ Sin } t$$

และ
$$f_0(t) = \frac{1}{2}\{t \text{ Sin } t - \text{Sin } 2t - (t \text{ Sin } t + \text{Sin } 2t)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{t \text{ Sin } t - \text{Sin } 2t - t \text{ Sin } t - \text{Sin } 2t\}$$
$$= -\text{Sin } 2t$$

ตอบ

8. โจทย์กำหนดให้

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t + b_n \text{ Sin } n\, w_0 t) \; ; \; w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$f(-t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0(-t) + b_n \text{ Sin } n\, w_0(-t))$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t - b_n \text{ Sin } n\, w_0 t)$$

แทนค่าในสูตร $f_e(t)$ และ $f_0(t)$ จะได้

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t + b_n \text{ Sin } n\, w_0 t)$$
$$+ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t - b_n \text{ Sin } n\, w_0 t)\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Cos } n\, w_0 t\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Cos } n\, w_0 t$$

ช.ต.พ.

และ
$$f_0(t) = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t + b_n \text{ Sin } n\, w_0 t)$$
$$- \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{ Cos } n\, w_0 t - b_n \text{ Sin } n\, w_0 t)\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sin } n\, w_0 t\Big\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sin } n\, w_0 t$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

1. จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

โจทย์กำหนดให้ $f(t) = ig(t)$ เมื่อ $g(t)$ เป็นค่าจริง ดังนั้น

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} ig(t)\,(\text{Cos } wt - i \text{ Sin } wt)\, dt$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Cos } wt\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Sin } wt\, dt$$

เพราะว่า $F(w) = R(w) + i\,X(w)$

เมื่อ $R(w)$ แทนส่วนจริง (real part) ของ $F(w)$

$X(w)$ แทนส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $F(w)$

เพราะฉะนั้น

$$R(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Sin } wt\, dt \qquad \text{..........(1)}$$

และ

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Cos } wt\, dt \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า w ด้วย −w ลงใน (1) และ (2) ตามลำดับ จะได้

$$R(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Sin } (-w)\, t\, dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Sin } wt\, dt$$

$$= -R(w)$$

นั่นคือ $R(w)$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$X(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Cos } (-w)\, t\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{ Cos } wt\, dt$$

$$= X(w)$$

นั่นคือ $X(w)$ เป็นฟังก์ชันคู่

จาก

$$F(w) = R(w) + i\,X(w)$$

$$F(-w) = R(-w) + i\,X(-w)$$

$$= -R(w) + i\,X(w)$$

$$= \quad -\left(R(w) - i\,X(w)\right)$$
$$= \quad -F^*(w)$$ ช.ต.พ.

2. **พิสูจน์** จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{f(at)\,e^{iw_0t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{iw_0t}\,e^{-iwt}\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-i(w-w_0)t}\,dt$$

สมมุติให้

$$y = at$$
$$dt = \frac{1}{a}\,dy$$

พิจารณากรณี $a < 0$

$$\mathcal{F}\{f(at)\,e^{iw_0t}\} = \int_{\infty}^{-\infty} f(y)\,e^{-i(w-w_0)\frac{y}{a}}\,\frac{1}{a}\,dy$$
$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\left(\frac{w-w_0}{a}\right)y}\,dy$$
$$= \frac{1}{|a|}\,F\left(\frac{w-w_0}{a}\right)$$

พิจารณากรณี $a > 0$

$$\mathcal{F}\{f(at)\,e^{iw_0t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i(w-w_0)\frac{y}{a}}\,\frac{1}{a}\,dy$$
$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\left(\frac{w-w_0}{a}\right)y}\,dy$$
$$= \frac{1}{|a|}\,F\left(\frac{w-w_0}{a}\right)$$

นั่นคือ

$$\mathcal{F}\{f(at)\,e^{iw_0t}\} = \frac{1}{|a|}\,F\left(\frac{w-w_0}{a}\right)$$ ช.ต.พ.

3. กำหนดให้ $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$

เพราะว่า $\text{Sin } w_0t = \dfrac{e^{iw_0t} - e^{-iw_0t}}{2i}$

เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{f(t)\,\text{Sin } w_0t\} = \mathcal{F}\left\{f(t)\left(\frac{e^{iw_0t} - e^{-iw_0t}}{2i}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{f(t)e^{iw_0t}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{f(t)e^{-iw_0t}\}$$

$$= \frac{1}{2i}F(w - w_0) - \frac{1}{2i}F(w + w_0)$$

$$= \frac{1}{2i}\{F(w - w_0) - F(w + w_0)\}$$ **ตอบ**

4. จงหาการแปลงฟูเรียร์ ของ $f(t) = e^{-a|t|}$

วิธีทำ จากนิยามค่าสัมบูรณ์

$$|t| = -t \quad ; \quad t < 0$$

$$= t \quad ; \quad t \geqslant 0$$

ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-iwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)}e^{-iwt}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a(t)}e^{-iwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}dt$$

$$= \frac{e^{(a-iw)t}}{(a-iw)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(a+iw)t}}{-(a+iw)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-iw} + \frac{1}{a+iw}$$

$$= \frac{a + iw + a - iw}{a^2 + w^2}$$

$$F(w) = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$ **ตอบ**

5. จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$

วิธีทำ $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$

แทนค่า t ด้วย $-t$ จะได้

$$f(-t) = \frac{1}{a^2 + (-t)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2 + t^2}$$

$$= \quad f(t)$$

นั่นคือ $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น

$$F(w) = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} (\text{Cos } wt + i \text{ Sin } wt)\, dt$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{\text{Cos } wt}{a^2 + t^2}\, dt \qquad \text{..........(1)}$$

จากสูตรฟูเรียร์อินทิกรัล

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้ผลจากข้อ 4

$$F(w) = \mathfrak{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

เพราะว่า $F(w)$ เป็นฟังก์ชันคู่ แทนค่าลงใน (2) จะได้

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \times 2\int_0^{\infty} \frac{2a}{a^2 + w^2} (\text{Cos } wt + i \text{ Sin } wt)\, dw$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Cos } wt}{a^2 + w^2}\, dw$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{\text{Cos } wt}{a^2 + w^2}\, dw = \frac{\pi}{a} f(t) = \frac{\pi}{a} e^{-a|t|}$$

แทนค่า $w = t$ และ $t = w$ ดังนั้น

$$2\int_0^{\infty} \frac{\text{Cos } wt}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|} \qquad \text{...........(3)}$$

(1) = (3) นั่นคือ

$$F(w) = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\} = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$$

6. ถ้า $f(t) = 0$ เมื่อ $t \leqslant 0$ และ $t \geqslant \pi$ และ $f(t) = \text{Sin } t$ เมื่อ $0 \leqslant t \leqslant \pi$ จงพิสูจน์ว่า

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\text{Cos } wt + \text{Cos }\{w(\pi - t)\}}{1 - w^2}\, dw \; ; \; -\infty < t < \infty$$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, e^{-iwt}\, dt + \int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt + \int_{\pi}^{\infty} (0)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt$$

อินทิเกรตโดยการแยกส่วน (integrating by parts)

ให้ $u = \text{Sin } t \; ; \; dv = e^{-iwt}\, dt$

$du = \text{Cos } t\, dt \qquad v = -\dfrac{e^{-iwt}}{iw}$

ดังนั้น

$$F(w) = \text{Sin } t \left(\frac{-e^{-iwt}}{iw}\right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{iw}\int_0^{\pi} \text{Cos } t\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \text{Cos } t\, e^{-iwt}\, dt$$

อินทิเกรตโดยการแยกส่วนอีกครั้งหนึ่ง

ให้ $u = \text{Cos}t \; ; \; dv = e^{-iwt}\, dt$

$du = -\text{Sin } t\, dt \qquad v = -\dfrac{e^{-iwt}}{iw}$

ดังนั้น

$$F(w) = \int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt = \frac{1}{iw}\left[\text{Cos } t\left(-\frac{e^{-iwt}}{iw}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \text{Sin } t\, \frac{e^{-iwt}}{iw}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{w^2}\{(-1)\, e^{-iw\pi} - (1)\} + \frac{1}{w^2}\int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt$$

$$\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)\int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt = -\frac{1}{w^2}\{e^{-iwt} + 1\}$$

หรือ $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{Sin } t\, e^{-iwt}\, dt = \frac{e^{-iw\pi} + 1}{1 - w^2}$

$$F(w) = \frac{e^{-iw\pi} + 1}{1 - w^2}$$

จากนิยามการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-iw\pi}+1}{1-w^2}\right) e^{iwt}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iw\pi}\cdot e^{iwt} + e^{iwt}}{1-w^2}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iw(\pi-t)} + e^{iwt}}{1-w^2}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Cos}\{w(\pi-t)\} - i\,\text{Sin}\{w(\pi-t)\} + \text{Cos}\,wt + i\,\text{Sin}\,wt}{1-w^2}\right] dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Cos}\{w(\pi-t) + \text{Cos}\,wt}{1-w^2}\right] dw \\
&\quad + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Sin}\,wt - \text{Sin}\{w(\pi-t)\}}{1-w^2}\right] dw
\end{aligned}
$$

ตัวอินทิเกรต (integrand) ของพจน์ที่สองเป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อเทียบกับ w นั่นคือ

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Sin}\,wt - \text{Sin}\{w(\pi-t)\}}{1-w^2}\right] dw = 0
$$

และตัวอินทิเกรตของพจน์แรกทางขวามือเป็นฟังก์ชันคู่เมื่อเทียบกับ w จะได้

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Cos}\{w(\pi-t) + \text{Cos}\,wt}{1-w^2}\right] dw = 2\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\text{Cos}\{w(\pi-t) + \text{Cos}\,wt}{1-w^2}\right] dw
$$

ดังนั้น

$$
f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\text{Cos}\,wt + \text{Cos}\{w(\pi-t)\}}{1-w^2}\right] dw \qquad \text{ช.ต.พ.}
$$

ถ้าแทนค่า $t = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}w + \operatorname{Cos}\{w(\pi - \frac{\pi}{2})\}}{1 - w^2}\right] dw$$

$$\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\operatorname{Cos}\frac{\pi w}{2}}{1 - w^2}\, dw$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi w}{2}}{1 - w^2}\, dw = \frac{\pi}{2}(1) = \frac{\pi}{2}$$ ช.ต.พ.

7. ถ้า $f(t) = 1$ เมื่อ $0 < t < k$ และ $f(t) = 0$ เมื่อ $t > k$ และ $f(k) = \frac{1}{2}$ จงแสดงว่าสูตรฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัลของ $f(t)$ คือ

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1 - \operatorname{Cos} kw}{w}\operatorname{Sin} wt\, dw\ ;\ t > 0$$

วิธีทำ

$$F_s(w) = \int_0^\infty f(t)\operatorname{Sin} wt\, dt$$

$$= \int_0^k (1)\operatorname{Sin} wt\, dt + \int_k^\infty (0)\operatorname{Sin} wt\, dt$$

$$= \left.\frac{-\operatorname{Cos} wt}{w}\right|_0^k$$

$$= \frac{1 - \operatorname{Cos} kw}{w}$$

สูตรการแปลงฟูเรียร์ไซน์ผกผัน

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(w)\, \text{Sin}\, wt\, dw$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1 - \text{Cos}\, kw}{w}\, dw \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

8. ใช้สูตรฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัลแสดงว่า

$$e^{-t}\, \text{Cos}\, t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^3\, \text{Sin}\, wt}{w^4 + 4}\, dw\ ;\ t > 0$$

วิธีทำ จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ไซน์

$$\begin{aligned} F_s(w) &= \int_0^\infty f(t)\, \text{Sin}\, wt\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\, \text{Cos}\, t\, \text{Sin}\, wt\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\left\{ \text{Sin}\,(1+w)t - \text{Sin}\,(1-w)t \right\} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, \text{Sin}\,(1+w)t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, \text{Sin}\,(1-w)\, dt \end{aligned}$$

พิจารณาอินทิกรัล $\int_0^\infty e^{-t}\, \text{Sin}\,(1+w)t\, dt$ อินทิเกรตโดยการแยกส่วน

ให้ $u = \text{Sin}\,(1+w)t\ ;\ dv = e^{-t}\, dt$

$du = (1+w)\, \text{Cos}\,(1+w)t\, dt;\ v = -e^{-t}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t}\, \text{Sin}\,(1+w)t\, dt &= \text{Sin}\,(1+w)t\,(-e^{-t})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1+w)\, e^{-t}\, \text{Cos}\,(1+w)t\, dt \\ &= -\{0 - 0\} + (1+w)\int_0^\infty e^{-t}\, \text{Cos}\,(1+w)dt \end{aligned}$$

อินทิเกรตโดยการแยกส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = \text{Cos}\,(1+w)t$; $dv = e^{-t}\,dt$

$du = -(1+w)\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt$; $v = -e^{-t}$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt = (1+w)\left[\text{Cos}\,(1+w)t\,(-e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (1+w)\,e^{-t}\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt\right]$$

$$= -(1+w)\{0-1\} - (1+w)^2\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt$$

$$\{1+(1+w)^2\}\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt = 1+w$$

หรือ $$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin}\,(1+w)t\,dt = \frac{1+w}{1+(1+w)^2}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้จะได้

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin}\,(1-w)t\,dt = \frac{1-w}{1+(1-w)^2}$$

แทนค่าในสูตรจะได้

$$F_s(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+w}{1+(1+w)^2} - \frac{1-w}{1+(1-w)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+w)\{1+(1-w)^2\} - (1-w)\{1+(1+w)^2\}}{\{1+(1+w)^2\}\{1+(1-w)^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1+w+1-2w+w^2+w-2w^2+w^3-1+w-1-2w-w^2+w+2w^2+w^3}{w^4+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2w^3}{w^4+4}\right) .$$

จากสูตรฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัล หรือการแปลงฟูเรียร์ไซน์ผกผัน

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(w)\,\text{Sin}\,wt\,dw$$

หรือ $$e^{-t}\,\text{Cos}\,t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{w^3}{w^4+4}\right)\text{Sin}\,wt\,dw$$ ซ.ต.พ.

9. ใช้สูตรฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัลและจงพิสูจน์ว่า

$$e^{-t}\,\text{Cos}\,t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^2+2}{w^4+4}\,\text{Cos}\,wt\,dw\,;\ t \geqslant 0$$

พิสูจน์ จากสูตรการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

$$F_c(w) = \int_0^\infty f(t)\,\text{Cos } wt\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos } t\,\text{Cos } wt\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,\{\text{Cos }(1+w)t + \text{Cos }(1-w)t\}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt + \int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1-w)t\,dt\right]$$

พิจารณาอินทิกรัล $\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt$

ให้ $u = \text{Cos }(1+w)t \quad ; \quad dv = e^{-t}\,dt$

$du = -(1+w)\,\text{Sin }(1+w)t\,dt \quad ; \quad v = -e^{-t}$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt = \text{Cos }(1+w)t\,(-e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}\,(1+w)\,\text{Sin }(1+w)t\,dt$$

$$= 1 - (1+w)\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Sin }(1+w)t\,dt$$

อินทิเกรตโดยการแยกส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = \text{Sin }(1+w)t \quad ; \quad dv = e^{-t}\,dt$

$du = (1+w)\,\text{Cos }(1+w)t\,dt \quad ; \quad v = -e^{-t}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt = 1-(1+w)\left[\text{Sin}(1+w)t\,(-e^{-t})\Big|_0^\infty + (1+w)\int_0^\infty e^{-t}\text{Cos}(1+w)t\,dt\right]$$

$$= 1 - (1+w)^2\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt$$

$$\{1 + (1+w^2)\}\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt = 1$$

หรือ $$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1+w)t\,dt = \frac{1}{\{1+(1+w)^2\}}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้จะได้

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\text{Cos }(1-w)t\,dt = \frac{1}{\{1+(1-w)^2\}}$$

แทนค่าในสูตรการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

$$F_c(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\{1+(1+w)^2\}} + \frac{1}{\{1+(1-w)^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\{1+(1-w)^2\}+\{1+(1+w)^2\}}{\{1+(1+w)^2\}\{1+(1-w)^2\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+1-2w+w^2+1+1+2w+w^2}{w^4+4}\right]$$

$$= \frac{w^2+2}{w^4+4}$$

จากสูตรฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัล

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(w)\,\mathrm{Cos}\,wt\,dw$$

$$e^{-t}\,\mathrm{Cos}\,t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^2+2}{w^4+4}\,\mathrm{Cos}\,wt\,dw$$ ช.ต.พ.

10. กำหนดให้

$$e^{-kt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{w^2+k^2}\,dw \quad ; \quad t > 0,\ k > 0$$

และ $$e^{-mt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{w^2+m^2}\,dw \quad ; \quad t \geqslant 0,\ m > 0$$

จงแสดงว่า

$$e^{-t} - e^{-2t} = \frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{(w^2+1)(w^2+4)}\,dw \quad t \geqslant 0$$

วิธีทำ แทนค่า $k = 1$ และ $m = 2$ ลงในสมการที่โจทย์กำหนดให้ จะได้

$$e^{-t} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{w^2+1}\,dw \quad ; \quad t > 0$$

และ $$e^{-2t} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\,\sin\,wt}{w^2+4}\,dw \quad ; \quad t \geqslant 0$$

ดังนั้น

$$e^{-t} - e^{-2t} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{w^2+1} - \frac{w\,\mathrm{Sin}\,wt}{w^2+4}\right] dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{w^2+1} - \frac{1}{w^2+4}\right\} w\,\sin\,wt\,dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \frac{w^2 + 4 - w^2 - 1}{(w^2+1)(w^2+4)} \right\} w \operatorname{Sin} wt \, dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{3w \operatorname{Sin} wt}{(w^2+1)(w^2+4)} \, dw$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{w \operatorname{Sin} wt}{(w^2+1)(w^2+4)} \, dw$$

ซ.ต.พ.

11. ใช้ผลการประสาน (convolution) หาค่าของ

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{(1+iw)(2+iw)} \right\}$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{\alpha + iw} \right\} = e^{-\alpha t} u(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{1 + iw} \right\} = e^{-t} u(t) = f_1(t)$$

และ $$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{2 + iw} \right\} = e^{-2t} u(t) = f_2(t)$$

$u(t)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function)

ดังนั้นใช้ทฤษฎีผลการประสาน

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} u(x) e^{-2(t-x)} u(t-x) \, dx$$

$$= e^{-2t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) u(t-x) \, dx$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ ตัวอินทิเกรต คือ $u(x)\, u(t-x)\, e^x$ เพราะว่า $u(x) = 0$ เมื่อ $x < 0$ และ $u(t-x) = 0$ เมื่อ $x > t$ ดังนั้น

$$u(x)\,u(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \text{ และ } x > t \\ 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < t \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) = e^{-2t}\int_0^t e^x\,dx$$

$$= e^{-2t}(e^x)\Big|_0^t$$

$$= e^{-2t}(e^t - 1)$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$$ **ตอบ**

12. จงหาค่าของ $f(t)$ จากข้อ (11) โดยกระจาย $F(w)$ ออกเป็นเศษส่วนย่อย

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{(1+iw)(2+iw)} = \frac{A}{1+iw} + \frac{B}{2+iw}$$

$$= \frac{A(2+iw) + B(1+iw)}{(1+iw)(2+iw)}$$

หรือ $$1 = (A+B)\,iw + 2A + B$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$A + B = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$2A + B = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

(2) − (1) $$A = 1$$

แทนใน (1) จะได้

$$B = -1$$

ดังนั้น

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+iw)(2+iw)}\right\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+iw} - \frac{1}{2+iw}\right\}$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+iw}\right\} - \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+iw}\right\}$$

$$= e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$$ **ตอบ**

13. กำหนดให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียน (Gaussian functions) นั่นคือ

$$f_1(t) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_1^2}, \quad f_2(t) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

จงแสดงว่าถ้า $f_3(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ดังนั้น $f_3(t)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนด้วย และ

$$f_3(t) = \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_3^2} \qquad \text{เมื่อ } \sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

พิสูจน์ จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเกาส์เซียน

$$\mathfrak{F}\{e^{-at^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-w^2/4a} \qquad \text{..........(A)}$$

ดังนั้น

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_1^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}\left\{e^{-\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)t^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma_1^2}}} \quad e^{-w^2/4\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1 \quad e^{-w^2/\frac{2}{\sigma_1^2}}$$

หรือ $\quad F_1(w) = e^{-w^2\sigma_1^2/2}$

โดยวิธีเดียวกันนี้จะได้

$$\mathfrak{F}\{f_2(t)\} = e^{-w^2\sigma_2^2/2}$$

หรือ $\quad F_2(w) = e^{-w^2\sigma_2^2/2}$

จากสูตร "time convolution"

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(w) \cdot F_2(w)$$

หรือ $$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) \cdot F_2(w)\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2\sigma_1^2/2} \cdot e^{-w^2\sigma_2^2/2}\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2}\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2\sigma_3^2/2}\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2/\frac{2}{\sigma_3^2}}\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2/4(\frac{1}{2\sigma_3^2})}\}$$

ใช้สูตร (A) จะได้

$$f_1(t) * f_2(t) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2\sigma_3^2}}{\pi}} = e^{-(\frac{1}{2\sigma_3^2})t^2}, \qquad a = \frac{1}{2\sigma_3^2}$$

หรือ $$f_3(t) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\sigma_3^2}$$

นั่นคือ $f_3(t)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนด้วย ซ.ต.พ.

14. กำหนดให้ $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ และ $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$
จงพิสูจน์ว่า

(ก) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, e^{iwt}\, dw$

(ข) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, dw$

(ค) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G^*(w)\, dw$

พิสูจน์ (ก) จากสูตร "time convolution"

$$\mathcal{F}\{ f(t) * g(t) \} = F(w)\, G(w)$$

หรือ $f(t) * g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{ F(w)\, G(w) \}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, e^{iwt}\, dw$$

(ข) แทนค่า $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, dw$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น (dummy variable)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, G(w)\, dw$$

(ค) จากสูตร "frequency convolution"

$$\mathcal{F}^{-1}\{ F_1(w) * F_2(w) \} = 2\pi\, f_1(t) \cdot f_2(t)$$

หรือ $F_1(w) * F_2(w) = 2\pi\, \mathcal{F}\{ f_1(t)\, f_2(t) \}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\, F_2(w-x)\, dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

ให้ $w = 0$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\, F_2(-x)\, dx$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(w)\, F_2(-w)\, dw$$

เพราะว่า

$$\mathfrak{F}\{g^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{ g(t)\, e^{iwt} \}^*\, dt$$

$$= \{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{iwt}\, dt \}^*$$

$$= \{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i(-w)t}\, dt \}^*$$

$$= G^*(-w)$$

ดังนั้น ถ้าแทนค่า $f_1(t) = f(t)$ **และ** $f_2(t) = g^*(t)$ **จะได้**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w)\, G^*\{-(-w)\}\, dw$$

หรือ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w)\, G^*(w)\, dw$$ **ช.ต.พ.**

15. (ก) จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & |t| \leqslant \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

(ข) จงหาค่าของการแปลงฟูเรียร์ เมื่อ $\varepsilon \to 0^+$

วิธีทำ (ก) จากสูตรการแปลงฟูเรียร์

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (0)\, e^{-iwt}\, dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\, e^{-iwt}\, dt$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\infty} (0)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \left(- \frac{e^{-iwt}}{iw} \right) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= - \frac{1}{2\varepsilon wi} \{ e^{-iw\varepsilon} - e^{iw\varepsilon} \}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon w} \left(\frac{e^{iw\varepsilon} - e^{iw\varepsilon}}{2i} \right)$$

$$\frac{\text{Sin}\ \varepsilon w}{\varepsilon w}$$

(ข) แทนค่า $\varepsilon \to 0^+$

$$F(w) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sin \varepsilon w}{\varepsilon w}$$

$$= 1$$ **ตอบ**

16. (ก) จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & ; \quad |t| < 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \end{cases}$$

(ข) จงหาค่าของ $\int_0^{\infty} \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^3} \right) \cos \frac{t}{2}\, dt$

วิธีทำ (ก) จากสูตรการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - t^2)(\cos wt - i \sin wt)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \cos wt\, dt - i \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \sin wt\, dt$$

เพราะว่าฟังก์ชัน $(1 - t^2)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น ตัวอินทิเกรต $(1 - t^2) \cos wt$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $(1 - t^2) \sin wt$ เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2) \sin wt\, dt = 0$$

และ $$\int_{-1}^{1} (1 - t^2) \cos wt\, dt = 2 \int_0^{1} (1 - t^2) \cos wt\, dt$$

ตามคุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่

ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = 2 \int_0^{1} (1 - t^2) \cos wt\, dt$$

อินทิเกรตโดยการแยกส่วน

$$= 2 \left[(1 - t^2) \left(\frac{\sin wt}{w} \right) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 t \frac{\sin wt}{w}\, dt \right]$$

$$F(w) = \frac{4}{w} \left\{ t \left(-\frac{\cos wt}{w} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos wt}{w}\, dt \right\}$$

$$= -\frac{4\,\text{Cos}\,w}{w^2} + \frac{4\,\text{Sin}\,wt}{w^3}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{4\,\text{Cos}\,w}{w^2} + \frac{4\,\text{Sin}\,w}{w^3}$$

$$= -\frac{4\,(w\,\text{Cos}\,w - \text{Sin}\,w)}{w^3}$$ **ตอบ**

(ข) จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left\{\frac{-4\,(w\,\text{Cos}\,w - \text{Sin}\,w)}{w^3}\right\}(\text{Cos}\,wt + i\,\text{Sin}\,wt)\,dw$$

แต่ $$F(-w) = \frac{-4\,((-w)\,\text{Cos}\,(-w) - \text{Sin}\,(-w))}{(-w)^3}$$

$$= \frac{-4(w\,\text{Cos}\,w - \text{Sin}\,w)}{w^3}$$

$$= F(w)$$

นั่นคือ F(w) เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\quad F(w)\,\text{Cos}\,wt\,dw + \frac{i}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(w)\,\text{Sin}\,wt\,dw$$

แต่อินทิกรัลพจน์ที่สองเป็นศูนย์ เพราะว่าตัวอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(w)\,\text{Cos}\,wt\,dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{-4\,(w\,\text{Cos}\,w - \text{Sin}\,w)}{w^3}\right. \text{Cos}\,wt\,dw$$

ให้ $t = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w\,\text{Cos}\,w - \text{Sin}\,w}{w^3}\,\text{Cos}\,\frac{w}{2}\,dw$$

$$\frac{3}{4} = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{t\,\text{Cos}\,t - \text{Sin}\,t}{t^3}\right)\text{Cos}\,\frac{t}{2}\,dt$$

หรือ $\int_0^\infty \left(\frac{\text{Cos}\,t - \text{Sin}\,t}{t^3} \right) \text{Cos}\,\frac{t}{2}\, dt = -\frac{3\pi}{16}$ **ตอบ**

17. ถ้า $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t \geqslant 1 \end{cases}$

จงหาค่าของ

(ก) การแปลงฟูเรียร์ไซน์

(ข) การแปลงฟูเรียร์โคไซน์

วิธีทำ

(ก) สูตรการแปลงฟูเรียร์ไซน์

$$\mathcal{F}_s\{ f(t) \} = F_s(w) = \int_0^\infty f(t)\, \text{Sin}\, wt\, dt$$

$$= \int_0^1 (1)\, \text{Sin}\, wt\, dt + \int_1^\infty (0)\, \text{Sin}\, wt\, dt$$

$$= -\frac{\text{Cos}\, wt}{w} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1 - \text{Cos}\, w}{w} \qquad \text{(A)}$$ **ตอบ**

(ข) สูตรการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

$$\mathcal{F}_c\{ f(t) \} = F_c(w) = \int_0^\infty f(t)\, \text{Cos}\, wt\, dt$$

$$= \int_0^1 (1)\, \text{Cos}\, wt\, dt + \int_1^\infty (0)\, \text{Cos}\, wt\, dt$$

$$= \frac{\text{Sin}\, wt}{w} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\text{Sin}\, w}{w} \qquad \text{(B)}$$ **ตอบ**

18. ใช้ผลจากข้อ (17) จงแสดงว่า

(ก) $\int_0^\infty \left(\frac{1 - \text{Cos}\, t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$

(ข) $\int_0^\infty \frac{\text{Sin}^4\, t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ

(ก) ใช้ผลจากข้อ 17

$$F_s(w) \quad = \quad \frac{1 - \operatorname{Cos} w}{w}$$

สูตรของปาร์เซอวาล กรณีที่ทราบค่าของ $F_s(w)$

$$\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |F_s(w)|^2\, dw$$

แทนค่าจะได้

$$\int_0^1 (1)\, dt \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} w}{w}\right)^2 dw$$

$$t \Big|_0^1 \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} w}{w}\right)^2 dw$$

$$1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad = \quad \int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} w}{w}\right)^2 dw$$

หรือ $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} t}{t}\right)^2 dt \quad = \quad \frac{\pi}{2}$ **ตอบ**

(ข) แทนค่า $t = 2x$ จะได้

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{Cos} 2x}{2x}\right)^2 d(2x) \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

$$2\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{Sin}^2 x}{x}\right)^2 dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^4 x}{x^2}\, dx \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น จะได้

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^4 t}{t^2}\, dt \quad = \quad \frac{\pi}{4}$ **ตอบ**

19. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2}\, dt$ โดยใช้ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (แนะนำ : ใช้การแปลงฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน e^{-t} เมื่อ $t > 0$)

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้

$$\mathcal{F}_s\{e^{-t}\} = \frac{w}{1+w^2} \; ; \; t > 0$$

จากสูตรของปาร์เซอวาลในกรณีที่ทราบค่า $F_S(w)$

$$\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |F_s(w)|^2\,dw$$

$$\int_0^\infty |e^{-t}|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{w}{1+w^2}\right|^2 dw$$

$$\int_0^\infty e^{-2t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^2}{(w^2+1)^2}\,dw$$

$$-\left.\frac{e^{-2t}}{2}\right|_0^\infty = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^2}{(w^2+1)^2}\,dw$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{w^2}{(w^2+1)^2}\,dw$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

20. จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^\infty \frac{a^2}{(a^2+t^2)^2}\,dt$ และ $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

(แนะนำ : ใช้ผลจากข้อ (4) แทนในสูตรของปาร์เซอวาล)

วิธีทำ ผลจากข้อ (4)

(ก) $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \dfrac{2a}{a^2+w^2}$

จากสูตรของปาร์เซอวาล

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |F(w)|^2\,dw$$

$$\int_{-\infty}^\infty |e^{-a|t|}|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{2a}{a^2+w^2}\right|^2 dw$$

$$2\int_0^{\infty} e^{-2at}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{a^2}{(a^2+w^2)^2}\,dw$$

$$-\frac{e^{-2at}}{a}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{a^2}{(a^2+w^2)^2}\,dw$$

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2}{(a^2+w^2)^2}\,dw = 1\left(\frac{\pi}{2a}\right)$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2}{(a^2+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}$$

(ข) แทนค่า $a = 1$ ลงในผลของข้อ (ก) จะได้

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

ตอบ