แบบฝึกหัด 4.3

1. ตามรูป 4.1 กำหนดว่ามวล m มีแรง $f(t), t>0$ มากระทำ แต่ไม่มีแรงหน่วง (damping force) มาเกี่ยวข้อง

(ก) จงแสดงว่าถ้ามวลเริ่มจากจุดพักที่ระยะ $X = a$ จากตำแหน่งสมดุล ($X = 0$) ดังนั้นระยะขจัด X ที่เวลา t ใด ๆ สามารถหาได้จากสมการการเคลื่อนที่

$$mX'' + kX = f(t), \quad X' = \frac{dX}{dt}$$

$X(0) = a, X'(0) = 0$

(ข) จงหา X ที่เวลา t ใด ๆ ถ้า $f(t) = F_0$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ สำหรับ $t>0$

(ค) จงหา X ที่เวลา t ใด ๆ ถ้า $f(t) = F_0e^{-\alpha t}$ เมื่อ $\alpha>0$

2. จากปัญหาข้อ 1 ถ้า $f(t) = F_0 \sin \omega t$ ให้พิจารณาในสองกรณี คือ

(ก) $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$

(ข) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง ดังนั้นระยะขจัด X จากจุดตรึง O ที่เวลา t ใด ๆ ถูกกำหนดโดย

$$X''(t) + 4X(t) + 5X'(t) = 80 \sin 5t$$

(ก) ถ้าที่เวลา $t = 0$ อนุภาคหยุดอยู่ที่ $X = 0$ จงหาระยะขจัดที่เวลา t ใด ๆ

(ข) จงหาระยะขจัดสูงสุด (amplitude) คาบและความถี่ของการเคลื่อนที่หลังจากเวลาผ่านไปเวลานาน ($t \to \infty$)

(ค) พจน์ไหนจากคำตอบข้อ (ก) คือพจน์ชั่วคราว (transient term) และพจน์ไหนคือพจน์สภาวะมั่นคง (steady-state term)

(ง) การเคลื่อนที่ของโจทย์ข้อนี้เป็นลักษณะใด

4. กำหนดว่าที่ $t = 0$ มวล m ตามรูป 4.1 พักอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล $X = 0$ กำหนดต่อไปว่ามีแรงมากระทำต่อมวล m ทันทีทันใด เพื่อให้มวล m มีความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) V_0 ในทิศตรงไปทางขวาแล้วแรงนี้ก็หมดไป จงแสดงว่าระยะขจัดของมวลจากตำแหน่งสมดุล ที่เวลา t ใด ๆ $(t>0)$ คือ

(ก) $V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

ถ้าไม่มีแรงหน่วง และ

(ข) $\frac{V_0}{\gamma}e^{-\beta t/2m}\sin\gamma t$

เมื่อ $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}$ ถ้ามีแรงหน่วงซึ่งมีขนาด $-\beta X'(t)$ เมื่อ $\beta<2\sqrt{km}$

5. ลูกบอลมวล m ถูกขว้างขึ้นไปในอากาศ จากพื้นผิวของโลก ด้วยความเร็ว V_0 จงแสดงว่ามันจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่ากับ $V_0^2/2g$ เมื่อ g คืออัตราเร่งเข้าหาจุดศูนย์ถ่วงของโลก

6. มวล m เคลื่อนที่ไปตามแกน X ภายใต้อิทธิพลของแรงซึ่งเป็นปฏิภาคตรงกับความเร็วชั่วขณะ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ กำหนดว่าที่ $t = 0$ อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $X = a$ และเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว V_0 จงหาตำแหน่งเมื่อมวลหยุดนิ่ง

คำตอบแบบฝึกหัด 4.3

1) (ก) $X = a + \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

(ข) $X = a + \frac{F_0}{m\alpha^2 + k}\left(e^{-\alpha t} - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

$+ \frac{\alpha F_0\sqrt{\frac{m}{k}}}{m\alpha^2 + k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

3) (ก) $X(t) = 2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t) - 2(\sin 5t + \cos 5t)$

(ข) ระยะขจัดสูงสุด (amplitude) $= 2\backslash 12$

คาบ $= \frac{2H}{5}$ ความถี่ $= \frac{5}{2\pi}$

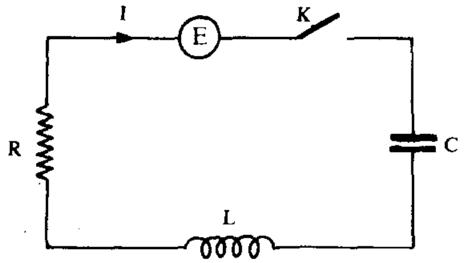
(ค) พจน์ชั่วคราว $= 2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t)$

พจน์สภาวะมั่นคง $= -2(\sin 5t + \cos 5t)$

(ง) การแกว่งกวัดแบบหน่วง (Damped oscillatory)

4.4 ประยุกต์กับวงจรไฟฟ้า (Application to electrical circuits)

วงจรไฟฟ้าอย่างง่ายซึ่งต่อกันแบบอนุกรมตามรูป 4.8 ประกอบด้วยส่วนสำคัญของวงจร ดังนี้



รูป 4.8

1. ตัวก่อกำเนิดไฟฟ้าหรือแบบเตอรี่ (Generator or battery) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E ทำให้เกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้า (electromotive force or e.m.f.) มีหน่วยเป็นโวลท์ (Volts)

2. ตัวต้านทาน (Resistor) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R ความต้านทานมีหน่วยเป็นโอห์ม (Ohms)

3. ขดลวดเหนี่ยวนำหรือตัวเหนี่ยวนำ (Inductor) เขียนแทนด้วนสัญลักษณ์ L การเหนี่ยวนำมีหน่วยเป็นเฮนรี (henrys)

4. ตัวเก็บประจุไฟฟ้า (Capacitor) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C ความจุมีหน่วยเป็นฟารัด (farads)

5. สวิทช์หรือสะพานไฟ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ K

ตามรูป 4.8 เมื่อเปิดสวิทช์ไฟ K ไฟฟ้าก็จะไหลครบวงจร ประจุไฟฟ้า Q ซึ่งมีหน่วยเป็นคูลอมบ์ (coulombs) จะไหลไปที่แผ่นเก็บประจุไฟฟ้า อัตราการไหลของประจุไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยเวลา นิยามเป็น $\frac{dQ}{dt} = I$ เรียกว่ากระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็นแอมแปร์ (amperes) เมื่อ t มีหน่วยเป็นวินาที

ปัญหาที่สำคัญคือการหาประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้า ซึ่งอยู่ในรูปของเวลา เพื่อแก้ปัญหาเหล่านี้จึงนิยามความต่างศักย์ (voltage drop) ที่ผ่านส่วนสำคัญของวงจรดังนี้

(1) ความต่างศักย์ เมื่อผ่านตัวต้านทาน $= RI = R\dfrac{dQ}{dt}$

(2) ความต่างศักย์ เมื่อผ่านขดลวดเหนี่ยวนำ $= L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$

(3) ความต่างศักย์ เมื่อผ่านตัวเก็บประจุ $= \dfrac{Q}{C}$

(4) ความต่างศักย์ เมื่อผ่านตัวก่อกำเนิดไฟฟ้า $= -E$

เพื่อช่วยให้แก้ปัญหาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้าได้ง่ายขึ้น จำเป็นต้องทราบกฎของเคอร์ชอฟฟ์ (kirchoff 's laws) ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

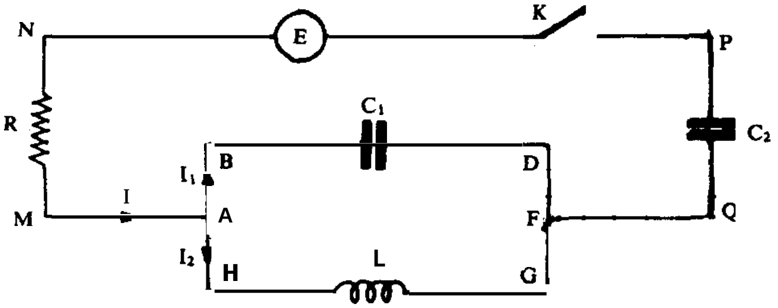
1. ผลรวมทางพีชคณิตของกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านจุดเชื่อม (junction point) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือกระแสไฟฟ้าเข้าเท่ากับกระแสไฟฟ้าออก

2. ผลรวมทางพีชคณิตของค่าความต่างศักย์รอบวงจรปิด จะมีค่าเท่ากับศูนย์

สำหรับวงจรตามรูป 4.8 ถ้านำมาประยุกต์ใช้กับกฎข้อที่สองของเคอร์ชอฟฟ์ จะพบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้หาค่าของ Q คือ

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

ในวงจรกรณีที่วงจรไฟฟ้าแบบเชิงซ้อน (complex electric circuits) ซึ่งแสดงตามรูป 4.9



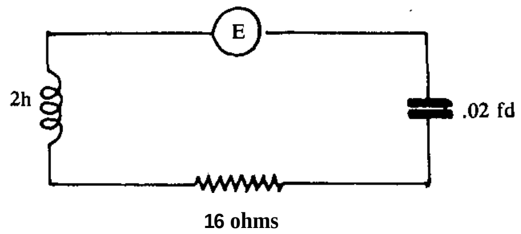
รูป 4.9

ถ้านำกฎของเคอร์ชอฟฟ์มาประยุกต์ใช้กับวงจรตามรูป 4.9 จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ ซึ่งต่อไปจะเรียกว่าระบบสมการ การแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบทำได้เหมือนกับตัวอย่างที่ 4.5

ตัวอย่างที่ 4.5 ขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 2 เฮนรี ตัวต้านทานขนาด 16 โอห์ม และตัวเก็บประจุไฟฟ้าขนาด 0.02 ฟารัด ต่อกันแบบอนุกรม มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า E โวลท์ ที่เวลา t = 0 ประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุไฟฟ้า และกระแสไฟฟ้าในวงจรมีค่าเป็นศูนย์ จงหาประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ $(t>0)$ ถ้ากำหนดให้

(ก) $E = 300$ โวลท์

(ข) $E = 100 \sin 3t$ โวลท์



รูป 4.10

วิธีทำ ให้ Q และ I คือประจุไฟฟ้า และกระแสไฟฟ้า ณ เวลา t ใด ๆ ใช้กฎเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0.02} = E \tag{4.18}$$

เพราะว่า $$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E \tag{4.19}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $Q(0) = 0,\ I(0) = Q'(0) = 0$

(ก) ถ้า $E = 300$ ดังนั้น (4.19) เขียนใหม่เป็น

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 50Q = 150 \tag{4.19}$$

ในการแปลงลาปลาซ แล้วแทนค่าเงื่อนไขจะได้

$$\{ s^2L\{Q\} - sQ(0) - Q'(0) \} + 8\{ sL\{Q\} - Q(0) \} + 25L\{Q\} = \frac{150}{s}$$

หรือ
$$L\{Q\} = \frac{150}{s(s^2+8s+25)}$$
$$= \frac{6}{s} - \frac{6s+48}{s^2+8s+25}$$
$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)+24}{(s+4)^2+9}$$
$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{24}{(s+4)^2+9}$$

ดังนั้น
$$Q = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t$$
$$I = \frac{dQ}{dt} = 50\,e^{-4t}\sin 3t$$

(ข) ถ้า $E = 100 \sin 3t$ ดังนั้น (4.19) เขียนใหม่เป็น

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \sin 3t$$

ใส่การแปลงลาปลาซ จะได้

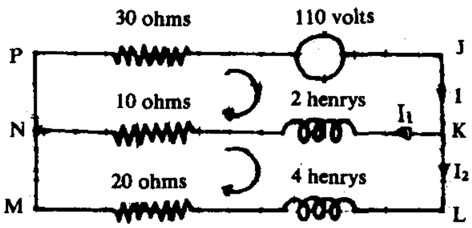
$$(s^2+8s+25)\,L\{Q\} = \frac{150}{s^2+9}$$
$$L\{Q\} = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$
$$= \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{(s+4)}{(s+4)^2+9}$$

ดังนั้น
$$Q = \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\cos 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos t$$
$$= \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\sin 3t)$$

และ
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$= \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\sin 3t + 6\cos 3t)$$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหากระแสไฟฟ้าในแต่ละสาขาตามรูป 4.11 ถ้ากระแสไฟฟ้าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์



รูป 4.11

วิธีทำ ในการพิจารณาค่าความต่างศักย์ในวงจรย่อยเหล่านี้ให้ใช้หลักดังนี้ ค่าความต่างศักย์เป็นลบเมื่อพิจารณาทวนกระแสไฟฟ้า และค่าความต่างศักย์เป็นบวกเมื่อพิจารณาตามกระแสไฟฟ้า

กำหนดให้ I เป็นกระแสไฟฟ้าในวงจร NPJK และกระแสไฟฟ้านี้แยกออกเป็น I_1 และ I_2 ที่จุดเชื่อม K ดังนั้น $I = I_1 + I_2$ ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่หนึ่งของเคอร์ชอฟฟ์

ประยุกต์ใช้กฎข้อที่สองของเคอร์ชอฟฟ์ กับวงจรย่อย KLMNK และ JKNPJ ตามลำดับ จะได้

$$-10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0$$

$$30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0$$

หรือ

$$-5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $I_1(0) = I_2(0) = 0$

ใส่การแปลงลาปลาซในระบบสมการ และใช้เงื่อนไขเริ่มต้นจะได้

$$-5i - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 = 0$$

$$\{ s i_1 - I_1(0) \} + 20 i_1 + 15 i_2 = \frac{55}{s}$$

เมื่อกำหนดให้ $i_1 = L\{ I_1 \}$ และ $i_2 = L\{ I_2 \}$

หรือ $$(s+5)\, i_1 - (2s+10)\, i_2 = 0$$

$$(s+20)\, i + 15 i_2 = \frac{55}{s}$$

จากสมการแรก $i_1 = 2i_2$ ดังนั้น สมการที่สองเขียนใหม่ได้เป็น

$$(2s+55)\, i_2 = \frac{55}{s}$$

หรือ $$i_2 = \frac{55}{s(2s+55)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

เพราะฉะนั้น $$I_2 = 1 - e^{-55/2t}$$

$$I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55/2t}$$

และ $$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55/2t}$$

แบบฝึกหัด 4.4

1. ขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 2 เฮนรี่ และความต้านทาน 10 โอห์ม ต่อกันแบบอนุกรมกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลท์ ถ้ากระแสไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t = 0$ จงหากระแสไฟฟ้าเมื่อสิ้นเวลา 0.1 วินาที
2. ใช้คำถามของข้อ 1 แต่เปลี่ยนแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 100 \sin 60t$
3. ถ้าความต้านทาน 2,000 โอห์ม และความจุ 5×10^{-6} ฟารัด ต่อกันแบบอนุกรมกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลท์ จงหากระแสไฟฟ้าที่เวลา $t = 0.1$ วินาที ถ้า $I(0) = 0.01$ แอมแปร์
4. จงแก้ปัญหาในข้อ 3 เมื่อเปลี่ยนแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E = 100 \sin 120\pi t$ โวลท์
6. ขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 1 เฮนรี่ และความต้านทาน 2 โอห์ม ต่อกันแบบอนุกรมกับแบบเตอรี่ ซึ่งมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $6e^{-0.0001t}$ โวลท์ กำหนดว่า ไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลเมื่อตอนเริ่มต้น อยากทราบว่าเมื่อใดจะวัดกระแสไฟฟ้าได้ 0.5 แอมแปร์
6. ให้ $L = 1$ เฮนรี่, $R = 100$ โอห์ม $C = 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 1,000$ โวลท์ ต่อกันแบบอนุกรม กำหนดว่าไม่มีประจุและกระแสไฟฟ้าไหลที่ $t = 0$ จงหากระแสไฟฟ้าและประจุไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$
7. ให้ $L = 2$ เฮนรี่ $R = 50$ โอห์ม $C = 3 \times 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 2,000$ โวลท์ มีข้อกำหนดเหมือนข้อ 6 จงหากระแสไฟฟ้าและประจุไฟฟ้าสำหรับทุกค่าของ $t \geqslant 0$
8. ให้ $L = 1$ เฮนรี่ $R = 100$ โอห์ม $C = 10^{-4}$ ฟารัด และ $E = 1,000 \sin 60t$ โวลท์ ต่อกันแบบอนุกรม กำหนดว่าไม่มีประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าไหลที่เวลา $t = 0$ จงหาประจุไฟฟ้า $Q(t)$ และกระแสไฟฟ้า $I(t)$ สำหรับ $t \geqslant 0$

Q. วงจรไฟฟ้าตามรูป 4.12

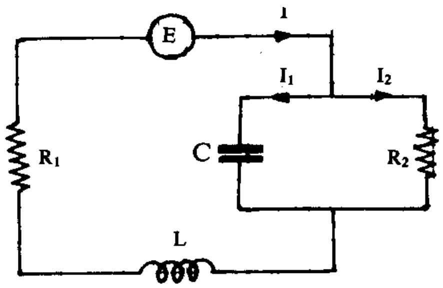
$E = 500 \sin 10t$

$R_1 = 10$ โอห์ม

$R_2 = 10$ โอห์ม

$L = 1$ เฮนรี่

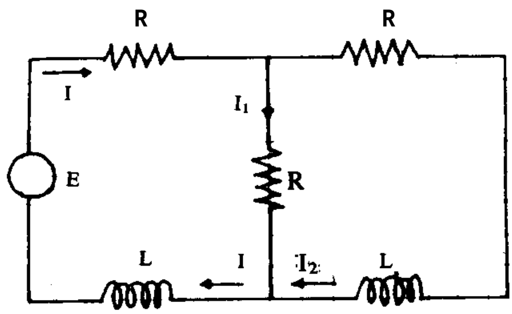
$C = 0.01$ ฟารัด



รูป 4.12

ถ้าประจุไฟฟ้าในตัวเก็บประจุ และกระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $t = 0$ จงหาประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$

10. จงหากระแสไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ ในแต่ละวงจรย่อย ตามรูป 4.13 กำหนดว่า $E = 10 \sin t$ โวลท์ $R = 10$ โอห์ม และ $L = 10$ เฮนรี่



รูป 4.13

คำตอบแบบฝึกหัด 4.4

1. $I(0.1) = 3.93$ แอมแปร์

2. $I(0.1) = -0.31$ แอมแปร์

3. $I(0.1) = 10^{-2}e^{-10}$ แอมแปร์

4. $I(0.1) = 0.01 + 600\pi(1-e^{-10})/[(100)^2 + (120\pi)^2]$

6. $Q(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10\sqrt{3}}e^{-50t}(\sin 50\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos 50\sqrt{3}t)$

$I(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-50t}\sin 50\sqrt{3}\ t$

7. $I(t) = \frac{80\sqrt{87}}{29}e^{-25/2t}\sin\frac{25\sqrt{87}}{6}t$

$Q(t) = \frac{3}{5} - \frac{87}{145}e^{-25/2t}\cos\frac{25\sqrt{87}}{6}t - \frac{3\sqrt{87}}{145}e^{-25/2t}\sin\frac{25\sqrt{87}}{6}t$

8. $I(t) = \frac{-e^{-50t}}{481}(2400\cos 50\sqrt{3}\ t + 1700\sqrt{3}\sin 50\sqrt{3}\ t)$

$+\frac{2400\cos 60\ t + 2250\sin 60\ t}{481}$

$Q(t) = \frac{e^{-50t}}{962}(75\cos 50\sqrt{3}\ t - 7\sqrt{3}\sin 50\sqrt{3}\ t) + \frac{80\sin 60\ t - 75\cos 60\ t}{962}$

9. $Q(t) = \sin 10\ t - 2\cos 10\ t + e^{-10t}(\sin 10\ t + 2\cos 10\ t)$

10. $I_1 = \frac{1}{20}(8\sin t - 6\cos t + 5e^{-t} + e^{-3t})$

$I_2 = \frac{1}{20}(2\sin t - 4\cos t + 5e^{-t} - e^{-3t})$

4.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (The partial differential equation)

กำหนดให้ u(x, t) นิยามบนช่วง $a \leqslant x \leqslant b, t > 0$ ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, 0) \qquad (4.20)$$

และ

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}U(x, s) \qquad (4.21)$$

เมื่อ $u = u(x, t)$ และ $L\{u(x, t)\} = U(x, s)$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{p \to \infty} \int_0^P e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \lim_{p \to \infty}\left\{ e^{-st}u(x, t)\Big|_0^P + s\int_0^P u(x, t)\,e^{-st}\,dt\right\}$$

$$= s\int_0^\infty u(x, t)\,e^{-st}\,dt - u(x, 0)$$

$$= sL\{u(x, t)\} - u(x, 0)$$

$$= s\,U(x, s) - u(x, 0)$$

ช.ต.พ.

และ

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}e^{-st}\,dt$$

ใช้กฎของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's rule) สำหรับการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายอินทิกรัล จะได้

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty u\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}U(x, s)$$

ช.ต.พ.

ถ้ากำหนดให้ $u = u(x, t)$ และ $L\{u(x, t)\} = U(x, s)$ ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \qquad (4.22)$$

และ
$$L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2}{dx^2}U(x, s) \qquad (4.23)$$

เมื่อ
$$u_t(x, 0) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$$

พิสูจน์ สมมุติให้ $v = v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} &= L\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} \\ &= sL\{v\} - v(x, 0) \\ &= s[sL\{u\} - u(x, 0)] - u_t(x, 0) \\ &= s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \end{aligned}$$

ช.ต.พ.

สมมุติให้ $w = w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$ และ $L\{w(x, t)\} = W(x, s)$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= L\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} \\ &= \frac{d}{dx}W(x, s) \\ &= \frac{d}{dx}L\{w(x, t)\} \\ &= \frac{d}{dx}L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}U(x, s)\right) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}U(x, s) \end{aligned}$$

จากสมการ (4.20), (4.21), (4.22) และ 4.23) สามารถนำไปใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.9 จงแก้สมการ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ซึ่งมีเงื่อนไขเป็น $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 3 \sin 2\pi x$ เมื่อ $0 < x < 1$ และ $t > 0$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซลงในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแล้วใช้สมการ (4.20) และ (4.23) จะได้

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$

$$sU(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2}{dx^2} U(x,s)$$

กำหนดให้ $U = U(x,s)$ แทนค่าเงื่อนไข $u(x,0)$ ลงในสมการ ดังนั้น

$$sU - 3\sin 2\pi x = \frac{d^2U}{dx^2}$$

หรือ
$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = -3\sin 2\pi x \tag{4.24}$$

คำตอบทั่วไป (General solution) ของสมการ (4.24) คือ

$$U = U_c + U_p \tag{4.25}$$

จากสมการ (4.24) ถ้าแทนค่าด้านขวามือของสมการเป็นศูนย์ ดังนั้นคำตอบเติมเต็ม (Complementary solution) คือ

$$U_c = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} \tag{4.26}$$

สมมุติให้คำตอบเฉพาะ (Particular solution) ของสมการ (4.24) คือ

$$U_p = A \sin 2\pi x \tag{4.27}$$

แทนค่า สมการ (4.27) ใน สมการ (4.24) จะได้

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[A \sin 2\pi x\right] - sA \sin 2\pi x = -3\sin 2\pi x$$

$$-4A\pi^2 \sin 2\pi x - sA \sin 2\pi x = -3\sin 2\pi x$$

$$-(s+4\pi^2) A \sin 2\pi x = -3 \sin 2\pi x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A = \frac{3}{s+4\pi^2} \tag{4.28}$$

แทนค่า A ลงใน สมการ (4.27) ดังนั้น

$$U_p = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x \tag{4.29}$$

แทนค่า U_c, U_p ลงในสมการ (4.25) จะได้คำตอบทั่วไป

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x \tag{4.30}$$

ใส่การแปลงลาปลาซของเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ซึ่งเกี่ยวข้องกับ t จะได้

$L\{u(0,t)\} = U(0,s) = 0$ และ

$$L\{u(1,t)\} = U(1,s) = 0 \tag{4.31}$$

แทนค่า x=0 ในสมการ (4.30) แล้วใช้เงื่อนไขแรกในสมการ (4.31) จะได้

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4.32}$$

แทนค่า x=1 ในสมการ (4.30) แล้วใช้เงื่อนไขที่สอง ในสมการ (4.31) จะได้

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \tag{4.33}$$

จากสมการ (4.32) และ (4.33) แก้สมการ จะได้ $c_1=0$ และ $c_2=0$ ดังนั้น สมการ (4.30) กลายเป็น

$$U(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x \tag{4.34}$$

ใส่การแปลงลาปลาซผกผัน จะได้คำตอบ

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x \tag{4.35}$$

ปัญหาตัวอย่างนี้มีการอธิบายทางกายภาพที่น่าสนใจ ถ้าพิจารณาของแข็งมีขอบเขตโดยมีหน้าตัดเป็น x = 0 และ x = 1 สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

คือสมการการนำความร้อน (equation for heat conduction) ในของแข็งนี้ เมื่อ u = u(x, t) เป็นอุณหภูมิที่หน้าตัด x ที่เวลา t ใด ๆ และ k เป็นค่าคงที่เรียกว่า "สภาพการแพร่กระจาย (diffusivity) ซึ่งจะขึ้นกับวัตถุของของแข็ง เงื่อนไขของ u(0, t) = 0 และ u(1, t) = 0 แสดงว่าอุณหภูมิที่ x = 0 และ x = 1 ถูกทำให้มีอุณหภูมิเป็นศูนย์ ขณะที่

$u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$ แทนอุณหภูมิเริ่มต้นทุกแห่งใน $0 < x < 1$ ดังนั้น ผลจาก (4.35) คือ อุณหภูมิทุกแห่งในของแข็งที่เวลา $t > 0$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + 20 \sin x \tag{4.36}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเป็น

$$y(0,t) = 0 \;,\; y(\pi,t) = 16\pi \;,\; y_t(x,0) = 0$$

และ $$y(x,0) = 16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$$

วิธีทำ ใส่การแปลงลาปลาซลงในสมการ (4.36) แล้วใช้สมการ (4.22) และ (4.23) จะได้

$$L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} - 4L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + L\{y\} = L\{16x\} + L\{20 \sin x\}$$

$$s^2Y(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0) - 4\frac{d^2}{dx^2}Y(x,s) + Y(x,s)$$
$$= \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s} \tag{4.37}$$

เมื่อ $L\{y(x,t)\} = Y(x,s) = Y$

แทนค่าเงื่อนไข $y(x,0)$ และ $y_t(x,0)$ ลงในสมการ (4.37) จะได้

$$s^2Y - s(16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x) - 4\frac{d^2}{dx^2}Y + Y$$
$$= \frac{16x}{s} + \frac{20 \sin x}{s}$$

หรือ $$\frac{d^2}{dx^2}Y - \frac{1}{4}(s^2+1)Y = \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5 \sin x}{s} - 3s \sin 2x + 2s \sin 3x \tag{4.38}$$

ใส่การแปลงลาปลาซในเงื่อนไขที่เหลือ

$$L\{y(0,t)\} = Y(0,s) = 0 \text{ และ}$$

$$L\{y(\pi,t)\} = Y(\pi,s) = \frac{16\pi}{s} \tag{4.39}$$

สมมุติคำตอบเฉพาะของสมการ (4.38) คือ

$$Y_p = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x \tag{4.40}$$

แทนค่า (4.40) ลงใน (4.38) จะได้

$$-b\sin x - 4c\sin 2x - 9d\sin 3x - \frac{1}{4}(s^2+1)\,[ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x]$$

$$= \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\sin x}{s} - 3s\sin 2x + 2s\sin 3x$$

หรือ $-\frac{1}{4}(s^2+1)ax - \left[1+\frac{(s^2+1)}{4}\right] b\sin x - \left[4+\frac{(s^2+1)}{4}\right] c\sin 2x - \left[9+\frac{(s^2+1)}{4}\right] d\sin 3x$

$$= \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\sin x}{s} - 3s\sin 2x + 2s\sin 3x$$

$$-\frac{1}{4}(s^2+1)ax - \frac{(s^2+5)}{4} b\sin x - \frac{(s^2+17)}{4} c\sin 2x - \frac{(s^2+37)}{4} d\sin 3x$$

$$= \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\sin x}{s} - 3s\sin 2x + 2s\sin 3x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$a = \frac{16}{s}, \qquad b = \frac{20}{s(s^2+5)}$$

$$c = \frac{12s}{s^2+17} \quad \text{และ} \quad d = \frac{-8s}{s^2+37}$$

แทนค่า a, b, c และ d ลงใน (4.40) ดังนั้น

$$Y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20}{s(s^2+5)}\sin x + \frac{12s}{s^2+17}\sin 2x - \frac{8s}{s^2+37}\sin 3x \tag{4.41}$$

จากสมการ (4.38) แทนค่าด้านขวามือเป็นศูนย์ ดังนั้น คำตอบเติมเต็ม คือ

$$Y_c = c_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} \tag{4.42}$$

เพราะฉะนั้นคำตอบทั่วไปของ (4.38) คือ

$$Y = Y_c + Y_p$$

$$+ \frac{16x}{s} + \frac{20}{s(s^2+5)}$$

$$+ \frac{12s}{s^2+17} \sin 2x - \frac{8s}{s^2+37} \sin 3x \qquad (4.43)$$

แทนค่า เงื่อนไข (4.39) ลงใน (4.43) จะได้

$$c_1 + c_2 = 0$$

แก้สมการทั้งสองจะได้ $c_1 = c_2 = 0$ ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ

$$Y = \frac{16x}{s} + \frac{20}{s(s^2+5)} \sin x + \frac{12s}{s^2+17} \sin 2x - \frac{8s}{s^2+37} \sin 3x$$

ใส่การแปลงลาปลาซผกผัน จะได้คำตอบเป็น

$$y(x,t) = 16x + 4(1-\cos\sqrt{5}\,t) \sin x + 12 \cos\sqrt{17}\,t \sin 2x - 8 \cos\sqrt{37}\,t \sin 3x$$

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงแก้สมการ $\frac{\partial u}{at} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u(0, t) = 0, u(5, t) = 0, u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$

2. จงแก้แบบฝึกหัดข้อ 1 ถ้า $u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x$

3. จงแก้สมการ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$y(0, t) = 0, y(2, t) = 0, y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$

4. จงแก้สมการ $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u_x(0, t) = 0, u(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ ถ้า

(ก) $u(x, 0) = 30 \cos 5x$

(ข) $u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

5. จงหาคำตอบของสมการ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$y_x(0, t) = 0, y(3, t) = 0, y(x, 0) = 0$

$y(x, 0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x$

6. จงหาคำตอบมีขอบเขต $y(x, t), 0 < x < 1, t > O$ ของปัญหาค่าขอบ

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} = 1 - e^{-t}$$

และ $y(x, 0) = x$

7. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad x>0,\ t>0$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$y(0, t) = 10 \sin 2t,\ y(x, 0) = 0,\ y_t(x, 0) = 0$$

และ $\lim_{x \to \infty} y(x, t) = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.5

1. $u(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x$

2. $u(x, t) = e^{-32\pi^2 t} \sin 4nx - 5e^{-72\pi^2 t} \sin 6\pi x$

3. $y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6nt - 10 \sin 5\pi x \cos 15 nt$

4. (ก) $u(x, t) = 30e^{-75t} \cos 5x$

   (ข) $u(x, t) = 20e^{-27t} \cos 3x - 5e^{-243t} \cos 9x$

5. $y(x, t) = 12 \cos \pi x \sin 4\pi t + 16 \cos 3\pi x \sin 12\pi t - 8 \cos 5\pi x \sin 20\pi t$

6. $y(x, t) = x + 1 - e^{-t}$