ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์ (Heaviside's expansion theorems)

ทฤษฎีบท 3-9 ถ้า $f(t) = L^{-1}\{\frac{p(s)}{q(s)}\}$ เมื่อ p(s) และ q(s) เป็นพหุนาม และระดับขั้นของ q(s) มากกว่าระดับขั้นของ p(s) ดังนั้นพจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบเชิงเส้นแบบไม่ซ้ำ (s – a) ของ q(s) คือ

$$\frac{p(a)}{q'(a)}e^{at} = \frac{p(a)}{Q(a)}e^{at}$$

เมื่อ Q(s) คือผลคูณของทุกตัวประกอบของ q(s) ยกเว้น (s – a)

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{s-a} + h(s)$$

เมื่อ h(s) คือผลรวมของเศษส่วนย่อยที่เหลือของตัวประกอบ q(s) ยกเว้น (s – a) เพราะว่า (s – a) เป็นตัวประกอบแบบไม่ซ้ำ คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\frac{(s-a)\,p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{q(s)/(s-a)}$$

$$= A + (s-a)\,h(s)$$

ใส่ลิมิตเมื่อ s เข้าใกล้ a พจน์ที่สองทางขวามือจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$A = \lim_{s\to a}\frac{p(s)}{\frac{q(s)}{(s-a)}} = \frac{\lim\limits_{s\to a} p(s)}{\lim\limits_{s\to a}\frac{q(s)}{(s-a)}}$$

สำหรับลิมิตของเศษหาค่าได้ แต่ลิมิตของส่วนเมื่อแทน $s\to a$ ทำให้ค่าของลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) ดังนั้น ถ้าใช้กฎโลปิตาล (L' Hospital rule) หาค่าของลิมิตจะได้

$$A = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

เพราะว่า $$A = \lim_{s \to a} \frac{p(s)}{\frac{q(s)}{(s-a)}} = \frac{p(a)}{Q(a)}$$

ขั้นสุดท้ายใส่การแปลงลาปลาซผกผันของพจน์ $\frac{A}{s-a}$ จะได้

$$Ae^{at} = \frac{p(a)}{q'(a)} e^{at} = \frac{p(a)}{Q(a)} e^{at}$$ ซ.ต.พ.

ทฤษฎีบทแทรก 3-9 ถ้า $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$ และ $q(s)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้น แบบไม่ซ้ำ

$(s-a_1), (s-a_2), \ldots, (s-a_n)$

ดังนั้น

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} e^{a_i t} = \frac{p(a_i)}{Q(a_i)} e^{a_i t}$$

เมื่อ $Q_i(a_i)$ คือผลคูณของทุกตัวประกอบ $q(s)$ ยกเว้นตัวประกอบ $(s-a_i)$

จากทฤษฎีบท 3–9 และบทแทรกทฤษฎีบท 3–9 สามารถเขียนแบบง่าย ๆ ได้ดังนี้

ถ้า $$L\{f(t)\} = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)}$$

เมื่อ $a_i \neq a_j$ สำหรับ $i \neq j$ ดังนั้น

$$f(t) = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + \ldots + A_n e^{a_n t}$$

เมื่อ

$$A_i = \left. \frac{p(s)}{(s-a_1)\ldots(s-a_{i-1})(s-a_{i+1})\ldots(s-a_n)} \right|_{s=a_i}$$

ตัวอย่างที่ 3.17 ถ้า $L\{f(t)\} = \frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}$ จงหาค่าของ $f(t)$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 3–9

รากของ $s(s+1)(s+2)$ คือ $0, -1$ และ -2

$$p(s) = s^2+2 \text{ และ } q(s) = s(s+1)(s+2)$$

$$q'(s) = 3s^2+6s+2$$

ดังนั้น

เมื่อ $s = 0 \ , \ p(0) = 2 \ , \ q'(0) = 2$

$s = -1 \ , \ p(-1) = 3 \ , \ q'(-1) = -1$

$s = -2 \ , \ p(-2) = 6 \ , \ q'(-2) = 2$

จากทฤษฎีบทแทรก 3–9 จะได้

$$f(t) = \frac{2}{2}e^{(0)t} + \frac{3}{(-1)}e^{(-1)t} + \frac{6}{2}e^{(-2)t}$$

$$= 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$$

ทฤษฎีบท 3-10 ถ้า $f(t) = L^{-1}\{\frac{p(s)}{q(s)}\}$ เมื่อ $p(s)$ และ $q(s)$ เป็นพหุนามและระดับขั้นของ $q(s)$ มากกว่าระดับขั้นของ $p(s)$ ดังนั้นพจน์ใน $f(t)$ ที่สมนัยกับตัวประกอบเชิงเส้นแบบซ้ำ $(s-a)^r$ ใน $q(s)$ คือ

$$e^{at}\{\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\cdot\frac{t}{1!} + \dots + \frac{\phi'(a)}{1!}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{\phi(a)t^{r-1}}{(r-1)!}\}$$

เมื่อ $\phi(s)$ คือผลหารของ p(s) กับทุกตัวประกอบของ q(s) ยกเว้นตัวประกอบ $(s-a)^r$

พิสูจน์

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)^r} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_{r-1}}{(s-a)^{r-1}} + \frac{A_r}{(s-a)^r} + h(s)$$

เมื่อ h(s) คือผลรวมของเศษส่วนย่อยที่เหลือของตัวประกอบ q(s) ยกเว้นตัวประกอบ $(s-a)$

เอา $(s-a)^r$ คูณตลอดสมการ

$$\phi(s) = A_1(s-a)^{r-1} + A_2(s-a)^{r-2} + \ldots + A_{r-1}(s-a)$$

$$+ A_r + (s-a)^r h(s)$$

แทนค่า s = a จะได้

$$\phi(a) = A_r$$

หาอนุพันธ์ของ $\phi(s)$

$$\phi'(s) = A_1(r-1)(s-a)^{r-2} + A_2(r-2)(s-a)^{r-3} + \ldots +$$

$$A_{r-1} + \{ r(s-a)^{r-1} h(s) + (s-a)^r h'(s) \}$$

แทนค่า s = a จะได้

$$\phi'(a) = A_{r-1}$$

หาอนุพันธ์อันดับสองของ $\phi(s)$

$$\phi''(s) = A_1(r-1)(r-2)(s-a)^{r-3} + A_2(r-2)(r-3)(s-a)^{r-4}$$

$$+ \ldots + 2A_{r-2} + \{r(r-1)(s-a)^{r-2}h(s)$$

$$+ r(s-a)^{r-1}h'(s)\} + \{r(s-a)^{r-1}h'(s)$$

$$+ (s-a)^r h''(s)\}$$

แทนค่า s = a จะได้

$$\phi''(a) = 2A_{r-2} = 2!\,A_{r-2}$$

ทำแบบนี้ไปเรื่อย ๆ สังเกตว่าถ้าหาอนุพันธ์ $r-1$ ครั้ง ผลคูณของ $(s-a)^r h(s)$ จะหายไป เมื่อแทนค่า s = a ดังนั้นจะได้

$$\phi'''(a) = 3!A_{r-3}$$

$$\phi^{IV}(a) = 4!A_{r-4}$$

....

....

$$\phi^{(r-1)}(a) = (r-1)!A_1$$

หรือเขียนในรูปทั่วไป

$$A_{r-k} = \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, r-1$$

นั่นคือการกระจายพจน์ของ $\frac{p(s)}{q(s)}$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s-a)^r$ คือ

$$\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{(s-a)} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\cdot\frac{1}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{\phi'(a)}{1!}\cdot\frac{1}{(s-a)^{r-1}} + \phi(a)\frac{1}{(s-a)^r}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซผกผันของพจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s-a)^r$ คือ

$$\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}e^{at} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\frac{te^{at}}{1!} + \ldots + \frac{@'(a)}{1!}\frac{t^{r-2}e^{at}}{(r-2)!} + @(a)\frac{t^{r-1}e^{at}}{(r-1)!}$$

$$= \left\{\frac{\phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} + \frac{\phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\frac{t}{1!} + \ldots + \frac{\phi'(a)}{1!}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{\phi(a)\,t^{r-1}}{(r-1)!}\right\}e^{at}$$

ซ.ต.พ.

จากทฤษฎีบท 3–10 กรณีตัวประกอบ $(s-a)^r$ ซ้ำกัน r ครั้ง สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

ถ้า $$L\{f(t)\} = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)^r}$$

$$= \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r} + h(s)$$

ดังนั้น $$f(t) = e^{at}\left[A_1 + A_2\frac{t}{1!} + \ldots + A_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right] + L^{-1}\{h(s)\}$$

เมื่อ $$\boxed{A_i = \frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{ds^{r-1}}[\phi(s)]\Big|_{s=a}} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, r$$

ทฤษฎีบท 3·11 ถ้า $f(t) = L^{-1}\{\frac{p(s)}{q(s)}\}$ เมื่อ p(s) และ q(s) เป็นพหุนามและระดับขั้นของ q(s) มากกว่า p(s) ดังนั้นพจน์ใน f(t) ซึ่งสมนัยกับพจน์ไม่ซ้ำของตัวประกอบเชิงซ้อน $(s+a)^2+b^2$ ของ q(s) คือ

$$\frac{e^{-at}}{b}\left(\phi_i \cos bt + \phi_r \sin bt\right)$$

เมื่อ ϕ_r และ ϕ_i คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพ (real and imaginary parts) ของ $\phi(-a+ib)$ ตามลำดับ และ $\phi(s)$ คือผลหารของ p(s) กับทุกตัวประกอบของ q(s) ยกเว้นตัวประกอบ $(s+a)^2+b^2$

พิสูจน์ ให้ h(s) คือผลรวมของเศษส่วนย่อยของตัวประกอบอื่น ๆ ของ q(s) ยกเว้นตัวประกอบ $(s+a)^2+b^2$ ดังนั้น

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{As+B}{(s+a)^2+b^2} + h(s) = \frac{\phi(s)}{(s+a)^2+b^2}$$

เอา $(s+a)^2+b^2$ คูณตลอดสมการจะได้

$$\phi(s) = As+B+[(s+a)^2+b^2]\,h(s)$$

แทนค่า $s = -a+bi$ ทำให้ $(s+a)^2+b^2$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นผลคูณของพจน์ที่สองทางขวามือจะหายไป

$$\phi(-a+bi) = (-a+bi)\,A+B$$

เขียน $\phi(-a+bi)$ ให้อยู่ในรูปมาตรฐานแบบเชิงซ้อน จะได้

$$\phi(-a+bi) = \phi_r + i\phi_i$$

ดังนั้น $\quad \phi_r + i\phi_i = -aA+B+ibA$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\phi_r = -aA+B \text{ และ } \phi_i = bA$$

แก้สมการหาค่า A และ B

$$A = \frac{\phi_i}{b}$$

$$B = \frac{b\phi_r + a\phi_i}{b}$$

ดังนั้นเศษส่วนย่อยซึ่งสมนัยกับตัวประกอบกำลังสอง $(s+a)^2+b^2$ คือ

$$\frac{As+B}{(s+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\,\frac{\phi_i s+(b\phi_r+a\phi_i)}{(s+a)^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{b}\left\{\frac{(s+a)\phi_i+b\phi_r}{(s+a)^2+b^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{(s+a)\phi_i}{(s+a)^2+b^2}+\frac{b\phi_r}{(s+a)^2+b^2}\right]$$

ดังนั้นพจน์ใน $f(t)$ ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบกำลังสอง $(s+a)^2+b^2$

คือ $L^{-1}\left\{\frac{As+B.}{(s+a)^2+b^2}\right\}$

$$= \frac{1}{b}\left[\phi_i e^{-at}\cos bt+\phi_r e^{-at}\sin bt\right]$$

$$= \frac{e^{-at}}{b}\left[\phi_i\cos bt+\phi_r\sin bt\right]$$ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.18 ถ้า $L\{y\} = \frac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}$ จงหาค่าของ y

วิธีทำ พิจารณาในกรณีตัวประกอบเชิงเส้นแบบซ้ำ $(s+2)^2$ โดยใช้ทฤษฎีบท 3-10 จะได้

$$\phi(s) = \frac{s}{s^2+2s+10} \qquad r = 2$$

$$\phi'(s) = \frac{-s^2+10}{(s^2+2s+10)^2}$$

แทนค่า $s = -2$

$$\phi(-2) = -\frac{1}{5}, \quad \phi'(-2) = \frac{3}{50}$$

ดังนั้น พจน์ของ y ซึ่งสมนัยกับตัวประกอบ $(s+2)^2$ คือ

$$e^{-2t}\left\{\frac{3}{50}+\left(-\frac{1}{5}\right)t\right\} = \frac{e^{-2t}(3-10t)}{50}$$

สำหรับตัวประกอบกำลังสอง $s^2+2s+10 = (s+1)^2+3^2$ ใช้ทฤษฎีบท 3–11 จะได้

$$\phi(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$$

แทนค่า $s = -1+3i$

$$\phi(-1+3i) = \frac{-1+3i}{\{(-1+3i)+2\}^2}$$

$$= \frac{-1+3i}{(1+3i)^2}$$

$$= \frac{-1+3i}{-8+6i}\frac{(-8-6i)}{(-8-6i)}$$

$$= \frac{13-9i}{50}$$

นั่นคือ $\phi_r = \frac{13}{50}$ และ $\phi_i = \frac{-9}{50}$ ดังนั้นพจน์ใน y ที่สมนัยกับตัวประกอบ $s^2+2s+10$ คือ

$$= \frac{1}{3}\left\{-\frac{9}{50}e^{-t}\cos 3t+\frac{13}{50}e^{-t}\sin 3t\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{e^{-t}(-9\cos 3t+13\sin 3t)}{50}\right\}$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$y = \frac{(3-10t)e^{-2t}}{50}+\frac{e^{-t}(-9\cos 3t+13\sin 3t)}{150}$$

3.8.2 การใช้วิธีระคนโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ผ่านมา

3.8.3 การใช้ตาราง (use of tables) ดูจากตารางท้ายเล่ม

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาค่าการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $\frac{3}{s+4}$

(ข) $\frac{1}{2s-5}$

(ค) $\frac{8s}{s^2+16}$

(ง) $\frac{3s-12}{s^2+8}$

(จ) $\frac{2s-5}{s^2-9}$

(ฉ) $\frac{s+1}{s^{4/3}}$

2. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{(\frac{\sqrt{s}-1}{s})^2\}$

(ข) $L^{-1}[\frac{2s+1}{s(s+1)}]$

3. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{3s-2}{4s^2+25}\}$

(ข) $L^{-1}[\frac{5s+10}{9s^2-16}]$

4. จงหาค่าของ

(n) $L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{3s-2}{s^{5/2}}-\frac{7}{3s+2}\}$

5. จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{3(s^2-1)^2}{2s^5}+\frac{4s-18}{9-s^2}-\frac{(s+1)\ (2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\}$

6. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{3s-14}{s^2-4s+8}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{8s+20}{s^2-12s+32}\}$

7. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{5s-2}{3s^2+4s+8}\}$

8. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\}$

(ค) $L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^{1/2}}\}$

9. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\}$

10. จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\}$

11. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\ln(\frac{s+2}{s+1})\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s+2}{s+1})\}$

12. จงหาค่าของ $L^{-1}\{\tan^{-1}(\frac{2}{s^2})\}$

13. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{1}{s^3(s+1)}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\}$

(ค) $L^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)^3}\}$

14. จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^5(s+2)}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{s}{(s-2)^5(s+1)}\}$

15. ถ้า $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ จงแสดงว่า

(ก) $L^{-1}\{sF'(s)\} = -t f'(t) - f(t)$

(ข) $L^{-1}\{sF''(s)\} = t^2 f'(t) + 2t f(t)$

(ค) $L^{-1}\{s^2 F''(s)\} = t^2 f''(t) + 4tf'(t) + 2f(t)$

16. จงแสดงว่า

$$L^{-1}\{s^2F'(s) + f(0)\} = -tf''(t) - 2f'(t)$$

จากข้อ 17–22 จงใช้ทฤษฎีบทผลการประสานหาค่าของ

17. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$

(ข) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$

18. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

19. $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

20. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$

(ข) $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$

21. จงแสดงว่า

$1*1*1*\ldots*1$ (1 มี n ตัว) $= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

22. จงแสดงว่า

$$\int_0^t \sin u \cos(t-u)\,du = \frac{1}{2}t \sin t$$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.1

1) (n) $3e^{-4t}$

(ข) $\frac{1}{2}e^{5t/2}$

(ค) $8 \cos 4t$

(ง) $3 \cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2} \sin 2\sqrt{2}t$

(จ) $2 \cos h(3t) - \frac{5}{3} \sin h(3t)$

(ฉ) $(t^{-2/3} + 3t^{1/3})/\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

2) (fl) $1 + t - \frac{4t^{1/2}}{\text{hi}}$

(u) $1 + e^{-t}$

3) (ก) $\frac{3}{4} \cos \frac{5t}{2} - \frac{1}{5} \sin \frac{5t}{2}$

(ข) $\frac{5}{9} \cos h \left(\frac{4t}{3}\right) + \frac{5}{6} \sin h \left(\frac{4t}{3}\right)$

4) (fl) $3 \cos 2t - 4 \sin 2t - 4 \cos h\,(4t) + 6 \sin h\,(4t)$

(ข) $\frac{6t^{1/2}}{\text{hi}} - \frac{8t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{7}{3} e^{-2t/3}$

5) $\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 + \frac{4t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{8t^{3/2}}{3G} - 4 \cos h(3t) + 6 \sin h(3t)$

6) (ก) $e^{2t}(3 \cos 2t - 4 \sin 2t)$

(ข) $2e^{6t}(4 \cos h(2t) + 7 \sin h(2t) = 11e^{8t} - 3e^{4t}$

7) (ก) $\frac{3}{4} e^{-3t/2} - \frac{5}{8} t\, e^{-3t/2}$

(ข) $\frac{e^{-2t/3}}{15} \left\{ 25 \cos \frac{2\sqrt{5}t}{3} - 8\sqrt{5} \sin \frac{2\sqrt{5}t}{3} \right\}$

8) (ก) $(t-2)\,u(t-2)$

(ข) $4\sin 2(t-3)\,u(t-3)$

(ค) $(t-1)^{-1/2}\,u(t-1)/\sqrt{\pi}$

9) (ก) $\{2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)}\}\,u(t-2)$

(ข) $\frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3)\,u(t-3)$

10) $\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$

11) (ก) $(e^{-t} - e^{-2t})/t$

(ข) $\int_0^t \frac{e^{-u} - e^{2u}}{u}\,du$

12) $\frac{2\sin t\,\sin h(t)}{t}$

13) (ก) $1 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}$

(ข) $\frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}$

(ค) $1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)$

14) (ก) $\frac{e^t}{72}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right) - \frac{e^{-2t}}{243}$

(ข) $e^{2t}\left(\frac{t^4}{36} - \frac{t^3}{54} + \frac{t^2}{54} + \frac{t}{81} - \frac{1}{243}\right) + \frac{e^{-t}}{243}$

17) (ก) $\frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-3t})$

(ข) $\frac{1}{16}(e^{2t} - e^{-2t} - 4t\,e^{-2t})$

18) $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$

19) $\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$

20) (ก) $\frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t - 3t\cos t\}$

(ข) $\frac{1}{64}t(\sin 2t - 2t\cos 2t)$

แบบฝึกหัด 3.2

จงใช้การแยกเศษส่วนย่อย หาค่าของ

1. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$

   (ข) $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\}$

2. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$

   (ข) $L^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+s}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$

3. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$

   (ข) $L^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$

4. $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

5. (ก) $L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$

   (ข) $L^{-1}\left\{\frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$

6. $L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$

7. $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$

8. $L^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$

จงใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์ หาค่าของ

9. $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$ เปรียบเทียบกับข้อ 4

10. $L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$ เปรียบเทียบกับข้อ 6

11. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$ เปรียบเทียบกับข้อ 7

12. (ก) $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$

(ข) $L^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$

13. $L^{-1}\left\{\dfrac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2

1. (ก) $5e^{3t} - 2e^{-2t}$

(ข) $1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$

2) (ก) $\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{3}e^{-2t/3}$

(ข) $5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t/2} + 2e^{-t}$

3) (ก) $3e^{-4t} - 3\cos 3t$

(ข) $\frac{1}{2}\sin 4t + \cos 2t - \sin 2t$

4) $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t - 3\sin t) - \frac{4}{5}e^{-3t}$

5) (ก) $\frac{1}{2}(2t-1)e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

(ข) $(5t+3)e^{-2t} - 2t\,e^{2t}$

6) $\frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\cos 2t + \frac{9}{25}e^{-t}\sin 2t$

7) $\frac{1}{2}\sin t\ \sin h(t)$

8) $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - te^{-t}$

12. (ก) $(3t-2)e^{t} + 4e^{-3t}$

(ข) $t(e^{-t} - e^{-2t})$

13) $(2t^2 - t + 5)e^{2t} + 6e^{-2t}$

แบบฝึกหัดระคน

1. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$

2. จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$

3. จงหาค่าของ $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

คำตอบแบบฝึกหัดระคน

1) $\frac{1}{3}\left\{e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

2) $\{1 - \cos(t-1)\}u(t-1) - \{1-\cos(t-2)\}u(t-2)$

3) $\frac{\pi}{2}$