บทที่ 3
การแปลงลาปลาซผกผัน (The Inverse Laplace transform)

3.1 นิยามการแปลงลาปลาซผกผัน (Definition of inverse Laplace transform)

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) คือ F(s) นั่นคือ ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น f(t) ถูกเรียกว่า "การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s)" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{3.1}$$

และเรียก L^{-1} ว่า การดำเนินการแปลงลาปลาซผกผัน (The inverse Laplace transformation operation)

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาค่าของ

(ก) $L^{-1}\{\frac{1}{s+3}\}$

(ข) $L^{-1}\{\frac{1}{s^4}\}$

วิธีทำ

(ก) เพราะว่า

$$L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$

ดังนั้น เขียนใหม่ได้เป็น

$$L^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} = e^{-3t}$$

(ข) เพราะว่า

$$L\{t^3\} = \frac{3!}{s4}$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\{\frac{3!}{s^4}\} = t^3$$

หรือ $$L^{-1}\{\frac{1}{s^4}\} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}$$

การแปลงลาปลาซผกผันบางค่า

ตารางการแปลงลาปลาซผกผัน

	$F(s)$	$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	I
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^{n+1}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
	s^2-a^2	$\underline{\sinh at}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตาราง 3.1

3.2 คุณสมบัติการแปลงลาปลาซผกผัน

หัวข้อนี้เป็นการแสดงคุณสมบัติการแปลงลาปลาซผกผันซึ่งสมนัยกับคุณสมบัติการแปลงลาปลาซจากบทที่ผ่านมา

3.2.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

ทฤษฎีบท 3-1 ถ้า c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ $F_1(s)$ และ $F_2(s)$ คือการแปลงลาปลาซของ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$L^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\} = c_1L^{-1}\{F_1(s)\}+c_2L^{-1}\{F_2(s)\}$$

$$= c_1f_1(t)+c_2f_2(t) \qquad (3.2)$$

ผลจากสมการ (3.2) สามารถขยายให้มากกว่า 2 ฟังก์ชันได้

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\}$$

$$= L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}+4L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}$$

$$-3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+16}\}+\frac{5}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}$$

$$= 1-t+4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

3.2.2 คุณสมบัติการเลื่อนออกไป (First shifting property)

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)} \qquad (3.3)$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{s-1}{s^2-2s+10}\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\} = \cos 3t$

ดังนั้น

$$L^{-1}\{\frac{s-1}{s^2-2s+10}\} = L^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2+9}\}$$

$$= e^t \cos 3t$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\}$

วิธีทำ จัด $s^2-4s+20$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$s^2-4s+20 = (s^2-4s+4)+16$$

$$= (s-2)^2+16$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\} = L^{-1}\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\}$$

$$= L^{-1}\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\}$$

$$= 6L^{-1}\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\}+2L^{-1}\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\}$$

$$= 6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$$

$$= 2e^{2t}(3\cos 4t+\sin 4t)$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\}$

วิธีทำ จัด s^2+s+1 ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$s^2+s+1 = s^2+s+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$= (s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$= e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

3.2.3 คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล (The change of scale property)

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)} \quad ; k \text{ เป็นค่าคงที่} \qquad (3.4)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2–4

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

แทนค่า a ด้วย $\frac{1}{k}$ ดังนั้น

$$L\{f(\tfrac{t}{k})\} = \frac{1}{(1/k)} F\left(\frac{s}{1/k}\right)$$

$$= k\,F(ks)$$

หรือ $$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$ ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+16}\} = \cos 4t$ ใช้ทฤษฎีบท 3–3 ดังนั้น

$$L^{-1}\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\} = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

3.2.4 การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ (Inverse Laplace transform of derivatives)

ทฤษฎีบท 3·4 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = L^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\} = (-1)^n t^n f(t)} \qquad (3.5)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาค่าของ $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{d}{ds}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{2s}{(s^2+a^2)^2}$

ดังนั้น

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+a^2})$$

และเพราะว่า

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\sin at}{a} \text{ ตามตาราง 3–1}$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+a^2})\}$$

ใช้ทฤษฎีบท 3–4 จะได้

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\} = -\frac{1}{2}(-1)\,t\,(\frac{\sin at}{a})$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

อีกวิธีหนึ่งหาคำตอบได้โดยการดิฟเฟอเรนซิเอทเทียบกับ a จะได้

$$\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

หรือ

$$\frac{d}{da}\left\{L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = -2aL^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

นั่นคือ

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2a}\frac{d}{da}(\cos at)$$

$$= -\frac{1}{2a}(-t \sin at)$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 8.8 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\right\}$

วิธีทำ ให้ $F(s) = \ln\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = L\{f(t)\}$

ดังนั้น $F'(s) = \frac{d}{ds}\{\ln(s^2+a^2) - \ln(s^2)\}$

$$= \frac{1}{s^2+a^2}(2s) - \frac{1}{s^2}(2s)$$

$$= 2s\left\{\frac{s^2-s^2-a^2}{s^2(s^2+a^2)}\right\}$$

$$= \frac{-2a^2}{s(s^2+a^2)}$$

$$= -2\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+a^2}\right\}$$

ใช้ทฤษฎีบท 3–4 จะได้

$$L^{-1}\{F'(s)\} = L^{-1}\left\{-2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = -t\,f(t)$$

$$-2(1 - \cos at) = -t\,f(t)$$

$$f(t) = \frac{2(1 - \cos at)}{t}$$

หรือ $$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2(1 - \cos at)}{t}$$

3.3 การแปลงลาปลาซผกผันของอินทิกรัล (Inverse Laplace Transform of Integrals)

ทฤษฎีบท 3-5 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(s)\,ds\right\} = \frac{f(t)}{t}} \qquad (3.6)$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{1}{s(s+1)}\,ds\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 1 - e^{-t}$$

ใช้ทฤษฎีบท 3–5 ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{s(s+1)}ds\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

3.4 การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) คูณกับ s^n

ทฤษฎีบท 3-6 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ และ $f(0) = 0$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\{s\,F(s)\} = f'(t)\quad .} \tag{3.7}$$

ข้อสังเกต : จากทฤษฎีบท 3–6 พบว่าการแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) คูณด้วย s จะมีผลต่อการดิฟเฟอเรนซิเอท f(t)

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2–5

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $f(0) = 0$ ดังนั้น

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} = sF(s)$$

หรือ $\qquad L^{-1}\{s\,F(s)\} = f'(t)$ ซ.ต.พ.

โดยวิธีเดียวกันนี้ รูปทั่วไปของ $L^{-1}\{s^n F(s)\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ก็ยังเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ เมื่อกำหนดให้

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L^{-1}\left\{s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s^2+1-1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

และโจทย์กำหนดให้

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t \sin t$$

ใช้ทฤษฎีบท 3–6 จะได้

$$L^{-1}\left\{s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} t \sin t\right)$$

$$= \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t)$$

ดังนั้นแทนค่าจะได้

$$\frac{1}{2}(t \cos t + \sin t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

nio

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t)$$

$$= \sin t - \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

3.5 การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) หารด้วย s^n

ทฤษฎีบท 3-7 ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx} \qquad (3.8)$$

ข้อสังเกต : การแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) หารด้วย s หรือคูณด้วย $\frac{1}{s}$ มีผลต่อการอินทิเกรตของ f(t) จาก 0 ถึง t

พิสูจน์ ให้ $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$

ดังนั้น $g(0) = 0$ และ $g'(t) = f(t)$

ใช้ทฤษฎีบท 2–5 จะได้

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0)$$

$$L\{f(t)\} = sL\{g(t)\}$$

และ
$$\frac{F(s)}{s} = L\{g(t)\}$$

หรือ
$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 3.11 จงพิสูจน์ว่า

$$L^{1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^y f(x)\,dx\,dy$$

พิสูจน์ ให้
$$g(t) = \int_0^t \int_0^y f(x)\,dx\,dy$$

ดังนั้น
$$g'(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

และ
$$g''(t) = f(t)$$

เพราะว่า
$$g(0) = g'(0) = 0$$

ใช้ทฤษฎีบท 2–6 จะได้

$$L\{g''(t)\} = s^2L\{g(t)\} - sg(0) - g'(0)$$
$$L\{f(t)\} = s^2L\{g(t)\}$$
$$\frac{F(s)}{s^2} = L\{g(t)\}$$

นั่นคือ
$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = g(t) = \int_0^t \int_0^y f(x)\,dx\,dy$$

ผลจากอันนี้เขียนใหม่จะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t f(t)\,dt\,dt$$

และเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\,dt^n} \qquad (3.9)$$

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

เมื่อกำหนดให้ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 3–7 จะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}x\sin x\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{x(-\cos x)\Big|_0^t + \int_0^t \cos x\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-t\cos t+\sin t\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \int_0^t \sin x\,dx = 1-\cos t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos x)\,dx = t-\sin t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (x-\sin x)\,dx = \frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

หรือ

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

3.6 คุณสมบัติผลการประสาน (The convolution property)

ทฤษฎีบท 3.8 (ทฤษฎีการประสาน) ถ้า $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ และ $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ ดังนั้น

$$\boxed{L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = f * g} \qquad (3.10)$$

พิสูจน์ จาก (2.40)

$$F(s)\,G(s) = L\{f * g\}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f * g$$

$$= \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ โดยใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

ใช้ทฤษฎีบทผลการประสานจะได้

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos ax \cdot \frac{\sin a(t-x)}{a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t (\cos ax)(\sin at \cos ax - \cos at \sin ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \int_0^t \cos^2 ax\,dx - \frac{1}{a}\cos at \int_0^t \frac{\sin 2ax}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \int_0^t \frac{(1+\cos 2ax)}{2}\,dx - \frac{1}{a}\cos at \left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a}\cos at \left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t}{a}\frac{t}{2}\sin at + \frac{1}{a}\frac{\cos at \sin^2 at}{2a} - \frac{1}{a}\frac{\cos at \sin' at}{2a}$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$ โดยใช้ทฤษฎีบทผลการประสา

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

....ะ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t\,e^{-t}$

ใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = \int_0^t (xe^{-x})(t-x)\,dx$$

$$= \int_0^t (xt-x^2)\,e^{-x}\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = (xt-x^2)$; $dv = e^{-x}\,dx$

$du = (t-2x)\,dx$: $v = -e^{-x}$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = (xt-x^2)(-e^{-x})\Big|_0^t + \int_0^t (t-2x)\,e^{-x}\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนพจน์ที่สองทางขวามืออีกครั้ง

ให้ $u = (t-2x)$: $dv = e^{-x}\,dx$

$du = (-2)\,dx$; $v = -e^{-x}$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = 0 + (t-2x)(-e^{-x})\Big|_0^t - 2\int_0^t e^{-x}\,dx$$

$$= te^{-t} + t + 2e^{-x}\Big|_0^t$$

$$= t\,e^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$$

3.7 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Transforming ordinary differential equations)

ในหัวข้อนี้จะเป็นการแสดงถึงวิธีการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ไปเป็นสมการพีชคณิตโดยใช้การแปลงลาปลาซเข้าช่วย สมการพีชคณิตที่ได้นี้จะจัดให้มีค่าเท่ากับการแปลงลาปลาซของคำตอบ (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ในที่สุดเมื่อกลับให้อยู่ในรูปของการแปลงลาปลาซผกผัน จะได้คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นแบบเอกพันธ์ (nonhomogeneous differential equation) ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

ใส่การแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง

$$L\{y''\} + aL\{y'\} + b\{y\} = L\{f(t)\}$$

ใช้ทฤษฎีบท 2–5 และ 2–6 จะได้

$$[s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)] + a\cdot[sL\{y\} - y(0)] + bL\{y\} = L\{f(t)\}$$

ดังนั้น

$$(s^2 + as + b)\,L\{y\} - \{sy(0) + ay(0) + y'(0)\} = L\{f(t)\}$$

$$L\{y\} = \frac{(s+a)\,y(0) + y'(0) + L\{f(t)\}}{s^2 + as + b}$$

หรือ

$$y = L^{-1}\left\{\frac{(s+a)\,y(0) + y'(0) + L\{f(t)\}}{s^2 + as + b}\right\}$$

วิธีการแปลงลาปลาซหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ

1. กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) มาให้
2. ฟังก์ชัน f(t) จะต้องหาการแปลงลาปลาซได้
3. สามารถหาการแปลงลาปลาซผกผันของพจน์ขวามือได้

3.8 วิธีการหาการแปลงลาปลาซผกผัน (Methods of finding inverse Laplace transforms)

วิธีการหาการแปลงลาปลาซผกผันมีหลายวิธี แต่ในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงเพียง 3 วิธี คือ

3.8.1 วิธีแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Partial fraction method) ซึ่งสามารถหาได้หลายแบบ เช่น โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยการแทนค่า และโดยการใช้ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์ (The Heaviside's expansion theorems)

หลักการแยกฟังก์ชันพีชคณิต $\frac{p(s)}{q(s)}$ เป็นเศษส่วนย่อยเมื่อ p(s) และ q(s) เป็นพหุนาม (Polynomial) และระดับขั้น (degree) ของ q(s) มากกว่าระดับขั้นของ p(s) สามารถทำได้ดังนี้คือ

ในกรณีที่ตัวประกอบของ q(s) เป็นตัวประกอบ (factor) เชิงเส้นแบบไม่ซ้ำ สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} \qquad a \neq b$$

ในกรณีที่ตัวประกอบของ q(s) เป็นตัวประกอบเชิงเส้นแบบซ้ำ สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s-a)(s-b)^2} = \frac{A}{s-a} + \frac{B_1}{s-b} + \frac{B_2}{(s-b)^2}$$

ในกรณีที่ตัวประกอบ q(s) เป็นตัวประกอบเชิงซ้อนแบบไม่ซ้ำ สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s^2+a_1s+b_1)(s^2+a_2s+b_2)} = \frac{As+B}{s^2+a_1s+b_1} + \frac{Cs+D}{s^2+a_2s+b_2}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการแยกเศษส่วนย่อยโดยการเทียบสัมประสิทธิ์และโดยการแทนค่า

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาค่าของ $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

วิธีที่ 1 แยกเป็นเศษส่วนย่อยโดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

เอา $(s+1)(s-2)^3$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
5s^2-15s-11 &= A(s-2)^3+B(s+1)(s-2)^2+C(s+1)(s-2)+D(s+1) \\
&= A(s^3-6s^2+12s-8)+B(s^3-3Bs^2-4) \\
&\quad +C(s^2-s-2)+D(s+1) \\
&= (A+B)s^3-(6A+3B-C)s^2+(12A-C+D)s \\
&\quad -(8A-4B+2C-D)
\end{aligned}
$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$A+B = 0 \tag{3.11}$$

$$-(6A+3B-C) = 5 \tag{3.12}$$

$$12A-C+D = -15 \tag{3.13}$$

$$8A-4B+2C-D = 11 \tag{3.14}$$

จาก (3.11) $A = -B$ แทนค่าลงใน (3.12)

$$3B+C = 5 \tag{3.15}$$

เอา (3.13) บวกกับ (3.14) จะได้

$$20A-4B+C = -4 \tag{3.16}$$

แทนค่า $A = -B$ ลงใน (3.16)

$$-24B+C = -4 \tag{3.17}$$

(5) – (7) ; $27B = 9$

$$B = \frac{1}{3} \text{ และ } A = -\frac{1}{3}$$

แทนค่า $B = \frac{1}{3}$ ใน (3.15) จะได้

$$c = 4$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$ และ $C = 4$ ลงใน (3.13) ดังนั้น

$$12(-\frac{1}{3}) - (4) + D = -15$$

หรือ $D = -7$

ดังนั้น

$$L^{-1}\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)\,(s-2)^3}\} = L^{-1}\{\frac{(-1/3)}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{(-7)}{(s-2)^3}\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 4t\,e^{2t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t}$$

วิธีที่ 2 แยกเป็นเศษส่วนย่อย โดยการแทนค่า

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)\,(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3} \qquad (3.18)$$

คูณสมการ (3.18) ด้วย $(s+1)$ แล้วแทนค่า $s = -1$ จะได้

$$\lim_{s\to -1} \frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3} = A + \lim_{s\to -1}(s+1)\{\frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}\}$$

หรือ $A = \frac{5(-1)^2-15(-1)-11}{(-1-2)^3} = -\frac{1}{3}$

ในทำนองเดียวกัน คูณสมการ (3.18) ด้วย $(s-2)^3$ แล้วแทนค่า $s = 2$ จะได้

$$D = \lim_{s\to 2} \frac{5s^2-15s-11}{s+1} = -7$$

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ตัวประกอบของ q(s) เป็นตัวประกอบเชิงเส้นแบบซ้ำ ดังนั้น การแทนค่าด้วยรากของตัวประกอบในชุดของ $(s-2)$ จึงหาค่าของ D ได้เพียงตัวเดียว ส่วนค่าของ B และ C จะต้องใช้การสมมุติค่า s ซึ่งไม่ใช่ค่าของรากขึ้นมาใหม่สองค่า (จะเป็นค่าอะไรก็ได้)

เพราะว่าเราทราบค่าของ A และ D แทนค่าลงใน (3.18) จะได้

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-\frac{1}{3}}{(s+1)}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3} \qquad (3.19)$$

แทนค่า $s = 0$ และ $s = 1$

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3}-\frac{B}{2}+\frac{C}{4}+\frac{7}{8}$$

หรือ $$-6B+3C = 10 \qquad (3.20)$$

และ $$\frac{21}{2} = -\frac{1}{6}-B+C+7$$

หรือ $$-3B+3C = 11 \qquad (3.21)$$

(3.20) − (3.21) จะได้

$$B = \frac{1}{3}$$

แทนค่า B ลงใน (3.20)

$$c = 4$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{(-7)}{(s-2)^3}\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4t\,e^{2t}-\frac{7}{2}t^2\,e^{2t}$$

หมายเหตุ การหาเศษส่วนย่อยโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ และโดยการแทนค่า ผลที่ได้จะมีค่าเท่ากันเสมอ นอกจากสองวิธีข้างต้นนี้แล้ว ยังมีวิธีหาเศษส่วนย่อยอีกวิธีหนึ่ง โดยการใช้ทฤษฎีบทการกระจายของเฮวีไซด์