พิจารณา

$$\int_0^{2b} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{b} e^{-st}\, dt + \int_b^{2b} (-1)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b + \frac{e^{-st}}{s}\Big|_b^{2b}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-bs} + e^{-2bs}}{S}$$

$$= \frac{(1 - e^{-bs})^2}{s}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{(1 - e^{-bs})^2}{s(1 - e^{-2bs})}$$

$$= \frac{(1 - e^{-bs})^2}{s(1 - e^{-bs})(1 + e^{-bs})}$$

$$= \frac{1 - e^{-bs}}{s(1 + e^{-bs})}$$

$$= \frac{e^{-bs/2}(e^{bs/2} - e^{-bs/2})}{se^{-bs/2}(e^{bs/2} + e^{-bs/2})}$$

$$= \frac{1}{s} \tan h \left(\frac{bs}{2}\right)$$

เพราะว่า

$$\sinh\left(\frac{bs}{2}\right) = \frac{e^{bs/2} - e^{-bs/2}}{2}$$

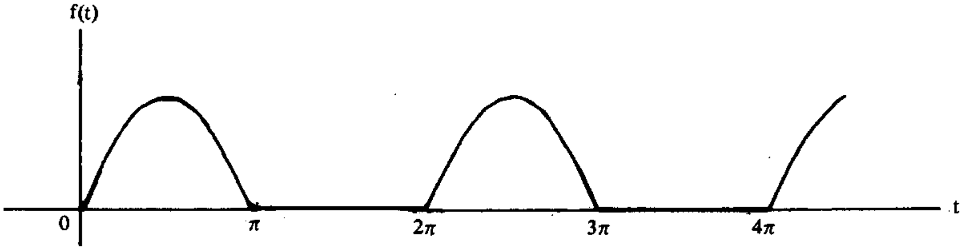
$$\cosh\left(\frac{bs}{2}\right) = \frac{e^{bs/2} + e^{-bs/2}}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\tanh\left(\frac{bs}{2}\right) = \frac{\sin h\left(\frac{bs}{2}\right)}{\cos h\left(\frac{bs}{2}\right)}$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบเป็น

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



รูป 2.6

วิธีทำ คาบของฟังก์ชันนี้คือ 2π ใช้ทฤษฎีบท 2–11

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt\right\}$$

พิจารณา

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (0)\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sin t \qquad dv = e^{-st}\, dt$

$du = \cos t\, dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$

แทนค่าจะได้

$$\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\, dt = \sin t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{s}\int_0^{''} \cos t\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^{\pi} \cos t\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้
$$u = \cos t \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = -\sin t\,dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

แทนค่าจะได้

$$\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\left\{ \cos t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{s}\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\,dt \right\}$$

$$= \frac{(e^{-\pi s}+1)}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\,dt$$

$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{(1+e^{-\pi s})}{s^2}$$

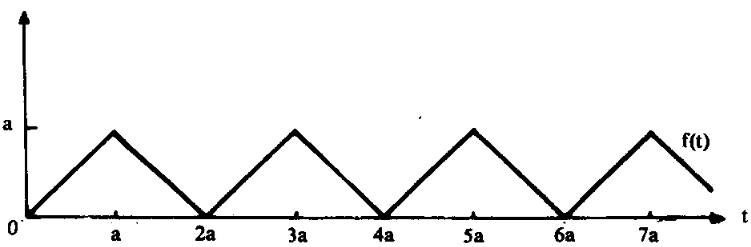
$$\int_0^{\pi} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$$

แทนค่าในสูตร

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{(1-e^{-2\pi s})}\left\{\frac{(1+e^{\pi s})}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันฟันเลื่อน (sawtooth function) f(t) ซึ่งแสดงตามรูป 2.7



รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันฟันเลื่อย

วิธีทำ 1 คาบของฟังก์ชันฟันเลื่อยเท่ากับ 2a ใช้ทฤษฎีบท 2–11 จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^{2a} f(t)\, e^{-st}\, dt}{1 - e^{-2as}}$$

พิจารณา f(t) ในช่วง 0 ถึง 2a จะได้

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < a \\ -t + 2a & a < t < 2a \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{2a} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{a} (t)\, e^{-st}\, dt + \int_a^{2a} (-t + 2a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{a} t\, e^{-st}\, dt - \int_a^{2a} t\, e^{-st}\, dt + 2a \int_a^{2a} e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = t \qquad dv = e^{-st}\, dt$

$$du = dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^{2a} f(t)\, e^{-st}\, dt = \left\{ t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{e^{-st}}{s}\, dt \right\}$$

$$- \left\{ t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_a^{2a} + \int_a^{2a} \frac{e^{-st}}{a}\, dt \right\} + 2a\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_a^{2a}$$

$$= -\frac{ae^{-as}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a + 2a\frac{e^{-2as}}{s} - \frac{ae^{-as}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_a^{2a}$$

$$- 2a\frac{e^{-2as}}{s} + 2a\frac{e^{-as}}{s}$$

$$= -\frac{e^{-as}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2as}}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s^2}$$

$$= \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \frac{(1-e^{-as})^2}{s^2(1-e^{-2as})}$$

$$= \frac{1-e^{-as}}{s^2(1+e^{-as})}$$

ทฤษฎีบท 2-12 ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว ดังนั้น

$$\boxed{L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)} \qquad a > O \tag{2.36}$$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^a f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt$$

แต่ $$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_a^\infty f(t-a)(1)e^{-st}\,dt$$

ให้ $$t-a = x$$

$$t = x+a$$

$$dt = dx$$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}\,dx$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= e^{-as} L\{ f(t) \}$$

$$= e^{-as} F(s)$$ ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.20 จงหาค่าของ $L\{ \sin a(t-b)\, u(t-b) \}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 2-12

$$L\{\sin a(t-b)u(t-b)\} = e^{-bs} L\{\sin at\}$$

$$= \frac{ae^{-bs}}{s^2+a^2}$$

ตัวอย่างที่ 2.21 จงหาค่าของ $L\{ \cos(t-1)\, u(t-1) \}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 2–12

$$L\{ \cos(t-1)\, u(t-1) \} = e^{-s} L\{ \cos t \}$$

$$= \frac{se^{-s}}{s^2+1}$$

บทแทรกทฤษฎีบท 2–12 ถ้า $L\{ f(t) \} = F(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{L\{ f(t)\, u(t-a) \} = e^{-as} L\{ f(t+a) \}} \qquad (2.37)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{ f(t)\, u(t-a) \} = \int_0^{m} f(t)\, u(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{a} f(t)\, u(t-a)\, e^{-st}\, dt + \int_a^{\infty} f(t)\, u(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_a^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

ให้ $t = x+a$ จะได้ $dt = dx$ ดังนั้น

$$L\{ f(t)\, u(t-a) \} = \int_0^{\infty} f(x+a)\, e^{-s(x+a)}\, dx$$

$$= e^{-as} \int_0^{\infty} f(x+a)\, e^{-sx}\, dx$$

$$= e^{-as} \int_0^{\infty} f(t+a)\, e^{-st}\, dt$$

$$= e^{-as} L\{ f(t+a) \}$$

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาค่าของ $L\{ t^2 u(t-2) \}$

วิธีทำ ใช้บทแทรกทฤษฎีบท 2–12 เมื่อ $f(t) = t^2$

$$L\{ t^2 u(t-2) \} = e^{-2s} L\{ (t+2)^2 \}$$

$$= e^{-2s} L\{ t^2 + 4t + 4 \}$$

$$= e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$$

$$= e^{-2r} \left(\frac{2+4s+4s^2}{s^3} \right)$$

$$= \frac{2e^{-2s}}{s^3} (1+2s+2s^2)$$

2.10 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัลผลการประสาน (convolution integrals)

ทฤษฎีบท 2-13 ถ้า $L\{ f(t) \} = F(s)$ และ $L\{ g(t) \} = G(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{\begin{aligned} L\{ f(t) \} L\{ g(t) \} &= L\left\{ \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \right\} \\ &= L\left\{ \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx \right\} \end{aligned}} \qquad (2.38)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\left\{ \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \right\} = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \right\} e^{-st}\, dt \qquad (2.39)$$

จากนิยามฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

$$u(t-x) = \begin{cases} 1 & t > x \\ 0 & t < x \end{cases}$$

ดังนั้น

$$f(t-x)g(x)\,u(t-x) = \begin{cases} f(t-x)\,g(x) & t > x \\ 0 & t < X \end{cases}$$

สมการ (2.39) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$L\{\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\} = \int_0^w \{\int_0^w f(t-x)\,g(x)\,u(t-x)\,dx\}\,e^{-st}\,dt$$

สลับอันดับของอินทิเกรต

$$L\{\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\} = \int_0^m g(x)\,[\int_0^\infty f(t-x)\,u(t-x)\,e^{-st}\,dt]\,dx$$

$$= \int_0^\infty g(x)\,[\int_0^x f(t-x)\,u(t-x)\,e^{-st}\,dt$$

$$+\int_x^\infty f(t-x)\,u(t-x)\,e^{-st}\,dt]\,dx$$

$$= \int_0^\infty g(x)\int_x^w f(t-x)\,e^{-st}\,dt\,dx \qquad (2.40)$$

ให้ $t-x = y$

$t = x+y$

$dt = dy$

แทนค่าลงใน (2.40) จะได้

$$L\{\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\} = \int_0^\infty g(x)\,\{\int_0^\infty f(y)e^{-s(x+y)}\,dy\}\,dx$$

$$= \int_0^\infty g(x)\,e^{-sx}\,\{\int_0^\infty f(y)\,e^{-sy}\,dy\}\,dx$$

$$= \{\int_0^\infty (f(t)\,e^{-st}\,dt\}\,\{\int_0^\infty g(t)\,e^{-st}\,dt\}$$

$$= L\{f(t)\}\,L\{g(t)\}$$

$$= F(s)\,G(s)$$ ซ.ต.พ.

พิสูจน์โดยวิธีเดียวกันนี้ จะได้

$$L\{\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx\} = L\{f(t)\}\,L\{g(t)\}$$

สัญลักษณ์ของผลการประสาน

ผลการประสานของฟังก์ชัน $f(t)$ และ $g(t)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(t)*g(t)$ และนิยามเป็น

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$$

$$\text{หรือ} \quad = \int_0^t g(x)\,f(t-x)\,dx$$

ดังนั้นจาก (2.38) เขียนใหม่ได้เป็น

$$L\{f(t)\}\,L\{g(t)\} = L\{f*g\}$$

$$\text{หรือ} \quad = L\{g*t\} \qquad (2.41)$$

คุณสมบัติของผลการประสาน

1. ผลการประสานเป็นไปตามกฎการสลับที่ (Commutative law)

$$f*g(t) = g*f(t) \qquad (2.42)$$

2. ผลการประสานเป็นไปตามกฎการแจกแจงสำหรับการบวก (Distributive law for addition)

$$f*\{g+h\}\,(t) = f*g(t)+f*h(t) \qquad (2.43)$$

และ $$f*(kg)\,(t) = k(f*g)\,(t) \quad ; \ k \text{ เป็นค่าคงที่} \qquad (2.44)$$

3. ผลการประสานเป็นไปตามกฎเปลี่ยนกลุ่มได้ (Associative law)

$$f(t)*\{g*h\}(t) = \{f*g\}(t)*h(t) \tag{2.45}$$

ตัวอย่างที่ 2.23 จงหาค่าของ $t*t*t$ โดยใช้คุณสมบัติผลการประสาน

วิธีทำ ใช้ (2.45) จะได้

$$t*t*t = \{t*t\}*t$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} t*t &= \int_0^t x(t-x)\,dx \\ &= \left\{\frac{tx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right\}\Big|_0^t \\ &= \frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

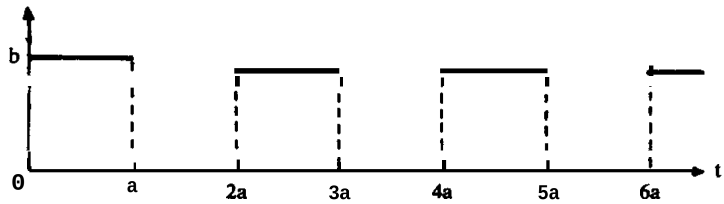
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} t*t*t &= \frac{t^3}{6}*t \\ &= \int_0^t \frac{x^3}{6}(t-x)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\left\{\frac{tx^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right\}\Big|_0^t \\ &= \frac{1}{6}\left\{\frac{t^5}{4}-\frac{t^5}{5}\right\} \\ &= \frac{t^5}{120} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

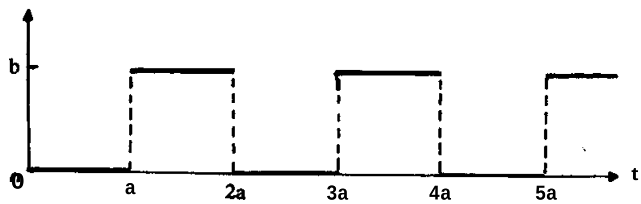
จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 3 จงเขียนฟังก์ชัน f(t) ให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย ตามรูป 2.8–2.10 พร้อมทั้งหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเหล่านี้ด้วย

(1)



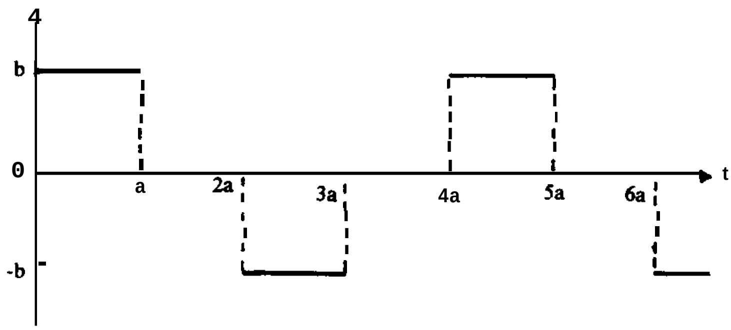
รูป 2.8

(2)



(3)

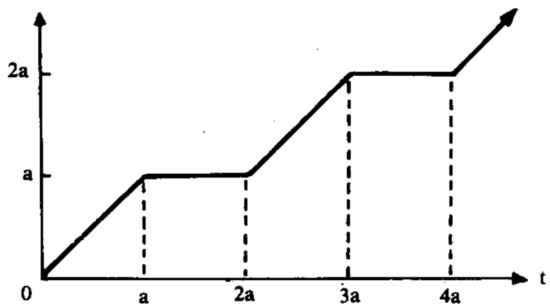
Jd2.9



รูป 2.10

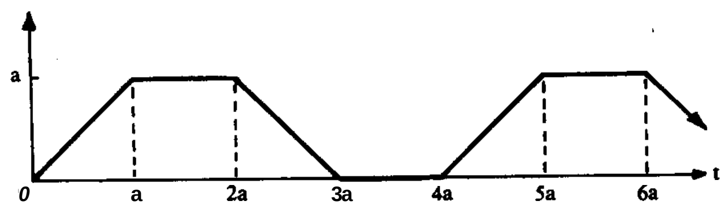
จากแบบฝึกหัดข้อ 4 ถึงข้อ 7 ให้ใช้วิธีของตัวอย่างที่ 2.19 หาค่าการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่กำหนดให้ตามรูป 2.11–2.14

(4)



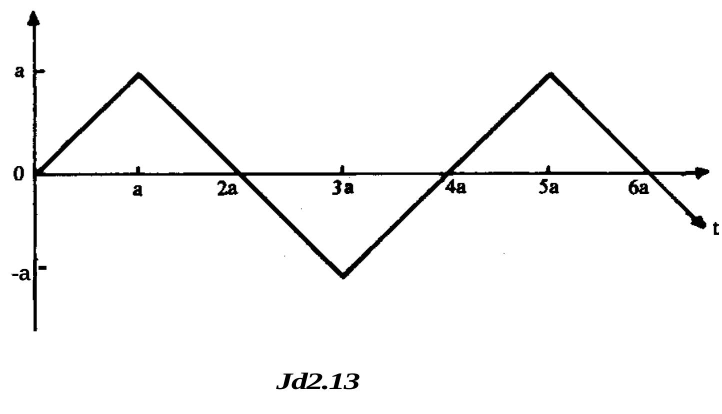
รูป 2.11

(5)



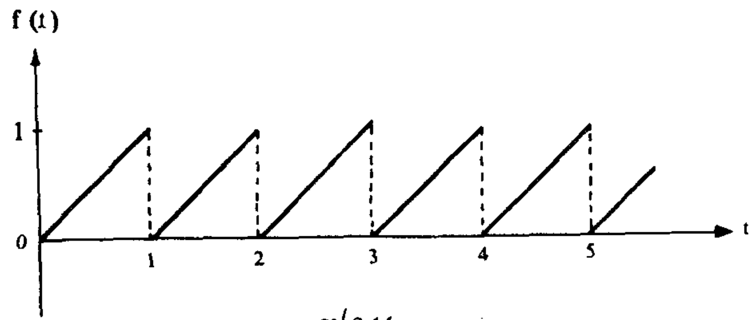
รูป 2.12

(6)



Jd2.13

(7)



รูป 2.14

จากแบบฝึกหัดข้อ 8 ถึง 10 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันข้างล่างนี้ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบ

(8) $f(t) = \begin{cases} 3t & 0<t<2 \\ 6 & 2<t<4 \end{cases}$

(9) $f(t) = t^2 \qquad 0<t<2$

(10) $f(t) = \begin{cases} t & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \end{cases}$

การแปลงลาปลาซของผลการประสาน

จากแบบฝึกหัดข้อ 11 ถึงข้อ 15 จงหาการแปลงลาปลาซของผลการประสานซึ่งกำหนดให้

(11) $f(t) = \int_0^t (t-u)^3 \sin u \, du$

(12) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \cos 2u \, du$

(13) $f(t) = \int_0^t (t-u)^3 u^5 \, du$

(14) $f(t) = \int_0^t \sinh 4(t-u) \cosh 5u \, du$

(15) $f(t) = \int_0^t e^{17(t-u)} u^{19} \, du$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2.3

1) $b\{u(t)-u(t-a)+u(t-2a)-u(t-3a)+\ldots\}$; $\dfrac{b}{s(1 + e^{-as})}$

3) $b\{u(t)-u(t-a)-u(t-2a)+u(t-3a)+u(t-4a)-\ldots\}$; $\dfrac{b(1-e^{-as})}{s(1+e^{-2as})}$

5) $\dfrac{(1-e^{-as})}{s^2(1+e^{-2as})}$

7) $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

8) $\dfrac{3-3e^{-2s}-6se^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

9) $\dfrac{2-2^{-2s}-4se^{-2s}-4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

10) $\dfrac{1-e^{-s}\,(1+s)}{s^2(1-e^{-2s})}$

11) $\dfrac{3!}{s^4(s^2+1)}$

12) $\dfrac{s}{(s+1)\,(s^2+4)}$

13) $\dfrac{720}{s^{10}}$

14) $\dfrac{4s}{(s^2-25)\,(s^2-16)}$

15) $\dfrac{19!}{s^{20}(s-17)}$

แบบฝึกหัดระคน

(1) ถ้า $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}$

จงแสดงว่า $L\{f(t)\} = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(2) ถ้า $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0<t<\pi \\ \sin t & t>\pi \end{cases}$

จงหาค่าของ $L\{f(t)\}$

(3) จงแสดงว่า $L\{\sin^3 t\} = \dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$

(4) จงหาค่าของ $L\{\sin h^3(2t)\}$

(5) ถ้า $f(t) = \begin{cases} 5\sin 3(t-\frac{\pi}{4}) & t>\frac{\pi}{4} \\ 0 & t<\frac{\pi}{4} \end{cases}$

จงหาค่าของ $L\{f(t)\}$

(6) ถ้า $L\{t\,f(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

จงหาค่าของ $L\{e^{-t} f(2t)\}$

(7) จงหาค่าของ

(ก) $L\{\sin h\,(2t)\cos 2t\}$

(ข) $L\{\cos h\,(2t)\cos 2t\}$

(8) จงแสดงว่า $L\{e^{\alpha t} f(\beta t)\} = \dfrac{1}{\beta} F\left(\dfrac{s-\alpha}{\beta}\right)$

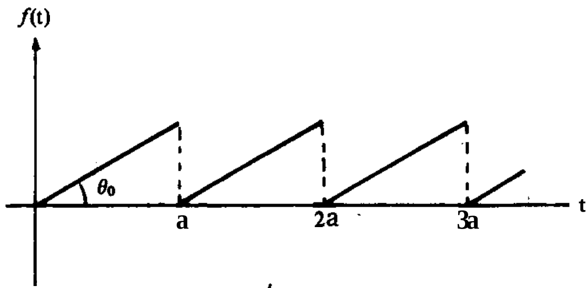
เมื่อ α และ β เป็นค่าคงที่ และ $L\{f(t)\} = F(s)$

(9) (ก) จงแสดงว่า

$$L\{\frac{\sin^2 t}{t}\} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

(ข) จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} e^{-t}\, dt$

(10) จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีคาบ f(t) ซึ่งแสดงตามรูป 2.15



รูป 2.15

(11) จงแสดงว่า

(ก) $\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) e^{-st}\, dt = \frac{\pi}{2} - s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + 2\tan^{-1}s$

(ข) $\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$

(12) จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sinh(t)\ \sin t}{t} e^{-\sqrt{2}t}\, dt = \frac{A}{8}$$

คำตอบแบบฝึกหัดระคน

2) $\dfrac{s+(s-1)\,e^{-\pi s}}{s^2+1}$

4) $\dfrac{48}{(s^2-36)\,(s^2-4)}$

5) $\dfrac{e^{-\frac{\pi s}{4}}}{s^2+9}$

6) $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{s^2+2s+5}{(s+1)^2}\right)$

7) (ก) $\dfrac{2(s^2-8)}{(s^4+64)}$

(ข) $\dfrac{s^3}{(s^4+64)}$

9) (ข) $\dfrac{1}{4}\ln 5$

10) $\dfrac{1-e^{-as}-ase^{-as}}{s^2(1-e^{-as})}\tan\,\theta_0$