พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

ดิฟเฟอเรนซิเอทสมการนี้เทียบกับ s จะได้

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, \frac{d(e^{-st})}{ds}\, dt$$

$$= \int_0^\infty -t\, f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= L\{-tf(t)\}$$

ดังนั้น $$L\{tf(t)\} = (-1)\frac{dF(s)}{ds}$$ ช.ต.พ.

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าดิฟเฟอเรนซิเอทเทียบกับ s ต่อไปอีกจะได้

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = L[(-t)^2 f(t)\}$$

nio $$L\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2} \tag{2.22}$$

และ $$L\{t^3 f(t)\} = (-1)^3 \frac{d^3F(s)}{ds^3} \tag{2.23}$$

จากสมการ (2.21), (2.22) และ (2.23) อาศัยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้สูตรในรูปทั่วไป

ทฤษฎีบท 2-9 ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s)} \tag{2.24}$$

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาค่าของ $L\{t^2\sin 2t\}$

วิธีทำ ใช้สูตรจากทฤษฎีบท 2-9 เมื่อ $n = 2$ และ $f(t) = \sin 2t$ จะได้

$$L\{t^2\sin 2t\} = (-1)^2 \frac{d^2L\{\sin 2t\}}{ds^2}$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{s^2+4})$$

$$L\{t^2 \sin 2t\} = \frac{12s'-16}{(s^2+4)^3}$$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาค่าของ $\int_0^\infty t\, e^{-2t} \cos t\, dt$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงลาปลาซและสมการ (2.21)

$$L\{t \cos t\} = \int_0^\infty (t \cos t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= (-1)\frac{dL\{\cos t\}}{ds}$$

$$= (-1)\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1})$$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

แทนค่า $s = 2$ จะได้

$$\int_0^\infty t \cos t\, e^{-2t}\, dt = \frac{(2)^2-1}{\{(2)^2+1\}^2} = \frac{3}{25}$$

2.7 การแปลงลาปลาซของ $\frac{f(t)}{t}$

ทฤษฎีบท 2·10 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ และ $\frac{f(t)}{t}$ มีลิมิตเมื่อ $t \to 0$ ด้านขวา ดังนั้น

$$\boxed{L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int^\infty F(s)\, ds} \qquad (2.25)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตตลอดสมการเทียบกับ s จาก s ถึง ∞ จะได้

$$\int_s^\infty F(s)\, ds = \int_s^\infty \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt\, ds$$

สลับอันดับของอินทิเกรต ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty F(s)\, ds &= \int_0^\infty f(t) \left\{\int_s^\infty e^{-st}\, ds\right\} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(\frac{-e^{-st}}{t}\right) \Big|_s^\infty dt \\
&= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, e^{-st}\, dt \\
&= L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}
\end{aligned}$$

หรือ $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\, ds$ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาค่าของ $L\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2–10 จะได้

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\} &= \int_s^\infty L\{\sin kt\}\, ds \\
&= \int_s^\infty \frac{k}{s^2 + k^2}\, ds \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{s}{k}\right) \Big|_s^\infty \\
&= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{k}\right)
\end{aligned}$$

$$= \cot^{-1}(\frac{s}{k})$$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาค่าของ $L\{\frac{1-\cos 3t}{t}\}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 2-10 โดยสมมุติให้

$$f(t) = 1-\cos 3t$$

ดังนั้น

$$L\{\frac{1-\cos 3t}{t}\} = \int_s^m L\{1-\cos 3t\}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\}\, ds$$

$$= [\ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+9)]\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{1}{(1+\frac{9}{s^2})^{1/2}}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{(s^2+9)^{1/2}}{s}$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\, dt$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 2-10 โดยสมมุติให้

$$f(t) = e^{-t}-e^{-3t}$$

ดังนั้น

$$L\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\} = \int_s^m L\{e^{-t}-e^{-3t}\}\, ds$$

$$= \int_s^\infty \{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\}\, ds$$

$$= \{\ln(s+1) - \ln(s+3)\} \Big|_s^{\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{s+1}{s+3}\right) \Big|_s^{\infty}$$

$$= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{s}}{1+\frac{3}{s}}\right) \Big|_s^{\infty}$$

$$= \ln(1) - \ln\left(\frac{1+\frac{1}{s}}{s+\frac{3}{s}}\right)$$

$$= 0 - \ln\left(\frac{s+1}{s+3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

หรือ $\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right) e^{-st}\, dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$

ให้ $s = 0$ จะได้

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\, dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right) \Big|_{s=0} = \ln 3$$

แบบฝึกหัด 2.1

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $2t^2 - e^{-t}$

2. $6 \sin 2t - 5 \cos 2t$

3. $(t^2 + 1)^2$

4. $(\sin t - \cos t)^2$

5. $3 \cosh 5t - 4 \sinh 5t$

6. $(5e^{2t} - 3)^2$

7. $4 \cos^2 2t$ { แนะนำ : ให้กระจายอยู่ในรูปมุม 2 เท่า }

8. $\cos (at + b)$ { แนะนำ : ให้กระจายอยู่ในรูปผลต่าง 2 เทอม }

9. $\cos h^2 4t$

10. $3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2 \sin 5t + 3 \cos 2t$

จากแบบฝึกหัดข้อที่ 11 ถึง 16 ให้กระจายฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิคที่โจทย์กำหนดมาให้อยู่ในพจน์ชี้กำลังแล้วใช้สมการ (2.14) แสดงว่า

11. $L\{\cosh^2 at) = \dfrac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

12. $L\{\sinh^2 at] = \dfrac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

13. $L\{\cosh at \sin at] = \dfrac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

14. $L\{\cosh at \cos at] = \dfrac{s3}{s^4 + 4a^4}$

15. $L\{\sinh at \sin at] = \dfrac{.2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

16. $L\{\sinh at \cos at) = \dfrac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

จากข้อ 17–22 จงหาการแปลงลาปลาซ โดยทำวิธีเดียวกับแบบฝึกหัดข้อ 11–16

17. L{cosh at cosh bt]

18. L[sinh at sinh bt]

19. L[cosh at sin bt]

20. L{cosh at cos bt]

21. L[sinh at sin bt)

22. L[sinh at cos bt]

จงหาค่าต่อไปนี้

23. $L\{t^3 e^{-3t}\}$

24. $L\{(t+2)^2 e^t]$

25. $L\{e^{2t}(3 \sin 4t - 4 \cos 4t)\}$

26. $L\{e^{-t}(3 \sinh 2t - 5 \cosh 2t\}$

27. $L\{e^{-t} \sin^2 t\}$

28. $L\{(1 + t e^{-t})^3\}$

29. ถ้า $L\{f(t)] = \dfrac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$ **จงหา** $L\{f(2t)\}$

30. ถ้า $L\{f(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$ **จงหา** $L\{e^{-t}f(3t)\}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.1

1) $\dfrac{4+4s-s^3}{s^3(s+1)}$

2) $\dfrac{12-5s}{s^2+4}$

3) $\dfrac{s^4+4s^2+24}{s^5}$

4) $\dfrac{s^2-2s+4}{s(s^2+4)}$

5) $\dfrac{3s-20}{s^2-25}$

6) $\dfrac{25}{s-4}-\dfrac{30}{s-2}+\dfrac{9}{s}$

7) $\dfrac{2}{s}+\dfrac{2s}{s^2+16}$

8) $\dfrac{s\cos b-a\sin b}{a^2+s^2}$

9) $\dfrac{s^2-32}{s(s^2-64)}$

10) $\dfrac{72}{s^5}-\dfrac{12}{s^4}+\dfrac{4}{s+3}-\dfrac{10}{s^2+25}+\dfrac{3s}{s^2+4}$

17) $\dfrac{b(s^2+a^2+b^2)}{(s^2+a^2+b^2)-4a^2s^2}$

19) $\dfrac{b(s^2+a^2+b^2)}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$

21) $\dfrac{2abs}{(s^2+a^2+b^2)^2-4a^2s^2}$

23) $\dfrac{6}{(s+3)^4}$

24) $\dfrac{4s^2-4s+2}{(s-1)^3}$

25) $\dfrac{20-4s}{s^2-4s+20}$

26) $\dfrac{1-5s}{s^2+2s-3}$

27) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

28) $\dfrac{1}{s}+\dfrac{3}{(s+1)^2}+\dfrac{6}{(s+2)^3}+\dfrac{6}{(s+3)^4}$

29) $\dfrac{s^2-2s+4}{4(s+1)^2(s-2)}$

30) $\dfrac{e^{\frac{-3}{s+1}}}{s+1}$

แบบฝึกหัด 2.2

การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\int_0^t te^{-3t} \sin 2t \, dt$

2. $e^{-3t} \int_0^t \frac{\sin 2t}{t} \, dt$

3. $e^{-3t} \int_0^t t \sin 2t \, dt$

4. $\int_0^t \frac{e^t - \cos 2t}{t} \, dt$

5. $\int_0^t \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t} \, dt$

6. จงแสดงว่า

$$L\{\int_0^t \frac{1-e^t}{t} \, dt\} = \frac{1}{s} \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

7. จงแสดงว่า

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t} \sin u}{u} \, du \, dt = \frac{\pi}{4}$$

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณกับ t^n

8. จงแสดงว่า $L\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

9. จงแสดงว่า $L\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$

10. จงแสดงว่า $L\{t^2 \sin t\} = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$

จงหาค่าของ

11. $L[t\,(3\sin 2t - 2\cos 2t)\}$

12. $L\{t^2\cos t\}$

13. $L\{t^3\cos t]$

14. จงแสดงว่า $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t\,dt = \frac{3}{50}$

การแปลงลาปลาซของ f(t)/t

จงหาค่าของ

15. $L\{\frac{e^{2t}-1}{t}\}$

16. $L\{\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\}$

17. $L\{\frac{\sinh t}{t}\}$

18. จงแสดงว่า $L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\} = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$

19. จงแสดงว่า $L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$

20. ใช้ผลจากข้อ (18) แสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt = \ln 2$$

21. จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\,dt$

22. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin\%}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.2

1) $\dfrac{4(s+3)}{s(s^2+6s+13)^2}$

2) $\dfrac{1}{s+3}\cot^{-1}(\dfrac{s+3}{2})$

3) $\dfrac{4}{(s^2+6s+13)^2}$

4) $\dfrac{1}{s}\ln(\dfrac{\sqrt{s^2+4}}{s-1})$

5) $\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(\dfrac{s+3}{2})$

11) $\dfrac{8+12s-2s^2}{(s^2+4)^2}$

12) $\dfrac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$

13) $\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

15) $\ln(\dfrac{s}{s-2})$

16) $\cot^{-1}(\dfrac{s+3}{2})$

17) $\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{s+1}{s-1})$

21) $\ln(\dfrac{3}{2})$

2.8 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit step function)

คุณสมบัติของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

$$u(t) = 1 \qquad t>0$$

$$= 0 \qquad t<0$$

ดังนั้น $$L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\, dt$$

เพราะว่าอินทิกรัลขวามือ $t>0$ เพราะฉะนั้น $u(t) = 1$ แทนค่าจะได้

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{s} \qquad s>0 \tag{2.26}$$

และ $$L\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)\, e^{-st}\, dt \qquad a>0$$

$$= \int_0^a u(t-a)\, e^{-st}\, dt + \int_a^\infty u(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

เพราะว่า $$u(t-a) = 1 \qquad t>a$$

$$= 0 \qquad t<a$$

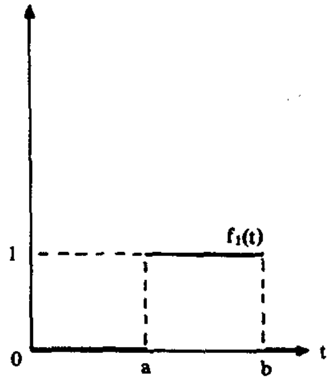
เพราะฉะนั้น อินทิกรัลพจน์แรกขวามือจะมีค่าเป็นศูนย์และ $u(t-a)$ ในอินทิกรัลพจน์ที่สองมีค่าเป็นหนึ่ง ดังนั้น

$$L\{u(t-a)) = \int_a^\infty e^{-st}\, dt$$

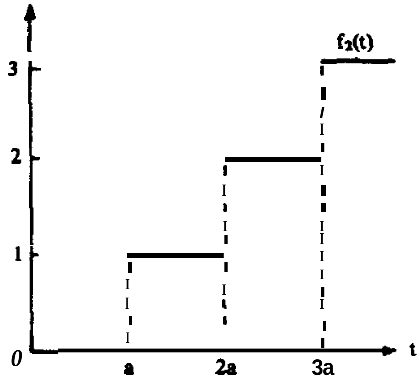
$$= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_a^m$$

$$= \frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0 \tag{2.27}$$

การเขียนฟังก์ชันในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย



รูป 2.2



รูป 2.3

$$f_1(t) = u(t-a) - u(t-b) \qquad a > 0 \tag{2.28}$$

เป็นคลื่นสี่เหลี่ยม (square wave) ระหว่าง a และ b ดูรูป 2.2 ขณะที่

$$f_2(t) = u(t-a) + u(t-2a) + u(t-3a) \qquad a > 0$$

เป็นขั้นบันได s ขั้น ดูรูป 2.3 ใช้คุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซและ (2.27) จะได้

$$L\{f_1(t)\} = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

และ

$$L\{f_2(t)\} = \frac{1}{s}(e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as})$$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบอนันต์

$$f(t) = u(t) + u(t-a) + u(t-2a) + u(t-3a) + \ldots \qquad a > 0 \tag{2.29}$$

วิธีทำ การแปลงลาปลาซคือ

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s}(1 + e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{s(1-e^{-as})} \tag{2.30}$$

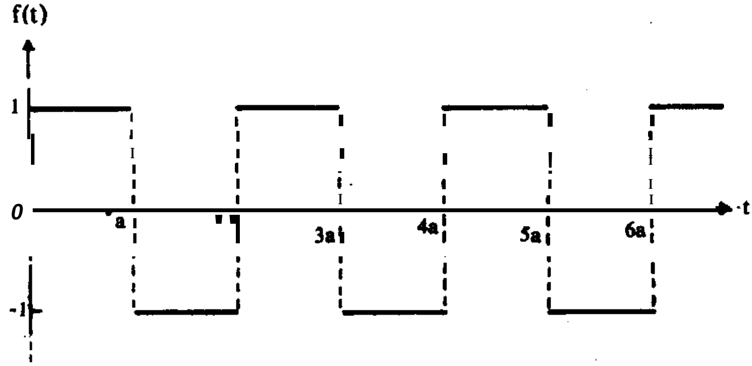
(2.30) หาได้เพราะใช้สูตรการหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n = 1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots = \frac{1}{1-\gamma}\ ; \gamma < 1$$

เมื่อ $\gamma = e^{-as}$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาการแปลงลาปลาซของ f(t) ซึ่ง f(t) เป็นคลื่นสี่เหลี่ยม มีคาบแสดงตามรูป 2.4 และ f(t) เขียนในรูป

$$f(t) = u(t) - 2u(t-a) + 2u(t-2a) - 2u(t-3a) + \ldots \qquad (2.31)$$



รูป 2.4 คลื่นสี่เหลี่ยม

วิธีทำ การแปลงลาปลาซของ f(t) คือ

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - 2e^{-3as} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1+e^{-as}} - 1\right)$$

$$= \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})} \qquad \text{ตอบ}$$

2.9 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีคาบ (Period function)

ทฤษฎีบท 2·11 ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลังซึ่งมีคาบเป็น a ดังนั้น

$$\boxed{L\{f(t)\} = \frac{\int_0 f(t)\, e^{-st}\, dt}{(1-e^{-as})}} \qquad (2.32)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{a} f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_a^{2a} f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{2a}^{3a} f(t)\, e^{-st}\, dt + \ldots$$

อินทิกรัลพจน์ที่สองทางขวามือ ถ้าให้ $t = T + a$ อินทิกรัลพจน์ที่สามให้ $t = T + 2a$ และอินทิกรัลพจน์ที่ $(n+1)$ ให้ $t = T + na$ ในแต่ละกรณีจะพบว่า $dt = dT$ และลิมิตของอินทิกรัลจะเปลี่ยนใหม่เป็น 0 ถึง a ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \int_0^{a} f(T)\, e^{-sT}\, dT + \int_0^{a} f(T+a)\, e^{-s(T+a)}\, dT$$

$$+ \int_0^{a} f(T+2a)\, e^{-s(T+2a)}\, dT + \ldots$$

$$= \int_0^{a} f(T)\, e^{-sT}\, dT + e^{-as} \int_0^{a} f(T+a)\, e^{-sT}\, dT$$

$$+ e^{-2as} \int_0^{a} f(T+2a)\, e^{-sT}\, dT + \ldots$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งมีคาบเป็น a เพราะฉะนั้น

$$f(T+a) = f(T+2a) = f(T+3a) = \ldots = f(T+na) = f(T)$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\} = \int_0^{a} f(t)\, e^{-sT}\, dT + e^{-as} \int_0^{a} f(T)\, e^{-sT}\, dT$$

$$+ e^{-2as} \int_0^{a} f(T)\, e^{-sT}\, dT + \ldots$$

$$= (1 + e^{-as} + e^{-2as} + \ldots) \int_0^{a} f(T)\, e^{-sT}\, dT \qquad (2.33)$$

อนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$

ผลรวมของอนุกรมเรขาคณิต (S) คือ

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ เมื่อ } r < 1 \qquad (2.34)$$

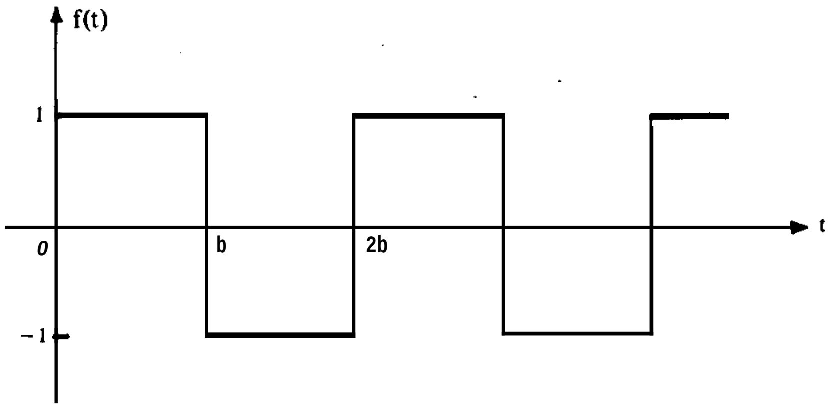
ดังนั้นอนุกรม $(1+e^{-as}+e^{-2as}+\ldots)$ เทียบกับ (2.34) $a = 1$ และ $r = e^{-as} < 1$ เพราะฉะนั้น

$$1+e^{-as}+e^{-2as}+\ldots = \frac{1}{1-e^{-as}} \qquad (2.35)$$

แทนค่า (2.35) ใน (2.33) จะได้

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^a f(t)\, e^{-st}\, dt}{1-e^{-as}} \qquad \text{ซ.ต.พ.}$$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาการแปลงลาปลาซของคลื่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangular wave) ซึ่งแสดงตามรูป 2.5



รูป 2.5 คลื่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

วิธีทำ คาบของฟังก์ชันคือ 2b ใช้ทฤษฎีบท 2–11

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2bs}}\left\{\int_0^{2b} f(t)\, e^{-st}\, dt\right\}$$