บทที่ 2
การแปลงลาปลาซ (The Laplace Transform)

2.1 นิยามของการแปลงลาปลาซ (Definition of the Laplace transform)

กำหนดให้ f(t) เป็นฟังก์ชันของ t ซึ่ง $t > 0$ ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ f(t) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $L\{f(t)\}$ นิยามโดยอินทิกรัล

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.1}$$

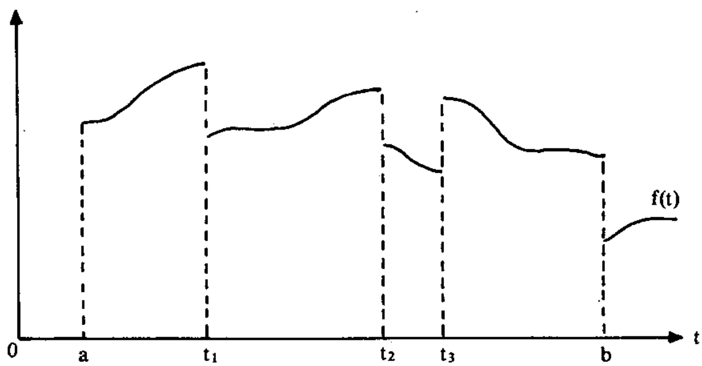
เมื่อ s เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์ ต่อไปอาจพิจารณาในกรณีที่ s เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

การแปลงปลาซของ f(t) หาค่าได้ ถ้าอินทิกรัลของ (2.1) ลู่เข้า (converges) สำหรับบางค่าของ s และหาค่าไม่ได้ ถ้าอินทิกรัลของ (2.1) ลู่ออก (diverges)

ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (Sectional or piecewise continuity)

ฟังก์ชัน f(t) ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $a \leqslant t \leqslant b$ ถ้า

1. สามารถแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ และนับจำนวนได้ถ้วน (finite)
2. ในแต่ละช่วงย่อยฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง และสามารถหาค่าลิมิตข้างซ้าย (left hand side limit) และลิมิตข้างขวา (right hand side limit) ได้



รูป 2.1

ตัวอย่างของฟังก์ชันมีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ตามรูป 2.1 ฟังก์ชันนี้มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องที่ t_1, t_2 และ t_3 พิจารณาที่จุดไม่ต่อเนื่อง t_1 ลิมิตข้างซ้ายและลิมิตข้างขวาเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(t_1 - 0)$ และ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(t_1 + 0)$ ตามลำดับเมื่อ $\varepsilon > 0$

ฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง (Function of exponential order)

ถ้า M, N และ γ เป็นค่าคงที่ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ สำหรับทุกค่าของ $t > N$

$|e^{-\gamma t} f(t)| < M$ หรือ $|f(t)| < Me^{\gamma t}$

$f(t)$ ถูกเรียกว่าฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง γ เมื่อ $t > 0$

ตัวอย่างที่ 2.1 $f(t) = t^2$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง 3 เพราะว่า

$|t^2| = t^2 < e^{3t}$ สำหรับทุกค่าของ $t > 0$

ตัวอย่างที่ 2.2 $f(t) = e^{t^3}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง เพราะว่า

$|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$ สามารถทำให้มีค่ามากกว่าค่าคงที่กำหนดให้ได้เมื่อ t มีค่ามากขึ้น

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชันมีขอบเขต (bounded functions) เช่น sin at หรือ cos at จัดเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง

เงื่อนไขการหาค่าได้ของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 2-1 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $0 \leqslant t \leqslant N$ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง γ สำหรับ $t > N$ ดังนั้น การแปลงลาปลาซของ $f(t)$ หาค่าได้สำหรับทุกค่าของ $s > \gamma$

พิสูจน์ สมมุติให้ N เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$\int_0^w f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^N f(t)\, e^{-st}\, dt + \int_N^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

เพราะว่า f(t) เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $0 \leqslant t \leqslant N$ ดังนั้น อินทิกรัลพจน์แรกทางขวามือหาค่าได้และอินทิกรัลพจน์ที่สองทางขวามือก็หาค่าได้เช่นเดียวกัน เพราะว่า f(t) เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง γ สำหรับ $t > N$ ในกรณีนี้จะได้

$$\begin{aligned}
\left| \int_N^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \right| &\leqslant \int_N^\infty | f(t)\, e^{-st} |\, dt \\
&\leqslant \int_0^\infty | f(t)\, e^{-st} |\, dt \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-st} | f(t) |\, dt \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-st} M e^{\gamma t}\, dt \\
&= M \int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}\, dt \\
&= M \left. \frac{e^{-(s-\gamma)t}}{\gamma - s} \right|_0^\infty
\end{aligned}$$

ซึ่งจะลู่เข้า (converges) สู่ค่า $\frac{M}{s-\gamma}$ เมื่อ $s > \gamma$ นั่นคือการแปลงลาปลาซ หาค่าได้เมื่อ $s > \gamma$

2.2 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเบื้องต้นบางฟังก์ชัน (Laplace transform of some elementary functions)

ถ้า $\quad f(t) = 1$

$$\begin{aligned}
L\{1\} &= \int_0^\infty (1)\, e^{-st}\, dt \\
&= -\left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s} \qquad s > 0 \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

ถ้า $\quad f(t) = t$

$$L\{t\} = \int_0^\infty (t)\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts)

ให้ $u = t, dv = e^{-st}\,dt$

$$du = dt,\ v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

ดังนั้น $$L\{t\} = t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\ ;\ s > 0$$

ถ้า $$f(t) = t''$$

$$L\{t^n\} = \int_0^m t''\, e^{-st}\,dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $$u = t^n \quad ;\ dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = nt^{n-1}\,dt\ ;\quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$L\{t^n\} = t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(nt^{n-1}\,dt)$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{n}{s}L\{t^{n-1}\} \tag{2.4}$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $$u = t^{n-1}\ ,\ dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = (n-1)\,t^{n-2}\,dt\ :\ v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s}\left\{t^{n-1}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(n-1)\,t^{n-2}\,dt\right\}$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)}{s} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s} L\{ t^{n-2} \} \qquad (2.5)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าอินทิเกรตทีละส่วนอีก $n-2$ ครั้ง จะได้

$$L\{ t^n \} = \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s}\frac{(n-2)}{s}\frac{(n-3)}{s} \ldots \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} L\{1\}$$

$$= \frac{n!}{s^n}\left(\frac{1}{s}\right)$$

ดังนั้น $L\{ t^n \} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (2.6)

$n!$ หมายถึง แฟกทอเรียล n (Factorial n)

โดยที่ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\Gamma(n)$ หมายถึงแกมมาฟังก์ชัน n (Gamma function n) ซึ่งแกมมาฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กับแฟกทอเรียล n คือ

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \qquad (2.7)$$

ดังนั้นจาก (2.6) เขียนใหม่เป็น

$$L\{ t^n \} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad , \quad n > -1 \qquad (2.8)$$

ถ้า $f(t) = e^{at}$

$$L\{ e^{at} \} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-a} \quad ; \quad s > a \qquad (2.9)$$

ถ้า $f(t) = \sin at$

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

In' $\quad u = \sin at \quad ; \quad dv = e^{-st}\,dt$

$$du = a\cos at\, dt \quad ; \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt = \sin at\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(a\cos at\, dt)$$

$$= 0 + \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

In' $\quad u = \cos at \quad ; \quad dv = e^{-st}\,dt$

$$du = -a\sin at\, dt \quad ; \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^\infty \cos at\, e^{-st}\, dt = \cos at\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^a - \int_0^a \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)(-a\sin at\, dt)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt = \frac{a}{s}\left\{\frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt\right\}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt = \frac{a}{s^2}$$

$$\int_0^\infty \sin at\, e^{-st}\, dt = \frac{a}{s^2+a^2} \quad ; \quad s > o$$

หรือ $\quad L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad ; \quad s > o \qquad$ **(2.10)**

โดยวิธีเดียวกันนี้จะได้

$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s > o \qquad$ **(2.1)**

$$L\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad ; \quad s > |a| \tag{2.12}$$

และ

$$L\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2} \quad ; \quad s > |a| \tag{2.13}$$

การหาสูตรของสมการ (2.11), (2.12) และ (2.13) สามารถหาได้อีกวิธีหนึ่ง โดยกระจายเป็นฟังก์ชัน cos at, sinh (at) และ cosh (at) ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) แล้วใช้คุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ (linearity property of laplace transform) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไปนี้

ตารางการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเบื้องต้นบางฟังก์ชัน

	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	
1.	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ข้อสังเกต แฟกทอเรียล $n = n! = 1, 2, \ldots n$ และนิยาม $0! = 1$	$s > 0$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
5.	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
6.	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
7.	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
8.	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$

ตาราง 2.1

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้กำหนดให้ทุกฟังก์ชัน $f(t)$ สอดคล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎีบท 2–1 เพื่อว่าการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเหล่านั้นหาค่าได้

2.3 คุณสมบัติบางข้อของการแปลงลาปลาซ

2.3.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (linearity property)

ทฤษฎีบท 2·2 ถ้า a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ และ $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{\begin{aligned} L\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\} &= a_1 L\{f_1(t)\}+a_2 L\{f_2(t)\} \\ &= a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s) \end{aligned}} \qquad (2.14)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงปลาปลาซ

$$\begin{aligned} L\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty \{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\} e^{-st}\,dt \\ &= a_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st}\,dt + a_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st}\,dt \\ &= a_1 L\{f_1(t)\}+a_2 L\{f_2(t)\} \\ &= a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s) \end{aligned}$$

ซ.ต.พ.

คุณสมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริง เมื่อมีการขยายฟังก์ชันให้มากกว่าสองฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาค่าของ $L\{t^3+2\sin 3t-e^{-t}\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} L\{t^3+2\sin 3t-e^{-t}\} &= L\{t^3\}+2L\{\sin 3t\}-L\{e^{-t}\} \\ &= \frac{3!}{s^4}+2\left(\frac{3}{s^2+9}\right)-\frac{1}{s+1} \\ &= \frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^2+9}-\frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

2.3.2 คุณสมบัติการเลื่อนออกไป (Shifting property of first translation)

ทฤษฎีบท 2-3 ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) = F(s)\,\Big|_{s\to(s-a)}} \qquad (2.15)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= F(s-a)$$

$$= F(s)\,\Big|_{s\to(s-a)}$$

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.4 ถ้า $L[\sin 4t] = \dfrac{4}{s^2+16}$ จงหาค่าของ $L\{e^{3t}\sin 4t\}$

วิธีทำ

เพราะว่า $L\{\sin 4t\} = \dfrac{4}{s^2+16}$

ดังนั้น

$$L\{e^{3t}\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+16}\,\Big|_{s\to s-3}$$

$$= \frac{4}{(s-3)^2+16}$$

$$= \frac{4}{s^2-6s+25}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาค่าของ $L\{e^{-t}t^3\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{t^3\} = \dfrac{3!}{s4} = \dfrac{6}{s^4}$

ดังนั้น

$$L\{e^{-t}t^3\} = \frac{6}{s4}\,\Big|_{s\to s+1}$$

$$= \frac{6}{(s+1)^4}$$

f(t)	L{f(t)}	
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)' + b^2}$	$s > a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)' + b^2}$	$s>a$
$e^{at}\sinh (bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	$s > a + \|b\|$
$e^{at}\cosh (bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)' - b^2}$	$s > a + \|b\|$

2.3.3 คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล (Change of scale property)

ทฤษฎีบท 2-4 ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(s) \Big|_{s \to \frac{s}{a}}} \tag{2.16}$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)\, e^{-st}\, dt$$

ให้

$$at = x$$

$$dt = \frac{1}{a}\, dx$$

ดังนั้น

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty f(x)\, e^{-s\left(\frac{x}{a}\right)} \cdot \frac{1}{a}\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)\, e^{-(\frac{s}{a})x}\, dx$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$$

$$= \frac{1}{a} F(s) \Big|_{s \to \frac{s}{a}}$$ ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $L\{\frac{\sin t}{t}\} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$ จงหา $L\{\frac{\sin at}{t}\}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$L\{\frac{\sin at}{at}\} = \frac{1}{a} L\{\frac{\sin at}{t}\} \qquad \text{.......(A)}$$

ใช้ทฤษฎีบท 2.4

$$L\{\frac{\sin at}{at}\} = \frac{1}{a} L\{\frac{\sin t}{t}\} \Big|_{s \to \frac{s}{}}$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1}(\frac{1}{s}) \Big|_{s \to \frac{s}{a}}$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1}(\frac{1}{\frac{s}{a}}) \qquad \text{....... (B)}$$

ดังนั้น (A) = (B)

$$\frac{1}{a} L\{\frac{\sin at}{t}\} = \frac{1}{a} \tan^{-1}(\frac{a}{s})$$

หรือ $$L\{\frac{\sin at}{t}\} = \tan^{-1}(\frac{a}{s})$$

2.4 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (Laplace transforms of derivatives)

ทฤษฎีบท 2·5 ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง อนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้ก็เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชัน

ของอันดับชี้กำลัง และถ้า f(t) เข้าใกล้ f(0) ขณะที่ t เข้าใกล้ศูนย์ทางขวามือ (0^+) ดังนั้น การแปลงลาปลาซของ $f'(t)$ ถูกกำหนดโดยสูตร

$$\boxed{L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)} \qquad (2.17)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = e^{-st}$; $dv = f'(t)dt$

$du = -se^{-st}\, dt$; $v = f(t)$

ดังนั้น

$$L\{f'(t)\} = e^{-st}.f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -f(0) + sL\{f(t)\}$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0)$$ ซ.ต.พ.

จากสมการ (2.17) สามารถนำไปประยุกต์โดยกระทำซ้ำ ๆ ไปเรื่อย ๆ เพื่อหาค่าการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงกว่า จะได้

$$L\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

หรือ $$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad (2.18)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้

$$L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction) เพื่อขยายทฤษฎีบท 2-5 ให้กว้างขึ้น จึงเกิดทฤษฎีบท 2-6

ทฤษฎีบท 2-6 กำหนดให้ $f^{(k)}(t)$ เป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง สำหรับ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ และกำหนดว่า $f^{(n)}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $t \geqslant 0$ ดังนั้น $L\{f^{(n)}(t)\}$ หาค่าได้และนิยามเป็น

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)} \quad (2.19)$$

$$f'(t) = 2a \sin at \cos at$$

$$= a \sin 2at$$

จากสูตร $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

ดังนั้น $L\{f'(t)\} = aL\{\sin 2at\} = sL\{\sin^2 at\} - \sin^2(0)$

$$\frac{2a^2}{s^2+4a^2} = sL\{\sin^2 at\}$$

หรือ $L\{\sin^2 at\} = \dfrac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$; $s > o$

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาค่าของ $L\{t \sin at\}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$f(t) = t \sin at$$

$$f'(t) = \sin at + at \cos at$$

และ $$f''(t) = 2a \cos at - a^2 t \sin at$$

แต่ $$f(0) = f'(0) = 0$$

จากสูตร $$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$2aL\{\cos at\} - a^2 L\{t \sin at) = s^2 L\{t \sin at]$$

$$(s^2 + a^2) L\{t \sin at) = 2aL\{\cos at\}$$

$$= 2a \left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)$$

หรือ $$L\{t \sin at] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$$

2.5 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล (Laplace transforms of integrals)

ทฤษฎีบท 2-7 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง ดังนั้นการแปลงลาปลาซของอินทิกรัล $\int_a^t f(t)\,dt$ มีสูตรเป็น

$$\boxed{L\{\int_a^t f(t)\,dt\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)\,dt} \qquad (2.20)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงลาปลาซ

$$L\{\int^t f(t)\,dt] = \int_0^\infty [\int_a^t f(x)\,dx]\, e^{-st}\,dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $$u = \int_a^t f(x)\,dx \quad , dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = f(t)\,dt \quad , v = \frac{e^{-st}}{s}$$

แทนค่าจะได้

$$L\{\int^t f(t)\,dt] = (\frac{-e^{-st}}{s})(\int^t f(x)\,dx)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_a^0 f(x)\,dx + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น (dummy variable) ดังนั้น

$$L\{\int^t f(t)\,dt\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)\,dt$$ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่าของ $L\{\int_0^t x \sin x\,dx]$

วิธีทำ จากสมการ (2.20) และตัวอย่างที่ (2.8) จะได้

$$L\{\int_0^t x\sin x\,dx\} = \frac{1}{s}L\{t\sin t] + \frac{1}{s}\int_0^0 t\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{s}L\{t\sin t\}$$

$$= \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

2.6 การแปลงลาปลาซของ t^n คูณกับ f(t)

ทฤษฎีบท 2-8 ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเป็นฟังก์ชันของอันดับชี้กำลัง และถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

$$\boxed{L\{tf(t)\} = (-1)\frac{dF(s)}{ds}} \qquad (2.21)$$