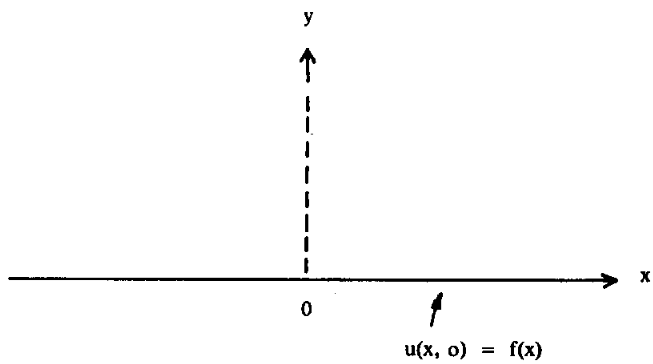
$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x+at)+\frac{1}{2} f(x-at)$$

ซึ่งเป็นคำตอบที่แท้จริงของสมการคลื่น

ในตัวอย่างต่อไป เราจะพิจารณาการใช้การแปลงฟูเรียร์เพื่อหาคำตอบของสมการลาปลาซ สำหรับระนาบครึ่ง (half-plane)

ตัวอย่างที่ 1.34 จงหาคำตอบ $u(x, t)$ ของสมการลาปลาซ สำหรับระนาบครึ่ง $y>0$ เมื่อ $u(x, o) = f(x)$ สำหรับ $-\infty<x<\infty$ ดูรูป 1.13



รูป 1.13 ระนาบครึ่งของตัวอย่างที่ 1.34

วิธีทำ จากสมการลาปลาซ

$$u_{xx}(x, y)+u_{yy}(x, y) = 0$$

ใช้การแปลงฟูเรียร์ เทียบกับตัวแปร x กล่าวคือ

$$U(s, y) = \mathcal{F}\{u(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{-isx}dx$$

กำหนดว่า $u(x, y)$ และ $u_x(x, y)$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t\to\pm\infty$ จะได้สมการของ $U(s, y)$ เหมือน (1.121)

$$\frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2}-s^2 U(s, y) = 0 \qquad (1.131)$$

คำตอบทั่วไปของ (1.131) คือ

$$U(s, y) = A(s)e^{sy} + B(s)e^{-sy} \qquad (1.132)$$

เราจะกำหนดว่า u(x, y) มีขอบเขต ขณะ $y \to +\infty$ เพราะฉะนั้น สำหรับ $s>0$ เราให้ $A(s) = 0$ และ

$$U(s, y) = B(s)e^{-sy} \qquad \text{สำหรับ } s>0 \qquad (1.133)$$

เพราะว่า

$$U(s, 0) = B(s)$$

เพราะฉะนั้น (1.133) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$U(s, y) = U(s, 0)e^{-sy} \qquad \text{สำหรับ } s>0 \qquad (1.134)$$

โดยวิธีเดียวกัน สำหรับ $s<0$ เราให้ $B(s) = 0$ ใน (1.132) จะได้

$$U(s, y) = A(s)e^{sy} \qquad \text{สำหรับ } s<0 \qquad (1.135)$$

อีกครั้งหนึ่ง เพราะว่า $U(s, 0) = A(s)$ จะเขียน (1.135) ใหม่เป็น

$$U(s, y) = U(s, 0)e^{sy} \qquad \text{สำหรับ } s<0 \qquad (1.136)$$

จากสมการ (1.134) และ (1.136) สามารถรวมเป็นสมการเดียว คือ

$$U(s, y) = U(s, 0)e^{-|s|y} \qquad (1.137)$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $u(x, 0) = f(x)$ เพราะฉะนั้น

$$U(s, 0) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-isx'}dx'$$

จาก (1.137)

$$U(s, y) = [\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-isx'}dx'] e^{-|s|y} \qquad (1.138)$$

คำตอบที่ต้องการ u(x, y) คือการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ (1.138) นั่นคือ

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{U(s, y)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, y)e^{isx}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-isx'}dx'] e^{-|s|y}ds \qquad (1.139)$$

สลับอันดับของการอินทิเกรต

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{[is(x-x')-|s|y]}ds\}dx' \qquad (1.140)$$

พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{[is(x-x')-|s|y]}ds = \int_{-\infty}^{0} e^{[is(x-x')-|s|y]}ds + \int_{0}^{\infty} e^{[is(x-x')-|s|y]}ds$$

$$= \frac{e^{is(x-x')+sy}}{i(x-x')+y}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{is(x-x')-sy}}{i(x-x')-y}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i(x-x')+y} - \frac{1}{i(x-x')-y}$$

$$= \frac{i(x-x')-y-i(x-x')-y}{-(x-x')^2-y^2}$$

$$= \frac{2y}{(x-x')^2+y^2} \qquad (1.141)$$

แทนค่า (1.141) ลงใน (1.140) สุดท้ายจะได้คำตอบคือ

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')\,dx'}{(x-x')^2+y^2} \qquad ; y>0 \qquad (1.142)$$

1.11 การใช้ประโยชน์ของการแปลงฟูเรียร์กับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

(Application of Fourier transform to linear differential equations)

ในการประยุกต์การแปลงฟูเรียร์กับสมการเชิงอนุพันธ์ จำเป็นต้องใช้การแปลงฟูเรียร์ผกผันของฟังก์ชันตักยะแท้ของ ω และฟังก์ชันตักยะแท้นี้ สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันตักยะของ $i\omega$ และแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ นั่นคือ แยกอยู่ในรูปผลรวมของพจน์คงที่ หารด้วย $(i\omega - a)^K$ ในเมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม เพื่อหาค่าการแปลงฟูเรียร์ผกผัน เราจะมีสูตรเป็น

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(i\omega - a)^k}\right\} = \begin{cases} \dfrac{t^{k-1}\, e^{at}}{(k-1)!} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \tag{1.143}$$

สำหรับ Re $a<0$, $k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(i\omega - a)^k}\right\} = \begin{cases} 0 & t>0 \\ \dfrac{-t^{k-1}\, e^{at}}{(k-1)!} & t<0 \end{cases} \tag{1.144}$$

สำหรับ Re $a>0$, $k = 1, 2, \ldots\ldots$

พิสูจน์ จากบทนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

ถ้าให้ $f(t) = e^{at}$ สำหรับ $t>0$ และ Re $a<0$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{e^{at}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}\, e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(i\omega-a)t}dt \qquad \text{เพราะว่า } t>0$$

$$= \left.\frac{-e^{-(i\omega-a)t}}{(i\omega-a)}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i\omega - a} \; ; \; \text{Re } a<0 \tag{1.145}$$

ถ้าให้ $f(t) = te^{at}$ สำหรับ $t>0$ และ $\text{Re } a<0$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{te^{at}\} = \int_{-\infty}^{\infty} te^{at} e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} te^{-(i\omega-a)t}dt \qquad \text{เพราะว่า } t>0$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = t$ และ $dv = e^{-(i\omega-a)t}dt$ เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{te^{at}\} = t\left(\frac{-e^{-(i\omega-a)t}}{(i\omega-a)}\right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}dt$$

$$= 0 + \frac{1}{(i\omega-a)}\left[\frac{-e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}\right]\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(i\omega-a)}\frac{1}{(i\omega-a)}$$

$$= \frac{1}{(i\omega-a)^2} \tag{1.146}$$

ถ้าให้ $f(t) = t^2e^{at}$ สำหรับ $t>0$ และ $\text{Re } a<0$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{t^2e^{at}\} = \int_0^{\infty} t^2e^{at} e^{-i\omega t}dt \; ; \; t>0$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = t^2$ และ $dv = e^{-(i\omega-a)}dt$ เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{t^2e^{at}\} = t^2\left(\frac{-e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}\right)\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}dt$$

$$= 0 + \frac{2}{i\omega-a}\int_0^{\infty} te^{-(i\omega-a)t}dt$$

$$= \frac{2}{i\omega-a}\frac{1}{(i\omega-a)^2}$$

$$= \frac{2}{(i\omega-a)^3} \tag{1.147}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าให้ $f(t) = t^3e^{at}$ สำหรับ $t>0$ และ $\text{Re } a<0$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{t^3e^{at}\} = \int_{-\infty}^{\infty} t^3e^{at}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^3e^{-(i\omega-a)t}dt \ ; \ t>0$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = t^3$ และ $dv = e^{-(i\omega-a)t}dt$ เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{t^3e^{at}\} = t^3\left(\frac{-e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}\right)\Big|_0^{\infty} + 3\int_0^{\infty}\frac{t^2e^{-(i\omega-a)t}}{i\omega-a}dt$$

$$= 0 + \frac{3}{(i\omega-a)}\int_0^{\infty} t^2e^{-(i\omega-a)t}dt$$

$$= \frac{3}{i\omega-a}\cdot\frac{2}{(i\omega-a)^3}$$

$$= \frac{6}{(i\omega-a)^4} \qquad (1.148)$$

ถ้าหาการแปลงฟูเรียร์ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งฟังก์ชัน

$$f(t) = t^{k-1}e^{at} \qquad \text{สำหรับ } t>0 \text{ และ Re } a<0$$

เราสามารถใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematic induction) ได้ว่า

$$\mathcal{F}\{t^{k1-}e^{at}\} = \frac{(k-1)!}{(i\omega-a)^k} \qquad (1.149)$$

หรือ

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(i\omega-a)^k}\right\} = \frac{t^{k-1}e^{at}}{(k-1)!} \qquad \text{สำหรับ } t>0$$

และ $\text{Re } a<0$ (1.150)

การแปลงทำซ้ำ (Iterated transform)

เพราะว่า $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรจริง ω ในเมื่อ $-\infty<\omega<\infty$ ดังนั้น เราสามารถเขียนการแปลงฟูเรียร์ (กำหนดว่าหาค่าได้) เป็น

$$\mathcal{F}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-it\omega}d\omega$$

$$= \psi(t) \ ; \ -\infty<t<\infty$$

หรือ $$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = \psi(t) \tag{1.151}$$

จากนิยามการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

แทนค่า t ด้วย $-t$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-it\omega}d\omega \tag{1.152}$$

หรือ $$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-it\omega}d\omega = 2\pi\, f(-t) \tag{1.153}$$

นั่นคือ

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = 2\pi\, f(-t) \tag{1.154}$$

สูตรนี้สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวดำเนินการสะท้อน (reflection operator) Ⓗ ซึ่งมีคุณสมบัติทำให้ $f(t)$ กลายเป็น $f(-t)$ นั่นคือ Ⓗ $[1+t-t^2] = 1-t+t^2$ ดังนั้น สูตรข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = 2\pi \text{ Ⓗ } [f(t)] \tag{1.156}$$

ถ้ากำหนดให้ $f(t) = e^{it}$ เราจะได้กฎเป็น

$$\text{Ⓗ } [\text{ Ⓗ } [f(t)]] = f \tag{1.157}$$

$$\mathcal{F}\{Ⓗ[f]\} = Ⓗ[\mathcal{F}\{f(t)\}] \tag{1.158}$$

การหาสูตร (1.144) สามารถหาได้ (1.143) โดยการแทนค่า ω ด้วย $-\omega$ t ด้วย $-t$ และ a ด้วย $-a$ และใช้กฎ (1.158)

ต่อไปเราจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+\dots+a_nx = g(t) \tag{1.159}$$

ใช้การแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้าง และกฎ $\mathcal{F}\{f^{(n)}\} = (i\omega)^n\mathcal{F}\{f\}$ ดังนั้น จะได้

$$[a_0(i\omega)^n+\dots+a_{n-1}(i\omega)+a^n]\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{g\}$$

หรือ $$\mathcal{F}\{x\} = \frac{1}{a_0(i\omega)^n+\dots+a_n}\mathcal{F}\{g\}$$

ให้ฟังก์ชันแปลง (transfer function) คือ

$$Y(s) = \frac{1}{a_0s^n+\dots+a_n}$$

ดังนั้นจะได้

$$\mathcal{F}\{x\} = Y(i\omega)\mathcal{F}\{g\} \tag{1.160}$$

สิ่งที่น่าสนใจสำหรับการประยุกต์ในหัวข้อนี้ คือ ในกรณีเสถียร เมื่อค่าเจาะจง (characteristic roots) ทุกค่ามีส่วนจริง (real part) เป็นจำนวนลบ เพราะฉะนั้น ตัวประกอบของส่วนของ Y(s) จะอยู่ในรูป $(s-a)^k$ และ Re $a<0$ ถ้าแยก Y(s) ออกเป็นเศษส่วนย่อยแล้วแทนค่า s ด้วย $i\omega$ เพราะฉะนั้น ผลรวมเชิงเส้นจะอยู่ในพจน์ของรูป

$$\frac{1}{(i\omega-a)^k}\ ;\ \text{Re } a<0$$

แต่ละพจน์จะหาการแปลงฟูเรียร์ผกผันได้ตาม (1.143) ดังนั้นเราสามารถเขียนเป็น

$$Y(i\omega) = \mathcal{F}\{W(t)\}$$

ตามความเป็นจริง จาก (1.143) พบว่า $Y(s) = L\{W(t)\}$ นั่นคือ $W(t) = 0$ สำหรับ $t<0$ จาก (1.160) สามารถเขียนในรูป

$$\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{W(t)\}\,\mathcal{F}\{g\}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{W*g\}$$

หรือ
$$x = W*g \tag{1.161}$$

ตัวอย่างที่ 1.35 จงแก้สมการ

$$x'' + 3x' + 2x = e^t$$

วิธีทำ ใส่การแปลงฟูเรียร์ตลอดสมการ

$$[(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2]\,\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{F}\{e^t\}$$

$$\mathcal{F}\{x\} = \frac{1}{(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2}\,\mathcal{F}\{e^t\}$$

ให้ฟังก์ชันแปลงคือ

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{1}{(s+1)\,(s+2)} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$Y(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1} - \frac{1}{i\omega+2}$$

สมการนี้เป็นสมการเสถียร (stable) เพราะว่าค่าเจาะจง (characteristic roots) เป็น -1 และ -2 เพราะฉะนั้น จะหา

$$W(t) = e^{-t} - e^{-2t} \qquad \text{สำหรับ } t>0$$

และ

$$W(t) = 0 \qquad \text{สำหรับ } t<0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x(t) &= W(t)*e^{t} \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-u} - e^{-2u})e^{t-u}du \\ &= e^{t}\left[\int_0^{\infty} e^{-2u}du - \int_0^{\infty} e^{-3u}du\right] \\ &= e^{t}\left[\frac{e^{-2u}}{-2}\Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-3u}}{-3}\Big|_0^{\infty}\right] \\ &= e^{t}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{e^{t}}{6} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาคำตอบโดยใช้ (1.161)

1. $x'' + 5x' + 6x = e^{3t}$

2. $x'' + 5x' + 6x = \cos t$

3. $x'' + 5x' + 6x = t$

4. $x'' + 5x' + 6x = g(t)$

ในเมื่อ $$g(t) = \begin{cases} e^{t} & \text{สำหรับ } t<0 \\ 0 & \text{สำหรับ } t>0 \end{cases}$$

5. $x'' + 4x' + 4x = g(t)$

ในเมื่อ $$g(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{สำหรับ } t<0 \\ 1 & \text{สำหรับ } t>0 \end{cases}$$

6. $x'' + 4x' + 4x = g(t)$

ในเมื่อ $$g(t) = \begin{cases} \sin t & \text{สำหรับ } t<0 \\ 0 & \text{สำหรับ } t>0 \end{cases}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1. $\frac{e^{3t}}{30}$

3. $\frac{6t-5}{36}$

5. $\frac{e^{2t}}{16}$ สำหรับ $t<0$

   $\frac{4-3e^{-2t}-4te^{-2t}}{16}$ สำหรับ $t \geqslant 0$