วิธีทำ จาก (1.86) และใช้เอกลักษณ์

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

ดังนั้น

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t + i \sin \omega t)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t\, d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t\, d\omega$$

ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่จะได้

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t\, d\omega$$

ข้อสังเกตอีกครั้งคือ การอินทิเกรต (1.87) ลู่เข้าสู่ $\delta(t)$ ในความหมายของฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

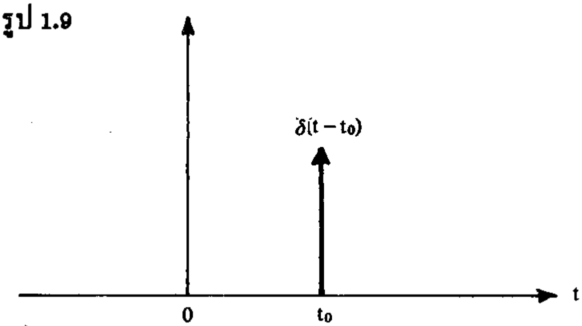
จากเอกลักษณ์ (1.86) และ (1.87) สามารถเขียนในรูปทั่วไปคือ

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, dx \qquad (1.88)$$

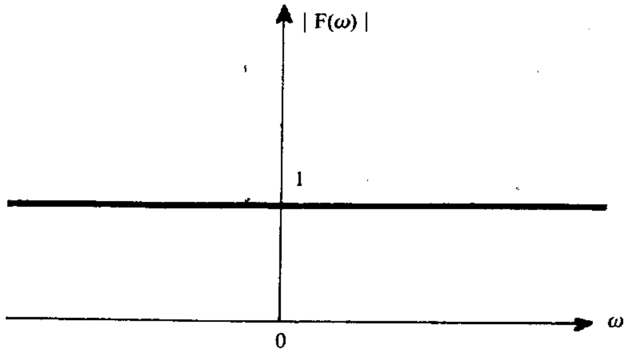
และ

$$\delta(y) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos (xy)\, dx \qquad (1.89)$$

ตัวอย่างที่ 1.27 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของการเลื่อนฟังก์ชันอิมพัลซออกไป $\delta(t - t_0)$ ซึ่งแสดงตามรูป 1.9



รูป 1.9 การเลื่อนฟังก์ชันอิมพัลซออกไป



รูป 1.10 การแปลงฟูเรียร์ของการเลื่อนฟังก์ชันอิมพัลซ์ออกไป

วิธีทำ ใช้ (1.66)

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= e^{-i\omega t}\Big|_{t = t_0}$$

$$= e^{-i\omega t_0} \qquad (1.90)$$

เพราะว่า $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ และจาก (1.45) นั้นคือ

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)\, e^{-i\omega t_0}$$

เพราะฉะนั้น จะได้

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = (1)\, e^{-i\omega t_0} = e^{-i\omega t_0} \qquad (1.91)$$

ซึ่งแสดงตามรูป 1.10

ตัวอย่างที่ 1.28 ใช้เอกลักษณ์ (1.88) และสัมพันธ์กัน (1.66) จงพิสูจน์สูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผัน นั่นคือ

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (1.92)$$

ในเมื่อ

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (1.93)$$

พิสูจน์ แทนค่า (1.93) ลงในด้านขวามือของ (1.92) จะได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right\} e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (1.94)$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสน จึงใช้ตัวแปรหุ่นที่แตกต่างกัน y สลับอันดับของการอินทิเกรต แล้วใช้ (1.88)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-y)}\, d\omega \right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \delta(t-y)\, dy$$

ใช้ (1.66) นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, \phi(t)\, dt \;=\; \phi(t_0)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-y)\, f(y)\, dy$$

$$= f(t) \qquad (1.95)$$

1.9.4 การแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชันคงที่ (The Fourier transform of a constant)

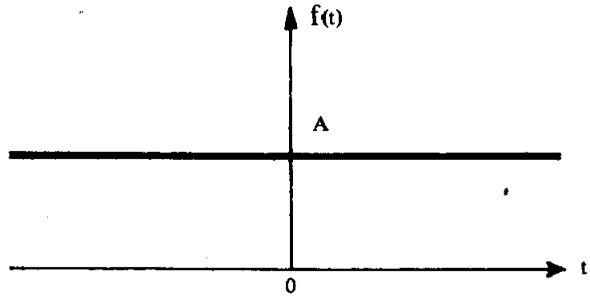
การหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(t) = A$ สังเกตว่าฟังก์ชันนี้ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไข

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\, |\, dt < \infty$$

ตัวอย่างที่ 1.29 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันคงที่

$$f(t) = A \qquad (1.96)$$

ซึ่งแสดงตามรูป 1.11



รูป 1.11 ฟังก์ชัน f(t) = A

วิธีทำ การแปลงฟูเรียร์ของ f(t) = A คือ

$$\mathcal{F}\{ f(t) \} = \mathcal{F}\{ A \} = \int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 2\pi A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega)t}\, dt \qquad (1.97)$$

จาก (1.88)

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, dx \qquad (1.98)$$

ให้ x = t และ y = $-\omega$ เพราะฉะนั้น

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(-\omega)}\, dt \qquad (1.99)$$

แทนค่า (1.99) ลงใน (1.97) จะได้

$$\mathcal{F}\{ A \} = 2\pi A\, \delta(-\omega) \qquad (1.100)$$

เพราะว่า จาก (1.73)

$$\delta(-\omega) = \delta(\omega)$$

เพราะฉะนั้น แทนค่า $\delta(-\omega)$ จะได้

$$\mathcal{F}\{ A \} = A\, 2\pi\, \delta(\omega) \qquad (1.101)$$

ให้ A = 1 ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{ 1 \} = 2\pi\, \delta(\omega) \qquad (1.102)$$

พิสูจน์อีกวิธีหนึ่ง จาก (1.85)

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

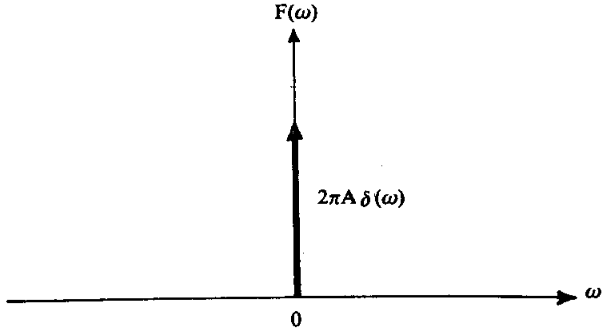
ใช้คุณสมบัติสมมาตรของการแปลงฟูเรียร์ นั่นคือ ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

เพราะฉะนั้น

$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\,\delta(\omega)$ ซึ่งแสดงตามรูป 1.12



รูป 1.12 การแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = A$

จากตัวอย่างนี้จะเน้นว่า $f(t) = A$ เป็นฟังก์ชันคงที่สำหรับทุกค่าของ t ดูรูป 1.11

ตัวอย่างที่ 1.30 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{i\omega_0 t}$

วิธีทำ จาก (1.102)

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)$$

และจาก (1.46)

$$\mathcal{F}\{f(t)\,e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega-\omega_0)$$

เพราะฉะนั้น การแปลงฟูเรียร์ของ $e^{i\omega_0 t}$ คือ

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \qquad (1.103)$$

ตัวอย่างที่ 1.31 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $\cos \omega_0 t$ และ $\sin \omega_0 t$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

และ (1.103) การแปลงฟูเรียร์ของ $\cos \omega_0 t$ คือ

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\} \\ &= \pi\,\delta(\omega - \omega_0) + \pi\,\delta(\omega + \omega_0) \qquad (1.104)\end{aligned}$$

โดยวิธีเดียวกัน เพราะว่า $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} &= \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2i}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})\} \\ &= \tfrac{1}{2i}[\,2\pi\,\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\,\delta(\omega + \omega_0)\,] \\ &= -i\pi\,\delta(\omega - \omega_0) + i\,\pi\,\delta(\omega_0 + \omega_0) \qquad (1.105)\end{aligned}$$

1.9.5 การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (The Fourier transform of a unit step function)

ตัวอย่างที่ 1.32 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $u(t)$ ซึ่งนิยามโดย

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } t > 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } t < 0 \end{cases} \qquad (1.106)$$

วิธีทำ ให้ $\mathcal{F}\{u(t)\} = F(\omega)$

ดังนั้น จาก (1.44)

$$\mathcal{F}\{u(-t)\} = F(-\omega) \qquad (1.107)$$

เพราะว่า

$$u(-t) = \begin{cases} 0 \text{ สำหรับ } t > 0 \\ 1 \text{ สำหรับ } t < 0 \end{cases} \tag{1.108}$$

เราจะได้

$$u(t) + u(-t) = 1 \text{ ยกเว้นที่ } t = 0$$

จากคุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงฟูเรียร์ และ (1.102)

$$\mathcal{F}\{u(t)\} + \mathcal{F}\{u(-t)\} = \mathcal{F}\{1\} \tag{1.109}$$

นั่นคือ

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) \tag{1.110}$$

กำหนดให้

$$F(\omega) = k\,\delta(\omega) + B(\omega) \tag{1.111}$$

ในเมื่อ $B(\omega)$ คือฟังก์ชันสามัญ และ k เป็นค่าคงที่ ดังนั้น เพราะว่า $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$

$$\begin{aligned} F(\omega) + F(-\omega) &= k\,\delta(\omega) + B(\omega) + k\,\delta(-\omega) + B(-\omega) \\ &= 2k\,\delta(\omega) + B(\omega) + B(-\omega) \\ &= 2\pi\,\delta(\omega) \end{aligned} \tag{1.112}$$

เพราะฉะนั้น เราสรุปว่า $k = \pi$ และ $B(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่
เพื่อหาค่าของ $B(\omega)$ จากผลของตัวอย่างที่ 1.23

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \tag{1.113}$$

ดังนั้น ตาม (1.47)

$$\mathcal{F}\{u'(t)\} = i\omega\, F(\omega) = i\omega\,[\pi\,\delta(\omega) + B(\omega)]$$

$$= \mathcal{F}\{\delta(t)\}$$

$$= 1 \tag{1.114}$$

เพราะว่า จาก (1.71)

$$\omega\delta(\omega) = 0$$

เพราะฉะนั้น จาก (1.114) จะเหลือ

$$i\omega\, B(\omega) = 1$$

นั่นคือ $$B(\omega) = \frac{1}{i\omega} \tag{1.115}$$

สุดท้ายจะได้ว่า

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \tag{1.116}$$

1.10 การใช้ประโยชน์ของการแปลงฟูเรียร์กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

(Application of Fourier transform to partial differential equations)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทำความตกลงคู่การแปลงฟูเรียร์คือ f(t) และ F(ω) ในเมื่อพจน์แรกแทนฟังก์ชันของเวลา และพจน์ที่สองแทนฟังก์ชันของความถี่ แต่การใช้การแปลงฟูเรียร์ไม่ได้มีความหมายจำกัดเพียงโดเมนของเวลาและความถี่เท่านั้น ดังนั้น ถ้าให้ฟังก์ชันf(x) และ F(s) เป็นคู่การแปลงฟูเรียร์ จะได้

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx \tag{1.117}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{isx}\, ds \tag{1.118}$$

ในตัวอย่างต่อไป จะประยุกต์โดยใช้เทคนิคการแปลงฟูเรียร์ เพื่อแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)

ตัวอย่างที่ 1.33 จงใช้เทคนิคการแปลงฟูเรียร์ หาค่าของระยะขจัด u(x, t) ของเส้นลวดยาวอนันต์ ซึ่งมีความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ และระยขจัดเริ่มต้นกำหนดเป็น f(x) สำหรับ $-\infty < x < \infty$

วิธีทำ ให้การแปลงฟูเรียร์ของคำตอบ u(x, t) เทียบกับ x เป็น

$$U(s, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}\, dx \tag{1.119}$$

ดังนั้น

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(s, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s, t)e^{isx}\, ds \tag{1.120}$$

กำหนดว่า คำตอบ $u(x, t)$ และ $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$ มีค่าน้อย สำหรับ $|x|$ ที่มีค่ามาก และ $x \to \pm\infty$

ให้ $$u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

โดยใช้การอินทิเกรตย่อยหลายครั้งหลายหน การแปลงฟูเรียร์ของ $u_{xx}(x, t)$ คือ

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t)e^{-isx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, du_x(x, t)$$

$$= e^{-isx} u_x(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + is \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-isx}\, dx$$

แต่ $u_x(x, t) \to 0$ เมื่อ $x \to \pm\infty$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(x, t)\} = is \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-isx}\, dx$$

$$= is \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, du(x, t)$$

$$= is\left[e^{-isx}u(x, t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + is \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx\right]$$

แต่ $u(x, t) \to 0$ เมื่อ $t \to \pm\infty$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(x, t)\} = (is)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= -s^2\mathcal{F}\{u(x, t)\}$$

$$= -s^2\, U(s, t) \tag{1.121}$$

การแปลงฟูเรียร์ของ $u_{tt}(x, t)$ คือ

$$\mathcal{F}\{u_{tt}(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(x, t)\}$$

$$= U_{tt}(s, t) \qquad (1,122)$$

ใช้การแปลงฟูเรียร์กับสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

และจาก (1.121) และ (1.122) จะได้

$$U_{tt}(s, t) = -s^2a^2 U(s, t)$$

หรือ $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(s, t) + s^2a^2 U(s, t) = 0 \qquad (1.123)$$

ซึ่งเป็นสมการสำหรับการแปลงของ $U(s, t)$
คำตอบทั่วไปของ (1.123) คือ

$$U(s, t) = A(s)e^{isat} + B(s)e^{-isat} \qquad (1.124)$$

ในเมื่อ $A(s)$ และ $B(s)$ เป็นค่าคงที่เมื่อเทียบกับ t ใช้การแปลงฟูเรียร์ของเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = U(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-isx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$$

$$= F(s) \tag{1.125}$$

$$U_t(s, 0) = \mathcal{F}\{u_t(x, t)|_{t=0}\} = 0 \tag{1.126}$$

จาก (1.125) และ (1.126) A(s) และ B(s) สามารถหาค่าได้ เพราะฉะนั้น

$$F(s) = U(s, 0) = A(s) + B(s)$$

และ

$$0 = U_t(s, 0) = isa\,[A(s) - B(s)]$$

แก้สมการพีชคณิตทั้งสอง จะหาค่า A(s) และ B(s) ได้เป็น

$$A(s) = B(s) = \frac{1}{2}F(s)$$

เพราะฉะนั้น จาก (1.124)

$$U(s, t) = \frac{1}{2}F(s)e^{isat} + \frac{1}{2}F(s)e^{-isat} \tag{1.127}$$

คำตอบที่แท้จริง u(x, t) คือการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ U(s, t) นั่นคือ

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(s, t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{F(s)e^{isat}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\{F(s)e^{-isat}\} \tag{1.128}$$

ใช้คุณสมบัติการเลื่อนเวลาออกไป (time-shifting property) ของการแปลงฟูเรียร์ผกผัน จะได้

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)e^{isat}\} = f(x + at) \tag{1.129}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)e^{-isat}\} = f(x - at) \tag{1.130}$$

แทนค่าใน (1.128) ดังนั้น