$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos k\omega}{\omega}\sin\omega t\, d\omega \qquad (t>0)$$

8. ใช้สูตรฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัล แสดงว่า

$$e^{-t}\cos t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^3\sin\omega t}{\omega^4+4}\, d\omega \qquad (t>0)$$

9. ใช้สูตรฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัล และพิสูจน์ว่า

$$e^{-t}\cos t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\, d\omega \qquad (t\geqslant 0)$$

10. กำหนดให้

$$e^{-kt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{\omega^2+k^2}\, d\omega \qquad (t>0,\ k>0)$$

และ $e^{-mt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{\omega^2+m^2}\, d\omega \qquad (t\geqslant 0,\ m>0)$

จงแสดงว่า

$$e^{-t}-e^{-2t} = \frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\, d\omega \qquad (t\geqslant 0)$$

11. ใช้ผลการประสานหาค่าของ $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right\}$

12. จงหาค่าของ $f(t)$ จากข้อ (11) โดยกระจาย $F(\omega)$ ออกเป็นเศษส่วนย่อย

13. กำหนดให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียน (Gaussian functions) นั่นคือ

$$f_1(t) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{t^2/2\sigma_1^2},\quad f_2(t)\ \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

จงแสดงว่า ถ้า $f_3(t) = f_1(t)*f_2(t)$ ดังนั้น $f_3(t)$ เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียนด้วย และ

$$f_3(t) = \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\sigma_3^2} \text{ เมื่อ } \sigma_3^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2$$

14. กำหนดให้ $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ และ $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ จงพิสูจน์ว่า

(ก) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$

(ข) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, d\omega$

(ค) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega$

15. (ก) จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ

$$f(t) = \frac{1}{2\varepsilon},\ t \leqslant \varepsilon$$
$$= 0\ ;\ t > \varepsilon$$

(ข) จงหาค่าของการแปลงฟูเรียร์ เมื่อ $\varepsilon \to 0^+$

16. (ก) จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ

$$f(t) = 1 - t^2\ ;\ |t| < 1$$
$$= 0\ ;\ |t| > 1$$

(ข) จงหาค่าของ $\int_{0}^{\infty} \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^3}\right) \cos\frac{t}{2}\, dt$

17. ถ้า $f(t) = 1 \qquad 0 \leqslant t < 1$ จงหาค่าของ

$\qquad = 0 \qquad t \geqslant 1$

(ก) การแปลงฟูเรียร์ไซน์

(ข) การแปลงฟูเรียร์โคไซน์

18. ใช้ผลจากข้อ (17) จงแสดงว่า

(ก) $\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$

(ข) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$

19. จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$ โดยใช้ทฤษฎีบทของปาร์เซวาล

{ แนะนำ : ใช้การแปลงฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน e^{-t} เมื่อ $t>0$ }

20. จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2\,dt}{(a^2+t^2)^2}$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

{ แนะนำ : ใช้ผลจากข้อ (4) แทนในทฤษฎีบทของปาร์เซวาล }

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

3.) $\frac{1}{2i}\{F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\}$

4.) $\frac{2a}{a' + \omega^2}$

5.) $(\frac{\pi}{a})\, e^{-a|\omega|}$

11.) $(e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)$

12.) คำตอบเหมือนข้อ 11

15.) (ө) $\frac{\sin\omega^3}{\omega^3}$ (ป) 1

16.) (ก) $\frac{-4(\omega\ \cos w - \sin w)}{\omega^3}$ (ข) $\frac{-3\pi}{16}$

17.) (ก) $\frac{1-\cos\omega}{\omega}$ (ข) $\frac{\sin w}{\omega}$

19.) $\frac{n}{4}$

20.) $\frac{\pi}{2a}$, $\frac{\pi}{2}$

1.9 การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันพิเศษ (Fourier transforms of special functions)

1.9.1 ฟังก์ชัน อิมพัลซ (impulse function)

ฟังก์ชันอิมพัลซหนึ่งหน่วย $\delta(t)$ หรือที่รู้จักในอีกชื่อหนึ่งว่า ฟังก์ชันเดลต้า (delta function) ซึ่งอาจนิยามในหลาย ๆ ทาง บ่อย ๆ ที่ฟังก์ชันเดลต้าแสดงความหมายโดยกล่าวว่า

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \neq 0 \\ \infty & \text{ถ้า } t = 0 \end{cases} \tag{1.63}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1, \quad \varepsilon > 0 \tag{1.64}$$

สมการ (1.63) แสดงว่า $\delta(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นที่ $t = 0$ มันจะมีค่าเข้าใกล้อนันต์ ดังนั้นทำให้ (1.64) หมดความข้องใจ

ฟังก์ชันเดลต้าสามารถนิยามในพจน์ของคุณสมบัติอินทิกรัลของมันเดี่ยว ๆ ได้ นี่คือบทนิยามที่เราจะนำไปใช้ ต่อไป $\delta(t)$ จะนิยามในความหมายของฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalize function) หรือ ฟังก์ชันเป็นนัย (symbolic function)

ให้ฟังก์ชัน $\phi(t)$ เรียกว่า ฟังก์ชันทดสอบ (test function) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและหายไปภายนอกช่วงจำกัด ดังนั้น δ ฟังก์ชัน นิยามเป็นฟังก์ชันเป็นนัย โดยกล่าวว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0) \tag{1.65}$$

(1.65) ไม่มีความหมายเหมือนอินทิกรัลสามัญ แทนอินทิกรัลและฟังก์ชัน $\delta(t)$ ด้วยจำนวน $\phi(0)$

ตามความเข้าใจ (1.65) จะกลายเป็นว่า $\delta(t)$ สามารถควบคุมราวกับว่า $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันสามัญ ยกเว้นว่าเราจะไม่พูดถึงค่าของ $\delta(t)$ แต่จะพูดถึงค่าของอินทิกรัลที่เกี่ยวข้องกับ $\delta(t)$ แทน

ตัวอย่างที่ 1.16 จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t+t_0)\,dt = \phi(t_0) \tag{1.66}$$

และ $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(\frac{t}{a})dt = \frac{1}{|a|}\phi(0) \qquad (1.67)$$

พิสูจน์ โดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $T = t - t_0$ เพราะฉะนั้น $t = T + t_0$ และ $dt = dT$ แทนค่าจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(T)\,\phi(T+t_0)dT$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi(t+t_0)dt$$

$$= \phi(t+t_0)\,|_{t=0}$$

$$= \phi(t_0)$$

โดยวิธีเดียวกัน ให้ $at = T$ จะได้ $t = \frac{T}{a}$ และ $dt = \frac{1}{a}dT$ ต่อไปพิจารณาค่าของ a ใน 2 กรณี กล่าวคือ

กรณีที่ $a > 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(T)\phi(\frac{T}{a})dT$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(\frac{t}{a})dt$$

$$= \frac{1}{|a|}\phi(\frac{t}{a})\,|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

ในกรณีที่ $a < 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} \delta(T)\phi(\frac{T}{a})dT$$

$$= \frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(T)\phi(\frac{T}{a})dT$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi(\frac{t}{a})dt$$

$$= \frac{1}{|a|}\phi(\frac{t}{a})\,|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{|a|}\phi(0) \qquad \#$$

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\,\phi(0)\ ;\ a \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 1.17 พิจารณาฟังก์ชัน $g(t)$ ซึ่งต่อเนื่องที่ $t = t_0$ ถ้า $a<b$ ดังนั้น จงแสดงว่า

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,g(t)dt = \begin{cases} g(t_0) & \text{สำหรับ } a<t_0<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases} \qquad (1.68)$$

พิสูจน์ อินทิกรัล

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,g(t)dt$$

จะแปลความหมายเป็นดังนี้ ถ้าเลือกฟังก์ชันทดสอบ $\phi(t)$ ซึ่ง

$$\phi(t) = \begin{cases} g(t) & \text{สำหรับ } a<t<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases}$$

ดังนั้นจาก (1.66)

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\phi(t)dt = \phi(t_0)$$

$$= \begin{cases} g(t_0) & \text{สำหรับ } a<t_0<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 1.18 ถ้า $a<b$ จงแสดงว่า

$$\int_a^b \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } a<t_0<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases} \tag{1.69}$$

พิสูจน์ พิจารณาเหมือนตัวอย่างที่ 1.17 ถ้าเราเลือกฟังก์ชันทดสอบ $\phi(t)$ จนกระทั่ง

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } a<t<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases}$$

ดังนั้น จาก (1.66)

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(t-t_0)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt, \\ &= \phi(t_0) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } a<t_0<b \\ 0 & \text{สำหรับ } b<t_0,\ t_0<a \end{cases} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.19 จงแสดงว่า

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t) \tag{1.70}$$

ในเมื่อ $f(t)$ ต่อเนื่องที่จุด $t = 0$ เพราะฉะนั้น จงแสดงว่า

$$t\,\delta(t) = 0 \tag{1.71}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.72}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{1.73}$$

พิสูจน์ ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\, f(t)\delta(t)\,]\, \phi(t)\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, [\, f(t)\, \phi(t)\,]\, dt$$

$$= \; f(t)\, \phi(t)\, \Big|_{t=0}$$

$$= \; f(0)\, \phi(0)$$

$$= \; f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \phi(t)\, dt$$

$$= \; \int_{-\infty}^{\infty} [\, f(0)\delta(t)\,]\phi(t)\, dt \qquad (1.74)$$

เพราะว่า $\phi(t)$ เป็นฟังก์ชันทดสอบตามใจชอบ เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า

$f(t)\,\delta(t) \;=\; f(0)\,\delta(t)$

จากผลลัพธ์นี้มันชัดแจ้งว่า ถ้าให้ $f(t) = t$ จะได้

$t\,\delta(t) \;=\; 0$

จาก (1.67)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\, \phi(t)\, dt \;=\; \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

$$= \; \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \phi(t)\, dt$$

$$= \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\delta(t)\, \phi(t)\, dt$$

$$\delta(at) \;=\; \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

ให้ $a = -1$ ในผลลัพธ์ข้างบน

$$\delta(-t) \;=\; \delta(t)$$

ซึ่งแสดงว่า $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

1.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเดลต้า (derivatives of the δ – function)

อนุพันธ์ $\delta'(t)$ ของ $\delta(t)$ นิยามโดยอินทิกรัล

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi'(t)\,dt = -\phi'(0) \tag{1.75}$$

ในเมื่อ

$$\delta'(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}, \quad \phi'(0) = \frac{d\phi}{dt}\Big|_{t=0}$$

สมการ (1.75) แสดงว่า $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป ซึ่งกำหนดค่า $-\phi'(0)$ ถึงฟังก์ชันทดสอบ $\phi(t)$

อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน $\delta(t)$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$$

สามารถนิยามคล้ายกับ (1.75) โดยการใช้ประโยชน์ของ (1.75) ซ้ำ ๆ นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\,\phi(t)\,dt = (-1)^n\,\phi^{(n)}(0) \tag{1.76}$$

ในเมื่อ

$$\phi^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n}\phi(t)\Big|_{t=0} \tag{1.77}$$

ตัวอย่างที่ 1.20 จงแสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt \tag{1.78}$$

ตรงกับบทนิยามสามัญของอนุพันธ์ของ f(t) ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันสามัญ อนุพันธ์อันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง

พิสูจน์ พิจารณาอินทิกรัล กำหนดโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts)

ให้ $\quad u = \phi(t) \quad , dv = f'(t)\,dt$

$\quad du = \phi'(t)\,dt \; , \quad v = f(t)$

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt = f(t)\,\phi(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt$$

สังเกตว่าฟังก์ชันทดสอบ $\phi(t)$ จะหายไปภายนอกของบางช่วง นั่นคือ $\phi(t)$ จะเป็นศูนย์เมื่อ $t = \pm\infty$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt$$

พึงสังเกตว่าอนุพันธ์ $f'(t)$ ของฟังก์ชันวางนัยทั่วไปตามใจชอบ (arbitrary generalized function) $f(t)$ นิยามโดย (1.78)

ตัวอย่างที่ 1.21 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น จงแสดงว่า กฎผลคูณ

$$[\,f(t)\delta(t)\,]' = f(t)\,\delta'(t) + f'(t)\,\delta(t) \tag{1.79}$$

ยังคงสมบูรณ์

พิสูจน์ ใช้ (1.78) เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} [\,f(t)\,\delta(t)\,]'\,\phi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} [\,f(t)\delta(t)\,]\,\phi'(t)\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,[\,f(t)\,\phi'(t)\,]\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\{\,[\,f(t)\,\phi(t)\,]' - f'(t)\,\phi(t)\,\}\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,[\,f(t)\,\phi(t)\,]'\,dt \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,[\,f'(t)\,\phi(t)\,]\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,[\,f(t)\,\phi(t)\,]\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\,\delta(t)\,f'(t)\,]\,\phi(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\, \delta'(t)\, f(t) + \delta(t)\, f'(t)\,]\, \phi(t)\, dt$$

เพราะฉะนั้น

$$[\, f(t)\, \delta(t)\,]' = f(t)\, \delta'(t) + f'(t)\, \delta(t)$$

ตัวอย่างที่ 1.22 จงพิสูจน์ว่า

$$f(t)\, \delta'(t) = f(0)\, \delta'(t) - f'(0)\, \delta(t) \tag{1.80}$$

พิสูจน์ จาก (1.79) เพราะว่า

$$[\, f(t)\delta(t)\,]' = f(t)\, \delta'(t) + f'(t)\, \delta(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t)\, \delta'(t) = [\, f(t)\, \delta(t)\,]' - f'(t)\, \delta(t) \tag{1.81}$$

เพราะว่า จาก (1.70)

$$f(t)\, \delta(t) = f(0)\, \delta(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$f'(t)\, \delta(t) = f'(0)\, \delta(t)$$

$$[\, f(0)\, \delta'(t)\,]' = f(0)\, \delta'(t)$$

แทนค่าใน (1.81) ดังนั้น

$$f(t)\, \delta'(t) = f(0)\, \delta'(t) - f'(0)\, \delta(t)$$

ตัวอย่างที่ 1.23 จงแสดงว่าฟังก์ชันเดลต้า คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน u(t) ซึ่งนิยาม โดยกล่าวว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \phi(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)\, dt \tag{1.82}$$

พิสูจน์ จาก (1.78) จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\, \phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \phi'(t)\, dt$$

แต่จาก (1.82)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt$$

$$= -[\phi(\infty) - \phi(0)]$$

$$= \phi(0) \text{ เพราะว่า } \phi(\infty) = 0$$

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt$$

ผลที่จะตามมาคือ

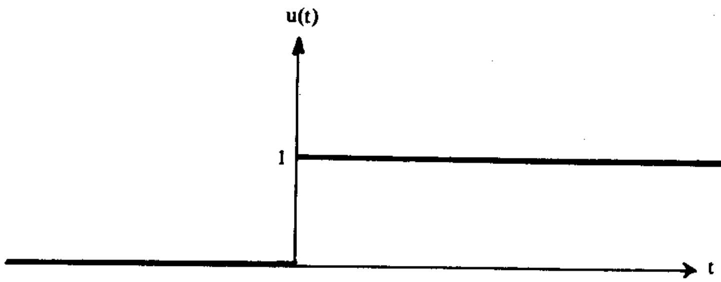
$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

ฟังก์ชันวางนัยทั่วไป หรือฟังก์ชันเป็นนัย $u(t)$ นิยามโดย (1.82) เป็นที่รู้จักเหมือนฟังก์ชันเฮวีไซด์หนึ่งหน่วย (Heaviside unit function) หรือฟังก์ชันชั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function) ซึ่งนิยามตามรูป 1.6

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } t > 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } t < 0 \end{cases}$$

และหาค่าไม่ได้เมื่อ $t = 0$

ข้อสังเกต อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $u(t)$ จะมีค่าเป็นศูนย์สำหรับ $t < 0$ และ $t > 0$



รูป 1.6 ฟังก์ชันเฮวีไซด์หนึ่งหน่วยหรือ ฟังก์ชันขั้นบันได หนึ่งหน่วย

1.9.3 การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลซ

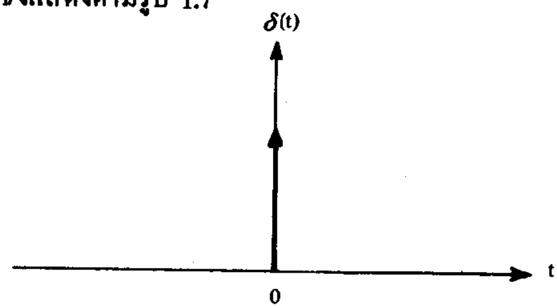
เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการหาค่าของการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f(t) กำหนด

โดย $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \qquad (1.83)$$

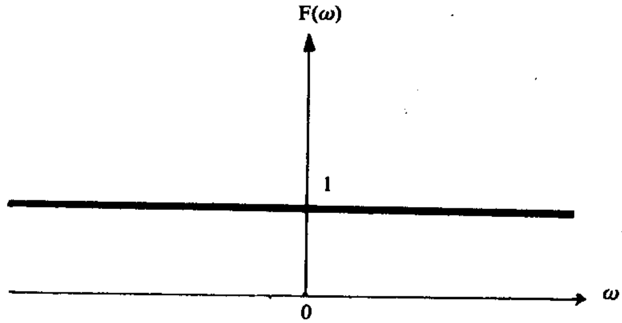
พูดได้อีกอย่างคือ สัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f(t) สามารถอินทิเกรตได้ (absolutely integrable) ในช่วง $(-\infty, \infty)$

ฟังก์ชัน เช่น $\sin \omega t$ $\cos \omega t$ ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย u(t) เป็นต้น ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไขข้างบน จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือการหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเหล่านี้ และนิยามการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันวางนัยทั่วไปด้วย ดังเช่นฟังก์ชันอิมพัลซ $\delta(t)$ และอนุพันธ์ของมัน $\delta'(t)$ ดูจากหัวข้อ 1.9.2

ตัวอย่างที่ 1.24 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลซหนึ่งหน่วย (unit impulse function) $\delta(t)$ ซึ่งแสดงตามรูป 1.7



รูป 1.7 ฟังก์ชันอิมพัลซหนึ่งหน่วย



รูปที่ 1.8 การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลซหนึ่งหน่วย

วิธีทำ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์ กำหนดให้

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (1.84)$$

และจากการพิจารณาในหัวข้อ 1.9.2 เราได้บทนิยาม

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}$$

$$= 1 \qquad (1.85)$$

เพราะฉะนั้น การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลซหนึ่งหน่วยมีค่าเป็นหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1.25 จงหาเอกลักษณ์ของ

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (1.86)$$

วิธีทำ ใช้สูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผัน (1.8) และ (1.85)

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

ข้อควรสังเกตคือ การอินทิเกรตสามัญของ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$ ไม่มีความหมาย แต่เราจะแปลความหมาย (1.86) เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป หรือฟังก์ชันเป็นนัยแทน นั่นคือการอินทิเกรตของ (1.86) ลู่เข้าสู่ $\delta(t)$ ในความหมายของฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

ตัวอย่างที่ 1.26 จงหาอินทิกรัลที่ใช้แทนค่าของ $\delta(t)$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos \omega t\, d\omega \qquad (1.87)$$