1.6.4 ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(t-t_o)\} = F(\omega)\, e^{-i\omega t_o} \tag{1.45}$$

เมื่อ to เป็นค่าคงที่

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{f(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_o)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

ให้ $t-t_o = x$, $dt = dx$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t-t_o)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega(x+t_o)}\, dx \\
&= e^{-i\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \\
&= e^{-i\omega t_o} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= e^{-i\omega t_o}\, F(\omega)
\end{aligned}$$

ซ.ต.พ.

1.6.5 ถ้า ω_0 เป็นค่าจริงคงที่ และ $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega-\omega_0) \tag{1.46}$$

พิสูจน์ จากนิยามจากการแปลงฟูเรียร์

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)e^{i\omega_0 t}\} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt \\
&= F(\omega-\omega_0)
\end{aligned}$$

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.10 ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t)\cos\omega_0 t$

วิธีทำ เพราะว่า $\cos\omega_0 t = \dfrac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$

เพราะฉะนั้น $\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\frac{1}{2} f(t)\, e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-i\omega_0 t}\}$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\}$$

$$= \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$ ซ.ต.พ.

1.6.6 ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ และ $f(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \pm\infty$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\, F(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad (1.47)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

อินทิเกรตทีละส่วน โดยให้ $u = e^{-i\omega t}$ และ $dv = f'(t)\, dt$ จะได้

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

แต่โจทย์กำหนดว่า $f(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \pm\infty$ นั่นคือ

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= i\omega\, F(\omega)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าหาค่า การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f''(t)$, $f'''(t)$,... ไปเรื่อย ๆ แล้วใช้ (1.47) เข้าประยุกต์ จะได้

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad (1.48)$$

ข้อสังเกต จะไม่รับรองการหาค่าได้ของการแปลงฟูเรียร์ของ $f^{(n)}(t)$ เพียงแต่แสดงว่า ถ้าการแปลงฟูเรียร์หาค่าได้ มันจะมีค่าเท่ากับ $(i\omega)^n F(\omega)$

1.7 ผลการประสาน (Convolution)

นิยาม : กำหนดให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นสองฟังก์ชัน ผลการประสานของฟังก์ชัน $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ นิยามเป็น

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f(t) = f_1(t)*f_2(t)$$

ดังนั้น

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx \qquad (1.49)$$

คุณสมบัติผลการประสาน (Properties of convolution)

1. ผลการประสานเป็นไปตามกฎการสลับที่ (commutative law) นั่นคือ

$$f_1(t)*f_2(t) = f_2(t)*f_1(t) \qquad (1.50)$$

พิสูจน์ จากนิยามผลการประสาน

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx$$

เปลี่ยนตัวแปร โดยสมมุติให้ $t-x = y$ จะได้

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y)\, f_2(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\, f_1(t-y)\, dy$$

$$= f_2(t)*f_1(t)$$ ซ.ต.พ.

2. ผลการประสานเป็นไปตามกฎเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law) นั่นคือ

$$\{f_1(t)*f_2(t)\}*f_3(t) = f_1(t)*\{f_2(t)*f_3(t)\} \qquad (1.51)$$

พิสูจน์ สมมุติให้

$$f_1(t)*f_2(t) = g(t)$$

และ $$f_2(t)*f_3(t) = h(t)$$

จาก (1.51) เขียนใหม่ได้

$$g(t)*f_3(t) = f_1(t)*h(t) \qquad (1.52)$$

เพราะว่า $$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\, f_2(t-y)\, dy$$

ดังนั้น

$$g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, dy \}\, f_3(t-x)\, dx$$

สลับอันดับของอินทิเกรต แล้วแทนค่า $z = x-y$

$$g(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\, f_3(t-z-y)\, dz \}\, dy \qquad (1.53)$$

เพราะว่า $$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\, f_3(t-z)\, dz$$

จะได้

$$h(t-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z)\, f_3(t-y-z)\, dz$$

แทนค่า $h(t-y)$ ลงใน (1.53) ได้

$$g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\, h(t-y)\, dy$$

$$= f_1(t) * h(t)$$

นั่นคือ

$$\{ f_1(t) * f_2(t) \} * f_3(t) = f_1(t) * \{ f_2(t) * f_3(t) \}$$ ซ.ต.พ.

ทฤษฎีบท "time convolulution" กล่าวว่า ถ้า $\mathcal{F}\{ f_1(t) \} = F_1(\omega)$ และ $\mathcal{F}\{ f_2(t) \} = F_2(\omega)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{ f_1(t) * f_2(t) \} = F_1(\omega)\, F_2(\omega) \qquad (1.54)$$

พิสูจน์ นิยามการแปลงฟูเรียร์ของ $f_1(t) * f_2(t)$ คือ

$$\mathcal{F}\{ f_1(t) * f_2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx \}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

สลับอันดับของอินทิเกรต

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)\, e^{-i\omega t}\, dt \}\, dx$$

จากคุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์ (1.45)

$$\int_{\infty}^{\infty} f_2(t-x)\, e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\{ f_2(t-x) \}$$

$= F_2(\omega)\, e^{-i\omega x}$ เมื่อ x เป็นค่าคงที่ชั่วขณะ (instantaneous constant)

ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{ f_1(t) * f_2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, F_2(\omega)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \}\, F_2(\omega)$$

$$= \{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \}\, F_2(\omega)$$

$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$ ซ.ต.พ.

ทฤษฎีบท "frequency convolution" กล่าวว่า ถ้า $\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega)\} = f_1(t)$ และ $\mathcal{F}^{-1}\{F_2(\omega)\} = f_2(t)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = 2\pi\, f_1(t)\, f_2(t) \tag{1.55}$$

หรือ
$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, F_2(\omega - y)\, dy \tag{1.56}$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, F_2(\omega - y)\, dy\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, F_2(\omega - y)\, dy\right\} e^{i\omega t}\, d\omega$$

สลับอันดับของอินทิเกรต แล้วแทนค่า

$$w - y = x$$
$$d\omega = dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)\, e^{i(x+y)t}\, dx\right\} dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, e^{iyt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)\, e^{ixt}\, dx\right\} dy$$
$$= 2\pi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\right\}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\right\}$$
$$= 2\pi\, f_1(t) \cdot f_2(t)$$

นั่นคือ

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$ ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหาค่าของ $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{(1+i\omega)^2}\}$ โดยใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน

วิธีทำ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$= \frac{1}{(1+i\omega)^2}$$

$$= \frac{1}{1+i\omega} \cdot \frac{1}{1+i\omega}$$

$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

จากตัวอย่างที่ 1.7

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha+i\omega}$$

หรือ $\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{\alpha+i\omega}\} = e^{-\alpha t}$

เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{1+i\omega}\} = e^{-t}u(t)$$

$u(t)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function) ซึ่งนิยามเป็น

$$u(t) = 0 \text{ เมื่อ } t < 0$$
$$= 1 \text{ เมื่อ } t > 0$$

และอธิบายไม่ได้ เมื่อ $t = 0$

ดังนั้น ใช้ทฤษฎีผลการประสาน (1.54) จะได้

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}u(x) \cdot e^{-(t-x)}u(t-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, u(x)\,u(t-x)\,dx$$

จากอินทิกรัลข้างบน ตัวถูกอินทิเกรตมีตัวประกอบ ฆ(x) ฆ(−x) เพราะว่า
$u(x) = 0$ เมื่อ $x < 0$ และ $u(t-x) = 0$ เมื่อ $x > t$

$$u(x)\,u(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \text{ และ } x > t \\ 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < t \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น

$$f(\,) = \int_0^t e^{t}\,ฆ$$

$$= e^{-t} \cdot x \Big|_0^t$$

$$= t\,e^{-t}\,u(t)$$

ตัวอย่างที่ 1.12 (ก) จงหาแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } |t| < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } |t| > 1 \end{cases}$$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) แสดงว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{ f(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} (0)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-1}^{1} (1)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{1}^{\infty} (0)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-e^{-i\omega t}}{i\omega} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

$$= \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2 \sin w}{w}$$

แทนค่า ω ด้วย $-\omega$ จะได้

$$F(-W) = \frac{2 \sin(-w)}{-\omega}$$

$$= \frac{2 \sin w}{w}$$

$$= F(\omega)$$

นั่นคือ $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่

จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, dw$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,(\cos wt + i \sin wt)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos wt\, dw + \frac{i}{2n}\int_{-\infty}^{"} F(\omega) \sin wt\, dw$$

เพราะว่า $F(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นอินทิกรัล พจน์ที่สองจะมีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t\, d\omega$$

(ข) ให้ $t = 0$

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{"}\frac{\sin w}{\omega}\, d\omega$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega$$

นั่นคือ

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin \omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.13 (ก) จงหาการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ของฟังก์ชัน $f(t) = e^{-mt}$ เมื่อ $m > 0$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\cos pv}{v^2+\beta^2}\,dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}\ ; p > 0 \text{ และ } \beta > 0$$

วิธีทำ (ก) สูตรการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos \omega t\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-mt}\cos \omega t\, dt$$

$$= \frac{m}{m^2+\omega^2} \qquad \text{(ตามตัวอย่างที่ 1.9)}$$

(ข) สูตรการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ผกผัน

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos \omega t\, d\omega$$

$$e^{-mt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m^2+\omega^2}\cos \omega t\, d\omega$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{m^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2m} e^{-mt}$$

แทนค่า $\omega = v,\ t = p$ และ $m = \beta$ จะได้

$$\int_0^\infty \frac{\cos pv}{v^2+\beta^2}\,dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}\ :\ p > 0, \beta > 0$$

1.8 ทฤษฎีบทของปาร์เซวาล (Parseval's theorem)

ถ้า $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ และ $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f_1(t)\cdot f_2(t)\}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)\,d\omega \qquad (1.57)$$

พิสูจน์ จาก (1.56)

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, F_2(\omega - y)\, dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f_1(t) \cdot f_2(t)\}\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) \cdot F_2(\omega - y)\, dy$$

แทนค่า $\omega = 0$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\, F_2(-y)\, dy$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่นของอินทิกรัลทางขวามือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2(-\omega)\, d\omega$$ ซ.ต.พ.

ถ้ากำหนดให้ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ และ $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2^{*}(\omega)\, d\omega \qquad (1.58)$$

เมื่อ $F_2^{*}(\omega)$ คือ สังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ $F_2(\omega)$

พิสูจน์ จาก (1.20) ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง จะได้

$$F(-\omega) = F^{*}(\omega)$$

จาก (1.57)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2(-\omega)\, d\omega$$

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2^{*}(\omega)\, d\omega$$ ซ.ต.พ.

ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (Parseval's theorem) กล่าวว่า ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \qquad (1.59)$$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\, e^{i\omega t}\}^*\, dt$$

$$= \{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(-\omega)t}\, dt\}^*$$

$$= F^*(-\omega)$$

ช.ต.พ.

จาก (1.57) ถ้าให้ $f_1(t) = f(t)$ และ $f_2(t) = f^*(t)$ ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, f^*(t)\, dt = \frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, F^*\{-(-\omega)\}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, F^*(\omega)\, d\omega$$

เพราะว่า $f(t)\, f^*(t) = |f(t)|^2$

และ $F(\omega)\, F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

ช.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.14 จงแสดงว่า

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi a}{2}$$

โดยใช้ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล เมื่อกำหนดให้

$$f(t) = 1 \quad : \quad |t| < a$$

$$= 0 \quad ; \quad |t| > a$$

และ $F(\omega) = \dfrac{2 \sin wa}{\omega}$

วิธีทำ จาก (1.59)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |0|^2 dt + \int_{-a}^{a} |1|^2 dt + \int_{a}^{\infty} |0|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2\sin\omega a}{\omega}\right|^2 d\omega$$

$$t\Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega a}{\omega^2} d\omega$$

$$2a = \frac{2}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2\omega a}{\omega^2} d\omega$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2\omega a}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi a}{2}$$

ซ.ต.พ.

การใช้สูตรปาร์เซอวาล ในกรณีที่ทราบค่า $F_c(\omega)$ และ $F_s(\omega)$

กรณีที่ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จาก (1.29)

$$F(\omega) = 2F_c(\omega)$$

แทนค่าลงใน (1.59) จะได้

$$2\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}.2\int_{0}^{\infty} |2F_c(\omega)|^2 d\omega$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_c(\omega)|^2 d\omega} \qquad (1.61)$$

และกรณีที่ f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ $|f(t)|^2$ เป็นฟังก์ชันคู่จาก (1.34)

$$F(\omega) = -2i\,F_s(\omega)$$

แทนค่าลงใน (1.59) จะได้

$$2\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}.2\int_{0}^{\infty} |-2iF_s(\omega)|^2 d\omega$$

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F_s(\omega)|^2 d\omega} \qquad (1.62)$$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ กำหนดให้ $f(t) = e^{-t}u(t)$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.9

$$\mathcal{F}_c\{e^{-t}\} = F_c(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

แทนค่า ลงใน (1.61)

$$\int_0^\infty |e^{-t}|^2\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{1}{\omega^2+1}\right|^2 d\omega$$

$$\left.\frac{-e^{-2t}}{2}\right|_0^\infty = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(\omega^2+1)^2}\, d\omega$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\omega^2+1)^2}\, d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น จะได้

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้า f(t) เป็นจินตภาพแท้ (pure imaginary) นั่นคือ $f(t) = ig(t)$ เมื่อ g(t) เป็นค่าจริง (real) จงแสดงว่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $F(\omega)$ คือ

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin wt \, dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos\omega t \, dt$$

และจงแสดงว่า $R(\omega)$ และ $X(\omega)$ คือฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคู่ของ ω นั่นคือ

$$R(-\omega) = -R(\omega),\ X(-\omega) = X(\omega),\ F(-\omega) = -F^*(\omega)$$

2. ถ้า $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ จงแสดงว่า

$$\mathcal{F}\{f(at)e^{i\omega_0 t}\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$$

3. ถ้า $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) \sin\omega_0 t$

4. จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = e^{-a|t|}$

5. จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$

6. ถ้า $f(t) = 0$ เมื่อ $t \leqslant 0$ และ $t \geqslant \pi$ และ $f(t) = \sin t$ เมื่อ $0 \leqslant t \leqslant \pi$ จงพิสูจน์ว่า

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t + \cos\omega(\pi - t)}{1-\omega^2} d\omega \ ; \ -\infty < t < \infty$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $t = \frac{1}{2}\pi$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{2}\pi\omega}{1-\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

7. ถ้า $f(t) = 1$ เมื่อ $0<t<k$ และ $f(t) = 0$ เมื่อ $t>k$ และ $f(k) = \frac{1}{2}$ จงแสดงว่าสูตรฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัลของ f(t) คือ