**พิสูจน์** เพราะว่า

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin wt$$

$$|e^{-iot}| = \sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = 1$$

ดังนั้น

$$|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$$

หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\,e^{-i\omega t}|\,dt$

แต่โจทย์กำหนดว่า $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ มีค่าจำกัด (finite)

ดังนั้น

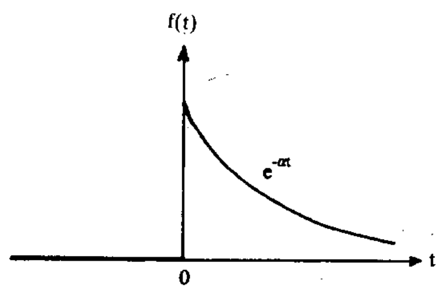
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\,e^{-i\omega t}|\,dt$$ มีค่าจำกัดด้วย

นั่นคือ $\mathcal{F}\{f(t)\}$ หาค่าได้ (exist) ช.ต.พ.

**ตัวอย่างที่ 1.7** จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ f(t) เมื่อกำหนดให้

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $a > 0$ ตามรูป 13




รูป 1.3

**วิธีทำ** จากนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-\alpha t})e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} dt$$

$$= \frac{-1}{(a+iw)}\, e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

**ตัวอย่างที่** 1.8 ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จงแสดงว่า

(ก) $F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt$

(ข) $f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) \cos \omega t\, d\omega$

**วิธีทำ** (ก) เพราะว่า

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, (\cos \omega t - i \sin \omega t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ จะได้

$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt \qquad (1.13)$$

(ข) เพราะว่า

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, (\cos wt + i \sin wt)\, dw$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t\ dw + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t\ dw \qquad (1.14)$$

จาก (1.13)

$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\ dt$$

แทนค่า $\omega$ ด้วย $-\omega$

$$F(-\omega) = 2\int_{0}^{w} f(t)\cos(-\omega)t\ dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\ dt$$

$$= F(\omega)$$

นั่นคือ $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่ นำไปพิจารณาใน (1.14) โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ จะได้

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} 2\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t\ d\omega$$

หรือ $$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t\ d\omega \qquad (1.15)$$ ซ.ต.พ.

**นิยาม** : ถ้า f(t) เป็นค่าจริง ดังนั้นส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $F(\omega)$ คือ

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt \qquad (1.16)$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{m} f(t)\sin\omega t\ dt \qquad (1.17)$$

และจงแสดงว่า $R(\omega)$ และ $X(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ของ $\omega$ ตามลำดับ นันคือ

$$R(-w) = R(\omega) \qquad (1.18)$$

$$X(-\omega) = -X(\omega) \qquad (1.19)$$

และ $$F(-\omega) = F^{*}(\omega) \qquad (1.20)$$

เมื่อ $F^*(\omega)$ คือ สังยุคเชิงซ้อน (the complex conjugate) ของ $F(\omega)$

**พิสูจน์** ถ้า f(t) เป็นค่าจริง จากสูตรการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos wt - i\sin \omega t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{m} f(t)\cos \omega t\,dt - i\int_{-\infty} f(t)\sin \omega t\,dt$$

$$= R(\omega) + i\,x(\omega)$$

นั่นคือ

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t\,dt$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t\,dt$$

แทนค่า $\omega$ ด้วย $-\omega$

$$R(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(-\omega)t\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t\,dt$$

$$= R(\omega)$$

และ

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(-\omega)t\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t\,dt$$

$$= -X(\omega)$$

ดังนั้น $R(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $X(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่ของ $\omega$ จาก (1.18) และ (1.19)

$$
\begin{aligned}
F(-\omega) &= R(-\omega)+i\,X(-w) \\
&= R(\omega)-iX(\omega) \\
&= F^*(\omega)
\end{aligned}
$$

ซ.ต.พ.

จงแสดงว่า เมื่อ $F(-\omega) = F^*(\omega)$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะสรุปว่า $f(t)$ เป็นค่าจริง

**พิสูจน์** สมมุติให้ $f(t) = f_1(t)+i\,f_2(t)$ เมื่อ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง (real function)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{R(\omega)+i\,X(\omega)\}\,[\cos wt+i\,\sin wt]\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{R(\omega)\cos wt-X(\omega)\sin\omega t\}d\omega \\
&\quad +i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{R(\omega)\sin wt+X(\omega)\cos\omega t\}d\omega \\
&= f_1(t)+i\,f_2(t)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{R(\omega)\cos wt-X(\omega)\sin\omega t\}d\omega \qquad (1.21)
$$

$$
f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{R(\omega)\sin wt+X(\omega)\cos\omega t\}d\omega \qquad (1.22)
$$

ถ้า $F(-\omega) = F^*(\omega)$ ดังนั้น

$R(-\omega) = R(\omega)$ และ $X(-\omega) = -X(\omega)$

ซึ่งจะพบว่า $R(\omega)\sin\omega t$ และ $X(\omega)\cos\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่ของ $\omega$ และ $\{R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t\}$ เป็นฟังก์ชันคี่ของ $\omega$ นั่นคือ จะได้ว่า

$$f_2(t) = 0$$

ดังนั้น f(t) เป็นค่าจริง ซ.ต.พ.

**นิยาม :** จงแสดงว่า ถ้าการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันจริง (real function) f(t) เป็นค่าจริง ดังนั้น f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ของ t และถ้าการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันจริง f(t) เป็นจินตภาพแท้ (pure imaginary) ดังนั้น f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

**พิสูจน์** กำหนดให้

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = R(\omega) + i\,X(\omega)$$

จาก (1.16) และ (1.17)

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{m} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{1.23}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt\,dt \tag{1.24}$$

ถ้า $F(\omega) = R(\omega)$ และ $X(\omega) = 0$ ดังนั้น ตัวถูกอินทิเกรตของ (1.24) จะเป็นฟังก์ชันคี่เมื่อเทียบกับ t นั่นคือ $f(t)\sin\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่ แต่ $\sin\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่ของ t เพราะฉะนั้น f(t) จะเป็นฟังก์ชันคู่ของ t

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\cos wt\,dw$$

nio $$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

เพราะว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จาก (1.23) จะได้

$$R(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

โดยวิธีเดียวกัน ถ้า $F(\omega) = i\,X(\omega)$ นั่นคือ $R(\omega) = 0$

ดังนั้น ตัวถูกอินทิเกรตของ (1.23) จะเป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อเทียบกับ t แต่ $\cos\omega t$ เป็นฟังก์ชันคู่ ฉะนั้น f(t) จะเป็นฟังก์ชันคี่ของ t

Olfl (1.21) ถ้า $R(\omega) = 0$ จะได้

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \sin wt\ dw$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\ \sin wt\ dw$$

จาก (1.19) $X(\omega) = -\int_{-\infty}^{m} f(t)\ \sin wt\ dt$

หรือ $X(\omega) = -2\int_{0}^{m} f(t)\ \sin wt\ dt$

ผลจากข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = R(\omega) + i\ X(\omega)$$

แต่ $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f_e(t)\} = R(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_o(t)\} = i\ X(\omega)$$ ซ.ต.พ.

**ทฤษฎีบทฟูเรียร์อินทิกรัล** (Fourier's integral theorem) กล่าวว่า ถ้า f(t) เป็นค่าจริง ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\ d\omega\ dx \qquad (1.25)$$

**พิสูจน์** จากสูตรฟูเรียร์อินทิกรัล

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right\} e^{i\omega t}\ dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(t-x)\omega}dx\}d\omega$$

เพราะว่า $e^{i\omega(t-x)} = \cos\omega(t-x) + i\sin\omega(t-x)$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{\cos\omega(t-x) + i\sin\omega(t-x)\}dx\,d\omega$$

แต่โจทย์กำหนดให้ f(t) เป็นค่าจริง นั่นคือ

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega(t-x)dx\,dw = 0$$

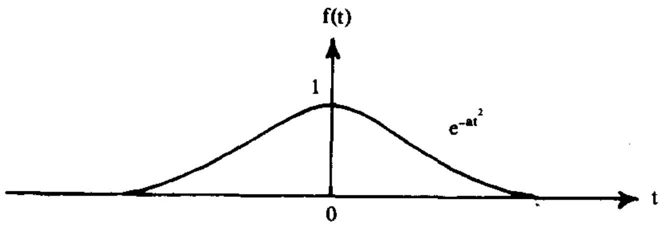
ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)dx\,d\omega$$

หรือ $$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)d\omega\,dx$$ ซ.ต.พ.

## การแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชันเกาส์เซียน (The Gaussian function)

พิจารณาฟังก์ชันเกาส์เซียน ดูรูป 1.4




$$f(t) = e^{-at^2}\ ;\ a>0$$

*รูป 1.4*

จงแสดงว่า การแปลงฟูเรียร์ของ f(t) คือ

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a} \qquad (1.26)$$

**พิสูจน์** กำหนดให้

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2 + \frac{i\omega t}{a})}\, dt$$

อินทิกรัลนี้หาค่าได้ โดยการทำกำลังของเอ็กโปเนนเชียล ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งสามารถทำได้โดยการคูณตัวถูกอินทิเกรต (integrand) ด้วย $e^{-\omega^2/4a} e^{\omega^2/4a}$ ดังนั้น

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4a}\, e^{-a\{t + \frac{i\omega}{2a}\}^2}\, dt$$

$$= e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{\sqrt{a}(t + \frac{i\omega}{2a})\}^2}\, dt$$

เปลี่ยนตัวแปรใหม่ เพื่อให้ดูง่ายขึ้น สมมุติให้

$$\sqrt{a}\,(t + \frac{i\omega}{2a}) = y$$

$$\sqrt{a}\, dt = dy$$

นั่นคือ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{\sqrt{a}\,(t + \frac{i\omega}{2a})\}^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{\pi})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ดังนั้น

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/4a} \qquad \text{ช.ต.พ.}$$

## 1.5 การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ และ ฟูเรียร์ไซน์ (Fourier cosine and sine transforms)

**นิยาม :** ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันที่นิยามเฉพาะในช่วง $0<t<\infty$ ดังนั้น f(t) สามารถเขียนได้เป็น

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \tag{1.27}$$

เมื่อ

$$F_c(\omega) = \int_0^{m} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{1.28}$$

**พิสูจน์** เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ f(t) นิยามเฉพาะภายในช่วง $0<t<\infty$ ดังนั้น ถ้าขยายให้ f(t) นิยามภายในช่วง $-\infty<t<0$ โดยสอดคล้องตามสมการ

$$F(t) = f(t) \qquad 0<t<\infty$$

และ

$$F(t) = f(|t|) \qquad -\infty<t<0$$

นั่นคือ จะได้ว่า F(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จากตัวอย่างที่ 1.8 และ (1.13) จะได้

$$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} F(t)\cos\omega t\,dt$$

เพราะว่า $F(t) = f(t)$ เมื่อ $0<t<\infty$ (ตามโจทย์)

เพราะฉะนั้น $F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$

และโจทย์กำหนดให้

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt$$

ดังนั้น $$F(\omega) = 2F_c(\omega) \qquad (1.29)$$

จากตัวอย่างที่ 1.8 เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega t\, d\omega \qquad (1.30)$$

แทนค่า $F(\omega) = 2F_c(\omega)$ ลงใน (1.30)

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$ ซ.ต.พ.

เรียก $F_c(\omega)$ ว่า "การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine transform) ของ f(t)" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\mathcal{F}_c\{f(t)\} = F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt$$

และ $$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$

ในทำนองเดียวกัน เพื่อจะหาการแปลงฟูเรียร์ไซน์ เมื่อโจทย์กำหนดให้ f(t) นิยามเฉพาะในช่วง $0<t<\infty$ ดังนั้น

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega t\, d\omega \qquad (1.31)$$

และ $$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt \qquad (1.32)$$

**พิสูจน์** เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ f(t) นิยามเฉพาะในช่วง $0<t<\infty$ ดังนั้น ถ้าขยายช่วงให้ f(t) นิยามในช่วง $-\infty<t<0$ โดยให้สอดคล้องตามสมการ

$$F(t) = f(t) \qquad 0<t<\infty$$

และ $$F(t) = -f(|t|) \qquad -\infty<t<0$$

นั่นคือ F(t) เป็นฟังก์ชันคี่

จากสูตรการแปลงฟูเรียร์

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, (\cos wt - i \sin wt)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\omega t\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\omega t\, dt$$

แต่ตัวถูกอินทิเกรตของพจน์แรกทางขวามือเป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้นอินทิกรัลของพจน์แรกจะมีค่าเป็นศูนย์ และตัวถูกอินทิเกรตของพจน์ที่สองทางขวามือเป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น

$$F(\omega) = -2i \int_{0}^{\infty} f(t) \sin wt\, dt \qquad (1.33)$$

โจทย์กำหนดให้

$$F_s(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) \sin wt\, dt$$

เพราะฉะนั้น $F(\omega) = -2i\, F_s(\omega)$ (1.34)

จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, dw$$

$$= \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, (\cos wt + i \sin wt)\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-PI}^{\infty} F(\omega) \cos\omega t\, d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{''} F(\omega) \sin\omega t\, d\omega \qquad (1.35)$$

แทนค่า w ด้วย $-\omega$ ลงใน (1.33) จะได้

$$F(-w) = -2i \int_{0}^{\infty} f(t) \sin(-w)t\, dt$$

$$= -F(\omega)$$

นั่นคือ $F(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่ นำไปพิจารณาใน (1.35)

$$f(t) = \frac{i}{2\pi} 2 \int_0^\infty F(\omega) \sin\omega t \, d\omega$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty (-2i\, F_s(\omega)) \sin wt \, dw$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin wt \, dw$$ ช.ต.พ.

**ตัวอย่างที่ 1.9** จงหาการแปลงฟูเรียร์โคไซน์และฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน $f(t) = e^{-\alpha t}$ เมื่อ $t>0$ และ $\alpha>0$

**วิธีทำ** กำหนดให้

$$\mathcal{F}_c\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos\omega t \, dt = I_1 \quad (1.36)$$

และ
$$\mathcal{F}_s\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin wt \, dt = I_2 \quad (1.37)$$

จาก (1.36) อินทิเกรตทีละส่วน

$$I_1 = \cos\omega t.\left(\frac{-e^{-\alpha t}}{a}\right)\Big|_0^\infty - \frac{w}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin\omega t \, dt$$
$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} I_2 \quad (1.38)$$

โดยวิธีเดียวกัน อินทิเกรตทีละส่วน (1.37) จะได้

$$I_2 = \sin wt \left(\frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos wt \, dt$$

$$= \frac{\omega}{a} I_1 \quad (1.39)$$

แทนค่า (1.39) ลงใน (1.38)

$$I_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \mathcal{F}_c\{e^{-\alpha t}\} \quad (1.40)$$

และ
$$I_2 = \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \mathcal{F}_s\{e^{-\alpha t}\} \quad (1.41)$$

## 1.6 คุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์ (Properties of Fourier transforms)

1.6.1 ถ้า $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ และ $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ $a_1$ และ $a_2$ เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constant) ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \tag{1.42}$$

**พิสูจน์** จากนิยามของการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = F(\omega)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\}\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= a_1\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\, dt + a_2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}\, dt \\ &= a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega)\end{aligned}$$

ช.ต.พ

1.6.2 ถ้า a เป็นค่าจริงคงที่ (real constant) และ $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \; ; \; a \neq 0 \tag{1.43}$$

**พิสูจน์** กรณี $a>0$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt$$

ให้ $at = x$ เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(\frac{\omega}{a})x}\, dx$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น (dummy variable) จะได้

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\frac{\omega}{a})t}\, dt$$

$$= \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

กรณี $a<0$

ให้ $at = x$ เพราะฉะนั้น

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\, e^{-i(\frac{\omega}{a})x}\, dx$$

$$= \frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(\frac{\omega}{a})x}\, dx$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น จะได้

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{(-a)}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\frac{\omega}{a})t}\, dt$$

$$= \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

นั่นคือ เมื่อพิจารณากรณี $a>0$ และ $a<0$ แล้วสรุปได้ว่า

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}) \quad a \neq 0$$ ซ.ต.พ.

1.6.3 ถ้า $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega) \tag{1.44}$$

**พิสูจน์** จาก (1.43)

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}) \qquad a \neq 0$$

แทนค่า $a = -1$ ดังนั้น

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$$ ซ.ต.พ.