บทที่ 1
การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

1.1 ฟังก์ชันมีคาบ (Periodic function)

ฟังก์ชัน f(t) ใด ๆ เรียกว่า "ฟังก์ชันมีคาบ" ถ้าสอดคล้องตามสมการ

$$f(t+T) = f(t) \tag{1.1}$$

สำหรับทุกค่าของ t ในเมื่อ T เป็นค่าคงที่ที่น้อยที่สุด $(T > O)$ และเรียก T ว่า คาบ (period) ของฟังก์ชัน f(t)

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = \sin t$

วิธีทำ สมมุติให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน f(t)

ดังนั้น $f(t+T) = f(t)$

หรือ $\sin(t+T) = \sin t$

แต่ $\sin(t+o) = \sin t$

$\sin(t+2\pi) = \sin t$

$\sin(t+4\pi) = \sin t$

$\sin(t+6\pi) = \sin t$

ซึ่งจะพบว่าค่า $T = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ ต่างก็ทำให้ฟังก์ชัน sint สอดคล้องตามสมการ (1.1) แต่จากนิยาม ฟังก์ชันมีคาบกำหนดว่า ค่า T จะต้องเป็นค่าที่น้อยที่สุด และ $T > O$ นั่นคือค่า T ที่เป็นคาบของฟังก์ชัน sint จึงมีอยู่เพียงค่าเดียว คือ $T = 2\pi$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = \sin\frac{n\pi t}{P}$

วิธีทำ สมมุติให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $\sin\frac{n\pi t}{P}$

ดังนั้น $$f(t+T) = f(t)$$

หรือ $$\sin\frac{n\pi}{P}(t+T) = \sin\frac{nnt}{P}$$

$$\sin\left(\frac{nnt}{P}+\frac{n\pi T}{P}\right) = \sin\frac{n\pi t}{P}$$

เทียบกับสมการ $$\sin(A+2\pi) = \sin A$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{n\pi T}{P} = 2\pi$$

nio $$T = \frac{2p}{n}$$

คาบของฟังก์ชัน $\sin\frac{n\pi t}{P}$ คือ $\frac{2p}{n}$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = \cos\frac{t}{3}+\sin\frac{t}{5}+\tan\frac{t}{7}$

วิธีทำ สมมุติให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน f (t)

ดังนั้น $$f(t+T) = f(t)$$

หรือ $$\cos\frac{1}{3}(t+T)+\sin\frac{1}{5}(t+T)+\tan\frac{1}{7}(t+T) = \cos\frac{t}{3}+\sin\frac{t}{5}+\tan\frac{t}{7}$$

$$\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{T}{3}\right)+\sin\left(\frac{t}{5}+\frac{T}{5}\right)+\tan\left(\frac{t}{7}+\frac{T}{7}\right) = \cos\frac{t}{3}+\sin\frac{t}{5}+\tan\frac{t}{7}$$

เพราะว่า $$\cos(A+2m\pi) = \cos A$$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

เทียบกับ $$\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{T}{3}\right) = \cos\frac{t}{3}$$

จะได้ $$\frac{T}{3} = 2m\pi$$

$$T = 6m\pi \qquad (1.2)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\sin(A + 2n\pi) = \sin A \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

เทียบกับ $$\sin\left(\frac{t}{5} + \frac{T}{5}\right) = \sin\frac{t}{5}$$

จะได้ $$\frac{T}{5} = 2nn$$

$$T = 10n\pi \qquad (1.3)$$

และ $$\tan(A + p\pi) = \tan A \text{ เมื่อ } p \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

เทียบกับ $$\tan\left(\frac{t}{7} + \frac{T}{7}\right) = \tan\frac{t}{7}$$

จะได้ $$\frac{T}{7} = p\pi$$

$$T = 7p\pi \qquad (1.4)$$

(1.2)/(1.3) $$m:n = 5:3 = 35:21$$

(1.3)/(1.4) $$n:p = 7:10 = 21:30$$

$$m:n:p = 35:21:30$$

ดังนั้น $$T = 6(35)\pi = 210\pi$$

คาบของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ 210π

หรือทำอีกวิธีหนึ่ง โดยการเอา 6, 10, 7 มาหา ค.ร.น. ค่าที่ได้คือ 210
นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ 210π

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(t) = (10\cos t)^2$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) = (10\cos t)^2$$

$$= 100\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)$$

$$= 50+50\cos 2t$$

เพราะว่าค่าคงที่เป็นฟังก์ชันมีคาบของคาบ T สำหรับค่าใด ๆ ของ T และคาบของ cos2t คือ π ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน f(t) คือ π

1.2 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and odd functions)

นิยาม : ฟังก์ชัน f(t) ใด ๆ เรียกว่า "ฟังก์ชันคู่ (even function)" เมื่อสอดคล้องตามสมการ

$$f(-t) = f(t) \tag{1.5}$$

และเรียกว่า "ฟังก์ชันคี่ (odd function)" เมื่อสอดคล้องตามสมการ

$$f(-t) = -f(t) \tag{1.6}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันคี่

(ก) cost

(ข) sint

วิธีทำ กำหนดให้

(ก) $$f(t) = \cos t$$

แทนค่า t ด้วย $-t$

$$\begin{aligned} f(-t) &= \cos(-t) \\ &= \cos t \\ &= f(t) \end{aligned}$$

พบว่าสอดคล้องตามสมการ (1.5) สรุปได้ว่า cost เป็นฟังก์ชันคู่

(ข) $$f(t) = \sin t$$

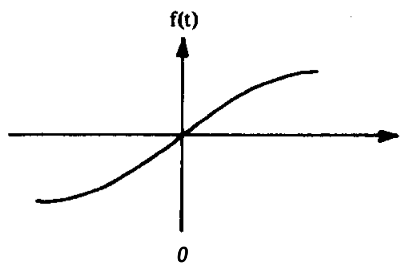
iinudi t ด้วย $-t$

$$\begin{aligned} f(-t) &= \sin(-t) \\ &= -\sin t \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

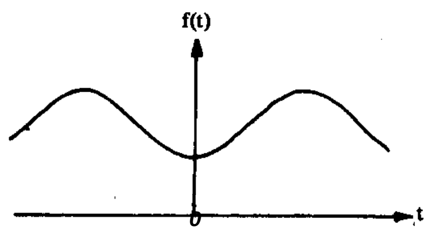
พบว่าสอดคล้องตามสมการ (1.6) สรุปได้ว่า sint เป็นฟังก์ชันคี่

ข้อสังเกต มีฟังก์ชันบางฟังก์ชัน เมื่อนำไปตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชนคู่ หรือฟังก์ชันคี่ ปรากฏว่าไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ ฟังก์ชันลักษณะนี้เรียกว่า "ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่" ตัวอย่างเช่น e^t, $t+t^2$ เป็นต้น

ลักษณะกราฟของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่



รูป 1.1 (ก) ลักษณะกราฟฟังก์ชันคี่



รูป 1.1 (ข) ลักษณะกราฟฟังก์ชันคู่

ข้อสังเกต ฟังก์ชันคู่จะมีลักษณะสมมาตร (Symmetry) รอบแกน f(t) ตามรูป 1.1 (ข) แต่ฟังก์ชันคี่มีลักษณะไม่สมมาตรรอบแกน f(t) ตามรูป 1.1 (ก)

คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. (ฟังก์ชันคู่) $\times$ (ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่
2. (ฟังก์ชันคี่) $\times$ (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่
3. (ฟังก์ชันคู่) $\times$ (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่
4. $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{o}^{a} f(t)\,dt$ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่
5. $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

พิสูจน์ สมมุติให้ $f(t) = f_1(t).f_2(t)$

1. ถ้า $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น
$$f(-t) = f_1(-t).f_2(-t)$$
$$= f_1(t).f_2(t)$$
$$= f(t)$$

สรุปได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ

(ฟังก์ชันคู่) $\times$ (ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่ ซ.ต.พ.

2. ถ้า $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น
$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t)$$
$$= [-f_1(t)].[-f_2(t)]$$
$$= f_1(t).f_2(t)$$
$$= f(t)$$

สรุปได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ

(ฟังก์ชันคี่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่ ซ.ต.พ.

3. ถ้า $f_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(-t) &= f_1(-t).f_2(-t) \\ &= f_1(t)\,[-f_2(t)] \\ &= -f_1(t)\,f_2(t) \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ

(ฟังก์ชันคู่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่ ซ.ต.พ.

พิสูจน์ ข้อ 4

เพราะว่า
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{o} f(t)dt + \int_{o}^{a} f(t)\,dt \tag{1.7}$$

พิจารณาอินทิกรัล $\int_{-a}^{o} f(t)\,dt$ สมมุติให้ $t = -x$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{o} f(t)\,dt &= \int_{a}^{o} f(-x)d(-x) \\ &= \int_{o}^{a} f(-x)\,dx \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดว่า f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น

$$\int_{-a}^{o} f(t)\,dt = \int_{o}^{a} f(x)\,dx \qquad ; f(-x) = f(x)$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น (dummy variable) จะได้

$$\int_{-a}^{o} f(t)\,dt = \int^{a} f(t)\,dt$$

แทนค่าใน (1.7)

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int^{a} f(t)\,dt + \int^{a} f(t)\,dt$$

$$= 2\int_{o}^{a} f(t)\,dt$$ ซ.ต.พ.

พิสูจน์ ข้อ 5 ใช้วิธีเดียวกับข้อ 4

จาก $$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{o} f(t)\,dt + \int^{a} f(t)\,dt$$

$$= \int^{a} f(-t)\,dt + \int_{o}^{a} f(t)\,dt$$

แต่โจทย์กำหนดให้ f(t) เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ

$$f(-t) = -f(t)$$

ดังนั้น $$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = -\int_{o}^{a} f(t)\,dt + \int_{o}^{a} f(t)\,dt$$

$$= 0$$ ซ.ต.พ.

1.3 ฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ และ ฟังก์ชันส่วนประกอบคี่

(Even and odd component functions)

นิยาม : ฟังก์ชัน f(t) ใด ๆ สามารถเขียนในรูปผลบวกของสองฟังก์ชันส่วนประกอบ (component functions) โดยที่พจน์หนึ่งเป็น "ฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ (even component function)" พจน์ที่เหลือเป็น "ฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ (odd component function) นั่นคือ

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

เมื่อ $f_e(t)$ คือ ฟังก์ชันส่วนประกอบคู่

$f_o(t)$ คือ ฟังก์ชันส่วนประกอบคี่

พิสูจน์

$$f(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(-t) + \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(-t)$$

$$= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

สมมุติให้ $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$

และ $f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$

ดังนั้น $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

แทนค่า t ด้วย $-t$

$$f_e(-t) = \frac{1}{2}[f(-t) + f(t)]$$

$$= f_e(t)$$

นั่นคือ $f_e(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่

และ $f_o(-t) = \frac{1}{2}[f(-t) - f(t)]$

$$= -\frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

$$= -f_o(t)$$

นั่นคือ $f_o(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่
สรุปได้ว่า

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

เมื่อ $f_e(t)$ เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบคู่

และ $f_o(t)$ เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาฟังก์ชันส่วนประกอบคู่และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ ซึ่งนิยาม f(t) เป็น

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > o \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

วิธีทำ แทนค่า t ด้วย $-t$

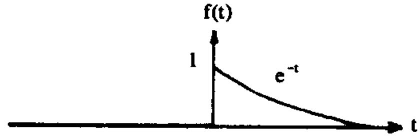
$$f(-t) = \begin{cases} o & t > 0 \\ e^{t} & t c o \end{cases}$$

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

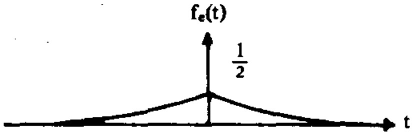
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} \; ; \; t > o \\ \frac{1}{2}e^{t} \; ; \; t < o \end{cases}$$

และ $$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

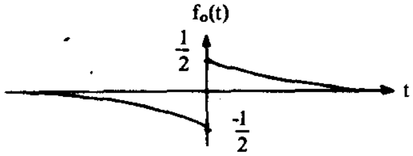
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & ; t > o \\ -\frac{1}{2}e^{t} & ; t < o \end{cases}$$



รูป 1.2 (ก) กราฟของฟังก์ชัน f(t)



รูป 1.2 (ข) กราฟของฟังก์ชัน $f_e(t)$



รูป 1.2 (ค) กราฟของฟังก์ชัน $f_o(t)$

แบบฝึกหัด 11

1. จงหาคาบของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (ก) cosnt

   (ข) $\cos 2\pi t$

   (ค) $\sin\left(2\pi \frac{t}{k}\right)$

   (ง) $\sin t + \sin \frac{t}{3} + \sin \frac{t}{5}$

   (จ) $|\sin \omega_o t|$

2. ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันมีคาบของ t ซึ่งมีคาบเป็น T จงแสดงว่า f(at) เมื่อ $a \neq 0$ เป็นฟังก์ชันมีคาบของ t ซึ่งมีคาบเป็น $\frac{T}{a}$

3. จงแสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

   (ก) $t^3\cos nt$

   (ข) e^t

   (ค) $tg(t^2)$

   (ง) $(\sin t)^2$

   (จ) $\log \frac{1+t}{1-t}$

4. กำหนดให้ f(t) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $(-a, a)$ จงแสดงว่า อนุพันธ์ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคู่ และอนุพันธ์ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ f(t) เป็นฟังก์ชันคี่

5. จงแสดงว่า ค่าเฉลี่ยกำลังสองของ f(t) จะมีค่าเท่ากับผลรวมของค่าเฉลี่ยกำลังสองของฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ f(t) นั่นคือ

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_e(t)\}^2 dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f_o(t)\}^2 dt$$

6. กำหนดให้ $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ เมื่อ $f_e(t)$ และ $f_o(t)$ คือ ฟังก์ชันส่วนประกอบคู่ และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ $f(t)$ ตามลำดับ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, f(t-\tau)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t)\, f_e(t-\tau)\, dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_o(t)\, f_o(t-\tau)\, dt$$

7. จงหาฟังก์ชันส่วนประกอบคู่และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) e^t

(ข) $\dfrac{t+1}{t-1}$

(ค) $t \sin t - \sin 2t$

8. กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งมีคาบเป็น T และนิยามในช่วง $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$ อนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega_o t + b_n \sin n\,\omega_o t) \; ; \; \omega_o = \frac{2\pi}{T}$$

ถ้า $f_e(t)$ และ $f_o(t)$ คือฟังก์ชันส่วนประกอบคู่และฟังก์ชันส่วนประกอบคี่ของ $f(t)$ จงแสดงว่า $f_e(t)$ และ $f_o(t)$ มีอนุกรมฟูเรียร์เป็น

$$f_e(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\omega_o t$$

และ $$f_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\omega_o t$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. (ก) $\dfrac{2\pi}{n}$ (ข) 1 (ค) k (ง) 30π (จ) $\dfrac{\pi}{\omega_0}$

3. (fl) ฟังก์ชันคี่ (u) ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (n) ฟังก์ชันคี่
   (a) ฟังก์ชันคู่ (0) ฟังก์ชันคี่

7. *(fl)* $f_e(t) = \cosh(t), f_0(t) = \sinh(t)$

   (ข) $f_e(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}, f_0(t) = \dfrac{2t}{t^2-1}$

   (ค) $f_e(t) = t \sin t, f_0(t) = -\sin 2t$

1.4 การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

นิยาม : ฟูเรียร์อินทิกรัลสามารถเขียนในรูป

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx\}\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{1.8}$$

ถ้ากำหนดให้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{1.9}$$

ดังนั้นสมการ (1.8) เขียนใหม่เป็น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{1.10}$$

ฟังก์ชัน $F(\omega)$ ใน (1.9) เรียกว่า "การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)" ของ $f(t)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{F}$ นั่นคือ

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{1.11}$$

ในทำนองเดียวกัน $\mathcal{F}^{-1}$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการดำเนินการผกผัน (inverse operation) เพื่อหา $f(t)$ เมื่อโจทย์กำหนด $F(\omega)$ มาให้ นั่นคือ

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, dw \tag{1.12}$$

$f(t)$ คือ "การแปลงฟูเรียร์ผกผัน (inverse Fourier transform)" ของ $F(\omega)$ และเรียกสมการ (1.11) และ (1.12) ว่า "คู่การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform pair)"

เงื่อนไขการหาค่าของ $F(\omega)$ คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$