ภาคผนวก 1

(Appendix 1)

กฎของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's Rule)

พิจารณาอินทิกรัลที่ประกอบด้วยตัวแปรเสริม (parameter)

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt \qquad (A.1.1)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ α (ไม่ใช่ t ; ซึ่งเป็นตัวแปรหุ่น (dummy variable) ในการอินทิเกรต) ดังนั้นอนุพันธ์คือ

$$I'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)\, dt \qquad (A.1.2)$$

ซึ่งหาได้โดยคำนวณค่าอินทิกรัลก่อน แล้วค่อยหาอนุพันธ์ แต่บางครั้งจะเป็นประโยชน์มาก ถ้าสามารถสลับลำดับ ของการอินทิเกรตกับการหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งกระทำได้ดังนี้

เนื่องจาก

$$\frac{I(s+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1}{\Delta\alpha}\left\{\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(t,\alpha+\Delta\alpha)dt-\int_a^b f(t,\alpha)dt\right\}$$

$$= \int_a^b \frac{f(t,\alpha+\Delta\alpha)-f(t,\alpha)}{\Delta\alpha}\, dt$$

$$+ \frac{1}{\Delta\alpha}\int_b^{b+\Delta b} f(t,\alpha+\Delta\alpha)dt - \frac{1}{\Delta\alpha}\int_a^{a+\Delta a} f(t,\alpha+\Delta\alpha)dt$$

$$\sim \int_a^b \frac{f(t,\alpha+\Delta\alpha)-f(t,\alpha)}{\Delta\alpha}\, dt+f(b,\alpha+\Delta\alpha)\,\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}$$

$$- f(a,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha} \qquad (A.1.3)$$

โดยที่ f เป็นค่าคงที่ (ถ้า f ต่อเนื่อง) บนช่วงเล็ก ๆ $b \leq t \leq b+\Delta b$ และ $a \leq t \leq a+\Delta a$

ให้ $\Delta\alpha \to 0$ จะได้ว่า

$$I'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial\alpha}(f,\alpha)dt + f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha)]\frac{da}{d\alpha} \qquad (A.1.4)$$

เรียกสมการ (A.1.4) นี้ว่า กฎของไลบ์นิตซ์

สมมุติว่า $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และ $c_1 \leq a(\alpha) \leq c_2$ และ $c_1 \leq b(\alpha) \leq c_2$ สำหรับแต่ละ α ในช่วง $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ เราสามารถแสดงได้ว่า เงื่อนไขพอเพียงสำหรับสมการ (A.1.4) คือ $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ ต้องต่อเนื่องในโดเมนที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า $c_1 \leq t \leq c_2$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

(และแน่นอนอนุพันธ์ $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$, $\frac{db}{d\alpha}$, $\frac{da}{d\alpha}$ ต้องหาค่าได้ทั้งหมด)

สำหรับกรณี a และ f ไม่ขึ้นกับ α และ $b(\alpha)=\alpha$ ทำให้สมการ (A.1.4) เป็นดังนี้ คทอ

$$I'(\alpha) = f(\alpha)$$

$$I(\alpha) = \int_a^{\alpha} f(t)dt$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha^2} \sin(\alpha t^2)\,dt$$

จากกฎของไลบ์นิตซ์

$$a(\alpha) = -\alpha \ , \ \frac{da}{d\alpha} = -1$$

$$b(\alpha) = \alpha^2 \;,\; \frac{db}{d\alpha} = 2\alpha$$

$$f(t,\alpha) = \sin(\alpha t^2) \;,\; \frac{\partial f}{\partial \alpha} = t^2 \cos(\alpha t^2)$$

$$f[b(\alpha),\alpha\,] = \sin\,\alpha(\alpha^2)^2 = \sin\,\alpha^5$$

$$f[a(\alpha),\alpha\,] = \sin\,\alpha(-\alpha)^2 = \sin\,\alpha^3$$

ดังนั้นจากสมการ (A.1.4) จะได้

$$I'(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha^2} t^2 \cos\, t^2\, dt + 2\alpha \sin\, \alpha^5 - \sin\, \alpha^3$$

<u>ตัวอย่าง</u>

จากสมการ (A.1.4) สามารถใช้ช่วยในการคำนวณค่าอินทิกรัล

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt \tag{A.1.5}$$

ได้ดังนี้

ให้

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt \tag{A.1.6}$$

ดังนั้น (ถ้า $\alpha \neq -1$) โดยสมการ (A.1.4)

$$J'(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{\ln t}\, dt$$

$$= \int_0^1 t^\alpha\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{1+\alpha}$$

อินทิเกรตสมการข้างบนนี้

$$J(\alpha) = \ln(1+\alpha) + C$$

หา C โดยใช้สมการ (A.1.6) ที่ว่า $J(0) = 0$

จะได้

$$0 = \ln 1 + C$$

นั่นคือ

$$C = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$I = J(1) = \ln(1+1) = \ln 2$$

ภาคผนวก 2

ผลการแปลงฟูริเยร์

	$f(t)$	$\hat{\mathcal{F}}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$
1	$u(t-c_1) - u(t-c_2)$, $c_1 < c_2$	$\dfrac{e^{-i\omega c_1} - e^{-i\omega c_2}}{i\omega}$
2	$u(t+c) - u(t-c)$, $c > 0$	$\dfrac{2 \sin c\omega}{\omega}$
3	$e^{at}\lvert u(t-c_1) - u(t-c_2)\rvert$, $c_1 < c_2$	$\dfrac{e^{(a-i\omega)c_2} - e^{(a-i\omega)c_1}}{a-i\omega}$
4	$e^{at}u(t)$, $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{1}{i\omega - a}$
5	$e^{at}u(t-c)$, $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{e^{(a-i\omega)c}}{i\omega - a}$
6	$e^{-at}u(-t)$, $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{-1}{i\omega - a}$
7	$e^{a\lvert t\rvert}$, $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{-2a}{\omega^2 + a^2}$
8	$e^{at}u(t)-e^{-at}u(-t)$, $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{-2i\omega}{\omega^2 + a^2}$
9	$t^k e^{at}u(t), k=1,2,\ldots,$ $\mathrm{Re}(a) < 0$	$\dfrac{k!}{(i\omega - a)^{k+1}}$
10	$e^{ibt}\lvert u(t+c) - u(t-c)\rvert$, $c > 0$	$\dfrac{2 \sin c(\omega - b)}{\omega - b}$

	$f(t)$	$\hat{F}[f] = \int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$
11	$\frac{1}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$	$-\frac{\pi}{a} e^{a\lvert\omega\rvert}$
12	$\frac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $Re(a) < 0$	$\frac{i\omega\pi}{2a} e^{a\lvert\omega\rvert}$
13	$\frac{e^{ibt}}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{a} e^{a\lvert\omega-b\rvert}$
14	$\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2a}\left[e^{a\lvert\omega-b} + e^{a\lvert\omega+b\rvert}\right]$
15	$\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$, $Re(a) < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2ai}\left[e^{a\lvert\omega-b\rvert} - e^{a\lvert\omega+b\rvert}\right]$
16	$t[u(t) - u(t-c)]$	$\frac{1 - e^{-i\omega c}(1+ i\omega c)}{-\omega^2}$
17	$t^k[u(t) - u(t-c)]$, $k = 1,2,\ldots$	$\frac{k! - e^{-i\omega c}gk(i\omega c)}{(i\omega)^{k+1}}$, $gk(x)=x^k+kx^{k-1}+\ldots+k!$
18	$t[u(t) - u(t-c)] + (2c-t)$ $\times [u(t-c) - u(t-2c)]$	$\frac{1 - 2e^{-i\omega c} + e^{-2i\omega c}}{-\omega^2}$
19	e^{-at^2}, $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2}(4a)$

ภาคผนวก 3

ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์

	$f(t)$	$F(\omega)=\hat{F}[f]$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\delta(t-c)$	$e^{-ic\omega}$
3.	$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$
4.	$\delta^{(n)}(t-c)$	$e^{-ic\omega}(i\omega)^n$
5.	1	$2\pi\delta(\omega)$
6.	t	$2\pi i\delta'(\omega)$
7.	t^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
8.	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
9.	$t^n e^{iat}$	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
10.	$u(t)$	$\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$
11.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}}+\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
12.	$u(t-c)$	$\frac{e^{-i\omega c}}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$
13.	$(t-c)^n u(t-c)$	$\frac{n!e^{-ic\omega}}{(i\omega)^{n+1}}+\pi i^n\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}(ic)^{n-r}\delta^{(r)}(\omega)$

ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์

	$f(t)$	$F(\omega) = \hat{F}[f]$
14.	$e^{iat}u(t-c)$	$\frac{e^{-ic(\omega-a)}}{i(\omega-a)} + \pi\delta(\omega-a)$
15.	$e^{iat}t^{n}u(t)$	$\frac{n!}{[i(\omega-a)]^{n+1}} + \pi i^{n}\delta^{(n)}(\omega-a)$
16.	$e^{iat}(t-c)^{n}u(t-c)$	$\frac{n!e^{-ic(\omega-a)}}{\lvert i(\omega-a)\rvert^{n+1}} + \pi i^{n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} \times (ic)^{n-r}\delta^{(r)}(\omega-a)$
17	$\frac{1}{t}$	$\pi i - 2\pi i h(\omega)$
18.	$\frac{1}{t^{n}}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\lvert\pi i - 2\pi i h(\omega)\rvert$
19.	$\frac{1}{t-c}$	$e^{-ic\omega}\lvert\pi i - 2\pi i h(\omega)\rvert$
20.	$\frac{1}{(t-c)^{n}}$	$\frac{e^{-ic\omega}(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\lvert\pi i - 2\pi i h(\omega)\rvert$
21.	$\frac{e^{-at}}{t-c}$	$e^{-ic(\omega-a)}\lvert\pi i - 2\pi i h(\omega-a)\rvert$
22.	$\frac{e^{iat}}{(t-c)^{n}}$	$\frac{e^{-ic(\omega-a)}\lvert -i(\omega-a)\rvert^{n-1}}{(n-1)!}\lvert\pi i - 2\pi i h(\omega-a)\rvert$

$n = 1, 2, 3, \ldots,$ และ c กับ a เป็นค่าจริง

ภาคผนวก 4

ผลการแปลงลาปลาซ

	$f(t)$ for $f \geq 0$	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
1	1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > Re(a)$
3	$t^n,\ n > -1$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ n=0,1,\ldots,$ $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ any $n > -1$	$\sigma > 0$
4	$t^n e^{at},\ n > -1$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n=0,1,\ldots,$ $\frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}}$, any $n > -1$	$\sigma > Re(a)$
5	cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\sigma > \lvert Re(a)\rvert$
6	sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sigma > \lvert Re(a)\rvert$
7	cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\sigma > \lvert Im(a)\rvert$
8	sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sigma > \lvert Im(a)\rvert$
9	$t^n \cos at, n > -1$	$\frac{(\Gamma(n+1)}{2(s^2+a^2)^{n+1}}[(s+ai)^{n+1}$ $+ (s-a)^{n+1}]$	$\sigma > \lvert Im(a)\rvert$

	$f(t)$ for $t \geq 0$	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
10	$t^n \sin at, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{2i(s^2+a^2)^{n+1}}[(s+ai)^{n+1} - (s-ai)^{n+1}]$	$\sigma > \lvert Im(a) \rvert$
11	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$	$\sigma > 0$
12	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$	$\sigma > 0$
13.	$\sin at \sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$	$\sigma > \lvert Im(a+b) \rvert$ and $\sigma > \lvert Im(a-b) \rvert$
14	$e^{at}\sin(bt+c)$, a,b,c real	$\frac{(s-a)\sin c + b\cos c}{(s-a)^2+b^2}$	$\sigma > a$
15	1 for $2nc<t<(2n+1)c$, 0 for $(2n+1)c<t<(2n+2)c$, $n=0,1,2,\ldots, c > 0$ (square wave)	$\frac{1}{s(1+e^{-cs})}$	$\sigma > 0$
16	$u(t) - u(t-c), c > 0$	$\frac{1 - e^{-cs}}{s}$	$-\infty < \sigma < \infty$
17	$u(t-c), c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$\sigma > 0$

	$f(t)$ for $t \geq 0$	$\mathcal{L}\|f\| = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
18	$u(t-c_1)-u(t-c_2), 0<c_1<c_2$	$\frac{e^{-c_1 s}-e^{-c_2 s}}{s}$	$-\infty<\sigma<\infty$
19	$e^{at}[u(t-c)-u(t-c_2)]$, $0<c_1<c_2$	$\frac{e^{-c_1(s-a)}-e^{c_2(s-a)}}{s-a}$	$-\infty<\sigma<\infty$
20	$e^{at}u(t-c),\ c>0$	$\frac{e^{-c(s-a)}}{s-a}$	$\sigma>Re(a)$
21	$t^n u(t-c), c>0,$ $n=1,2,...$	$\frac{e^{-cs}[(cs)^n+n(cs)^{n-1}+...+n!]}{s^{n+1}}$	$\sigma>0$
22	$t^n[u(t)-u(t-c)], c>0$ $n=1,2,...$	$\frac{n!-e^{-cs}[(cs)^n+n(cs)^{n-1}+...+n!]}{s^{n+1}}$	$-\infty<\sigma<\infty$
23	$t[u(t)-u(t-c)]+(2c-t)$ $[u(t-c)-u(t-2c)]$	$\frac{1-2e^{-cs}+e^{-2cs}}{s^2}$	$-\infty<\sigma<\infty$
24	$\sum_{k=0}^{\infty}(t-2kc)[h(t-2kc)$ $-u(t-2kc-c)]+$ $\sum_{k=0}^{\infty}(2kc+2c-t)\cdot[u(t-2kc-c)$ $-u(t-2kc-2c)]$ (triangular wave)	$\frac{1-e^{-cs}}{s^2(1+e^{-cs})}$	$\sigma>0$
25	$a\sum_{k=0}^{\infty}(t-kc)\cdot[u(t-kc)$ $-u(t-kc-c)]$ (sawtooth wave)	$\frac{a(1+cs-e^{cs})}{s^2(1-e^{cs})}$	$\sigma>0$