# บทที่ 5
# การประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงลาปลาซ
## (Applications Involving Laplace Transforms)

## 5.1 <u>บทนำ</u>

ผลการแปลงลาปลาซสามารถใช้ในการประยุกต์ได้มากมายเหมือน ๆ กับผลการแปลงฟูริเยร์ แต่ที่สำคัญ ๆ ซึ่งจะกล่าวถึงก็คือ การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต, ผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

## 5.2 <u>การหาค่าอินทิกรัล</u> (Evaluating Integrals)

การประยุกต์ที่น่าสนใจอย่างหนึ่ง ของผลการแปลงลาปลาซ ก็คือ การหาค่าอินทิกรัลโดยเฉพาะอินทิกรัลที่ประกอบด้วยตัวแปรเสริม( free'parameter ) โดยในบางครั้งเราพบว่า อินทิกรัลที่จะหาค่าเป็นกรณีพิเศษของผลการแปลงลาปลาซ ด้วยการเลือกค่าของตัวแปรของการแปลง( ก็คือค่า s )และบางครั้งเราหาค่าอินทิกรัลได้โดยการหาผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลนั้น เทียบกับตัวแปรเสริม ( ไม่ใช่ตัวแปรในการอินทิเกรต ) ซึ่งผลที่ได้จะง่ายกว่าเดิม แต่ต้องสลับที่ของอินทิกรัลทั้งสอง จากนั้นใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผัน ก็จะได้สิ่งที่ต้องการ

<u>ตัวอย่าง</u> 5.2.1

จงหาค่าอินทิกรัล

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$J = \int_0^\infty \ell^{-t}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$$

<u>ผลเฉลย</u>

จะสังเกตเห็นว่าอินทิกรัลทั้งสองเป็นกรณีพิเศษของผลการแปลงลาปลาซของ

ฟังก์ชัน $\frac{\sin t}{t}$ และจากตัวอย่าง 4.3.13 จะได้

$$\hat{L}[\frac{\sin t}{t}] = \int_0^{\infty} \ell^{-st} \ \frac{\sin t}{t} \, dt = \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

ดังนั้น โดยการให้ s=0 และ s=1 จะพบว่า

$$I = \hat{L}[\frac{\sin t}{t}]_{s=0} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$J = \hat{L}[\frac{\sin t}{t}]_{s=1} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.2.2

จงหาค่าอินทิกรัล

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+1} \, dx \ , \ t>0$$

<u>ผลเฉลย</u>

เราจะหาผลการแปลงลาปลาซเทียบกับตัวแปรเสริม( ก็คือ t )
ดังนั้นให้

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2+1} \, dx$$

จะได้

$$\hat{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} \frac{s}{(x^2 - 1)(x^2+s^2)} \, dx$$

$$= \frac{s}{s^2-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+s^2}\right) dx$$

$$= \frac{s}{s^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2s}\right)$$

$$= \frac{\pi/2}{s+1}$$

โดยผลการแปลงลาปลาซผกผัน จะได้

$$\hat{L}^{-1}[I(s)] = f(t) = \frac{\pi}{2}\ell^{-t}, \quad t>0$$

## แบบฝึกหัด 5.2

ใช้ผลการแปลงลาปลาซที่ทราบแล้ว หรือคุณสมบัติผลการแปลงลาปลาซหาค่าอินทิกรัล ในข้อ 1-4

1. $\int_0^\infty t\,\ell^{-2t}\cos t\,dt$

2. $\int_0^\infty t^2\ell^{-3t}\sin t\,dt$

3. $\int_0^\infty \frac{\ell^{-2t}-\ell^{-6t}}{t}\,dt$

4. $\int_0^\infty \ell^{-t}\,\mathrm{erf}(\sqrt{t})dt$

ใช้เทคนิคเช่นเดียวกับตัวอย่าง 5.2.2 หาค่าอินทิกรัลในข้อ 5-8

5. $\int_0^\infty \ell^{-tx^2}dx\ , \ t>0$

6. $\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2+1}\,dx\ , \ t>0$

7. $\int_0^\infty \exp(-x^2-t^2/x^2)dx\ , \ t>0$

8. $\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx\ , \ t>0$

## 5.3 สมการเชิงอนุพันธ์

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการเชิงเส้นโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการแปลงสมการจากฟังก์ชัน $y(t)$ ไปเป็นฟังก์ชัน $Y(s)$ แล้วแก้สมการหา $Y(s)$ จากนั้นก็แปลงกลับไปสู่ $y(t)$ อีกครั้ง ซึ่งการใช้ผลการแปลงลาปลาซนี้ ทำให้การแก้สมการหา $Y(s)$ ง่ายกว่าการหา $y(t)$ โดยตรง ในกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่การแปลงไปสู่ $Y(s)$ จะเป็นสมการพีชคณิต ดังนั้นวิธีนี้จึงมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์อย่างยิ่ง

เนื่องจากในการแปลงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะปรากฏพจน์ $y(0)$, $y'(0)$ $y''(0)$,...ฯลฯ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซจึงเป็นวิธีที่เหมาะที่สุดกับปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problems) นั่นคือ เป็นการกำหนดเงื่อนไขที่ $t=0$ ยิ่งกว่านั้น ผลเฉลยที่เกิดขึ้นในวิธีการของผลการแปลงลาปลาซนี้เป็นผลเฉลยขั้นสุดท้ายโดยอัตโนมัติไม่เหมือนวิธีการทั่ว ๆ ไป ซึ่งต้องหาผลเฉลยทั่วไป (คือผลเฉลยที่ติดค่าคงที่ตามใจของ $y_c$) และผลเฉลยเฉพาะ(คือ$y_p$) แล้วนำมารวมกัน เพื่อเป็นผลเฉลยขั้นสุดท้าย และยังต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อที่จะกำหนดค่าคงที่ตามใจชอบอีกต่างหาก

### 5.3.1 สมการอันดับหนึ่ง

**พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น**

$$y'(t) + b\,y(t) = f(t)\ ,\ t>0 \qquad (5.3.1)$$

$$y(0) = y_o$$

โดย b เป็นค่าคงที่

ซึ่งถ้าแก้สมการแบบวิธีทั่ว ๆ ไปโดยใช้ตัวประกอบอินทิเกรต(integrating factor) $\ell^{-bt}$ มาคูณตลอด ในที่สุดจะได้

$$y(t) = y_o\,\ell^{-bt} + \int_0^t \ell^{b(\tau-t)} f(\tau)d\tau \qquad (5.3.2)$$

แต่ถ้าใช้ผลการแปลงลาปลาซ กับสมการ (5.3.1) โดยให้

$$\hat{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\hat{L}[y'(t)] = s\,Y(s) - y(0)$$

และ

$$\hat{L}[f(t)] = F(s)$$

จะได้

$$[s\,Y(s) - y_o] + b\,Y(s) = F(s) \qquad (5.3.3)$$

ซึ่งเป็นสมการพีชคณิตธรรมดา จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$Y(s) = G(s)\{y_o + F(s)\} \qquad (5.3.4)$$

โดย

$$G(s) = \frac{1}{s+b}$$

จากสมการ (5.3.4) เมื่อหาผลการแปลงผกผัน จะได้ผลเฉลยเหมือนกับสมการ (5.3.2) เนื่องจาก $\frac{1}{s+b}$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $e^{-bt}$ และ $G(s)\cdot F(s)$ เป็น ผลการแปลงของผลการประสาน

## 5.3.2 สมการอันดับสอง

พิจารณาสมการอันดับสองในรูป

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)\ ,\ t>0$$

$$y(0) = y_o \qquad (5.3.5)$$

$$y'(0) = v_o$$

โดย b และ c เป็นค่าคงที่ (สัมประสิทธิ์ของ y" ทำให้เป็นหนึ่ง เพื่อความสะดวก) ซึ่งสมการนี้พบเสมอ ๆ ในโจทย์การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์ ถ้าให้ผลการแปลงลาปลาซ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$ และ $\hat{L}[f(t) = F(s)$แล้ว สมการ (5.3.5) จะกลายเป็นสมการพีชคณิต คือ

$$[s^2\, Y(s) - sy_o - v_o] + b[sY(s) - y_o] + cY(s) = F(s)$$

หรือ

$$(s^2+bs+c)\, Y(s) = (s+b)y_o+\delta_o+F(s) \qquad (5.3.6)$$

จัดรูปใหม่เพื่อหา Y(s) จะได้

$$Y(s) = G(s)\{(s+b)y_o+v_o+F(s)\} \qquad (5.3.7$$

โดย

$$G(s) = \frac{1}{s^2+bs+c}$$

สมการ (5.3.7) เขียนได้เป็น

$$Y(s) = \frac{(s+b)y_o + v_o}{s^2+bs+c} + G(s)F(s)$$

ซึ่งเมื่อหาผลการแปลงผกผัน จะได้ผลเฉลยเช่นเดียวกับสมการอันดับหนึ่ง กล่าวคือ พจน์แรกทางขวามือ อยู่ในรูปที่ขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น (หาผลการการแปลงผกผันได้โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย) รวมกับพจน์หลังทางขวามือซึ่งหาผลการแปลงผกผันได้โดยใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน
นั่นคือ

$$Y(t) = \hat{L}^{-1}[G(s)H(s)] + \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (5.3.8)$$

โดย

$$H(s) = (s+b)y_o + v_o$$
$$g(t) = \hat{L}^{-1}[G(s)]$$

5.3.3 <u>สมการอันดับสูงกว่า</u>

พิจารณาสมการเชิงเส้น อันดับที่ n

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_o y = f(t),\ t>0 \quad (5.3.9)$$

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซเช่นเดียวกับสมการอันดับสอง จะได้

$$a_n[s^n Y(s)-\{s^{n-1}y(0)+s^{(n-2)}y'(0)+\ldots+sy^{(n-2)}(0)+y^{(n-1)}(0)\}]$$

$$+a_{n-1}[s^{n-1}Y(s)-\{s^{n-2}y(0)-s^{(n-3)}y'(0)+\ldots$$

$$+sy^{(n-3)}(0)+y^{(n-2)}(0)\}] +\ldots+ a_o Y(s) = F(s)$$

ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_o)Y(s) = F(s) + H(s)$$

โดย

$$H(s) = a_n y(0)s^{n-1} + \{a_{n-1}y(0)\}s^{n-2} + \ldots$$

$$+ \{a_1 y(0) + \ldots a_n y^{(n-1)}(0)\} \qquad (5.3.10)$$

หรือ

$$Y(s) = G(s)[F(s)+H(s)]$$

โดย

$$G(s) = [\sum_{k=0}^{n} a_k s^k]^{-1}$$

นั่นคือ

$$Y(s) = G(s)F(s) + G(s)H(s) \qquad (5.3.11)$$

จากสมการ (5.3.11) โดยใช้ผลการแปลงผกผัน จะได้ผลเฉลย

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau + \hat{L}^{-1}[G(s)H(s)] \quad (5.3.12)$$

$$g(t) = \hat{L}^{-1}[G(s)]$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. เนื่องจาก $G(s)$ เป็นส่วนกลับของฟังก์ชันพหุนามลำดับขั้น $n$ ในขณะที่ $H(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามลำดับขั้น $n-1$ ดังนั้น $G(s)H(s)$ เป็นฟังก์ชันตักยะแท้ ซึ่งสามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้โดยง่าย
2. ผลเฉลยในสมการ (5.3.2) และ (5.3.8) สำหรับกรณีสมการอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับจะต้องสอดคล้องกับผลเฉลยกรณีทั่วไปในสมการ(5.3.12) นี้ด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> 5.3.1

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + 4y = 0$$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$$

ผลเฉลย

ให้ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$

โดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซ จะได้ว่า

$$\hat{L}[y''+4y] = \hat{L}[y'']+4\hat{L}[y] = 0$$

จากคุณสมบัติตามสมการ (4.3.7) และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$s^2 Y(s) - 1 + 4Y(s) = 0$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4}$$

โดยใช้ผลการแปลงผกผัน จะพบว่า

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

ตัวอย่าง 5.3.2

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' - y' - 6y = \ell^t$$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$$

ผลเฉลย

ให้ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$

โดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซ จะได้ว่า

$$\hat{L}[y''] - \hat{L}[y'] - 6\hat{L}[y] = \hat{L}[\ell^t]$$

จากคุณสมบัติตามสมการ (4.3.7) และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$s^2 Y(s) - s - 1 - s Y(s) + 1 - 6Y = \frac{1}{s-1}$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{(s-1)^2+1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

หาผลการแปลงผกผัน โดยใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์ จะได้

$$y(t) = \hat{L}[Y(s)] = -\frac{1}{6}\ell^{t} + \frac{2}{3}\ell^{-2t} + \frac{1}{2}\ell^{-3t}$$

ตัวอย่าง 5.3.3

จงแก้สมการ

$$y'' + 2y' + 2y = g(t)$$

โดย $y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$

และ $g(t) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le t \le 1 \\ 0 \ , & 1 < t \end{cases}$

ผลเฉลย

ให้ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$

เนื่องจาก $\hat{L}[g(t)] = \dfrac{1-\ell^{-s}}{s}$

ดังนั้นโดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซ และจากเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$s^2 Y(s) + 2s\,Y(s) + 2\,Y(s) = \frac{1-\ell^{-s}}{s}$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{1-\ell^{-s}}{s(s^2+2s+2)}$$

$$= \frac{1}{s(s^2+2s+2)} - \frac{\ell^{-s}}{s(s^2+2s+2)}$$

ใช้ผลการแปลงผกผัน

$$y(t) = \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right] - \hat{L}^{-1}\left[\frac{\ell^{-s}}{s(s^2+2s+2)}\right]$$

จากสูตรการกระจายของเฮวีไซด์ จะได้

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right] = \frac{1/2}{s} - \frac{\frac{1}{2}s+1}{s^2+2s+2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\, \ell^{-t} \quad , \; t \geq 0$$

จากคุณสมบัติ

$$f(t-c) = \hat{L}^{-1}\,[\ell^{-cs}F(s)]$$

จะได้

$$\hat{L}^{-1}\left[\ell^{-s}\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\cos(t-1)+\sin(t-1)]\ell^{-(t-1)}$$

$$t \geq 1$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\ell^{-t}\right\} u(t)$$

$$+ \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\cos(t-1)+\sin(t-1)]\ell^{-(t-1)}\right\} u(t-1)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.3.4

จงแก้สมการ

$$y'''(t) + y'(t) = \ell^{t}$$

โดย

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้ $\hat{L}\,[y(t)] = Y(s)$

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ จะพบว่า

$$s^3\,Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-sY(s)-y(0) = \frac{1}{s-1}$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+s)}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}$$

หาผลการแปลงผกผัน โดยใช้สูตรการกระจายของเฮวีไซด์ จะได้

$$y(t) = \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\ell^{t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

ตัวอย่าง 5.3.5

จงแก้สมการ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = u(t-1)$$

โดย $y(0) = 0$ , $y'(0) = 0$ , $y''(0) = 1$ , $y'''(0) = 0$

ผลเฉลย

ให้ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซ และเงื่อนไขเริ่มต้น จะพบว่า

$$s^4Y(s) - s + 2s^2\,Y(s) + Y(s) = \frac{\ell^{-s}}{s}$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{\ell^{-s}}{s(s^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

โดยที่

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{-t\sin t}{2}$$

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{-1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s(s^2+1)^2}\right] = \cos t + \frac{t\sin t}{2} - 1$$

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{\ell^{-s}}{s(s^2+1)^2}\right] = \{\cos(t-1) + \frac{(t-1)\sin(t-1)}{2} - 1\}u(t-1)$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = \{\cos(t-1) + \frac{(t-1)\sin(t-1)}{2} - 1\}u(t-1) - \frac{1}{2}t\sin t$$

จากตัวอย่างที่ 5.3.1-5.3.5 เป็นการแก้สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อสัมประสิทธิ์ เป็นตัวแปรวิธีการนี้ก็ยังคงให้แก้ปัญหาได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3.6

จงแก้สมการ

$$y'' + aty' - 2ay = 1$$

โดย $y(0) = y'(0) = 0 \ , \ a>0$

ผลเฉลย

ให้ $\hat{L}\,[y(t)] = Y(s)$

ใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$$\hat{L}\,[y''] + a\,\hat{L}\,[ty'] - 2a\,\hat{L}\,[y] = \hat{L}\,[1]$$

แต่ $\hat{L}\,[ty'] = \frac{-d}{ds}\{\,\hat{L}\,[y']\}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$s^2\,Y(s) - a\frac{d}{ds}\,\{s\,Y(s)\}\,-2a\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2\,Y(s) - a\,Y(s) - as\,Y'(s) - 2a\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

หรือ

$$Y' + \frac{(3a-s^2)}{as}\,Y = \frac{-1}{as^2}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง , โดยใช้ตัวอย่างประกอบอินทิเกรต

$$\ell^{\int\left(\frac{3}{s} - \frac{s}{a}\right)ds} = s^3\,\ell^{-s^2/2a}$$ คูณตลอด แล้วอินทิเกรตจะได้

$$Y\,s^3\ell^{-s^2/2a} = \frac{1}{a}\int s\,\ell^{-s^2/2a}\,ds$$

$$= \ell^{-s^2/2a} + C$$

$$Y = \frac{1}{s^3} + \frac{C\ell^{s^2/2a}}{s^3}$$

เนื่องจาก $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ (เงื่อนไขจำเป็นของการมีผลการแปลงลาปลาซผกผัน) จะได้ $C = 0$ เพราะฉะนั้น

$$Y = \frac{1}{s^3}$$

หาผลการแปลงผกผัน จะได้ผลเฉลยคือ

$$Y(t) = \frac{t^2}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.3.7

แก้สมการ

$$ty'' + y' + ty = 0$$

โดย $Y(0) = 1$ , $y'(0) = 0$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้ $\hat{L}[y(t)] = Y(s)$

ดังนั้น

$$\hat{L}[ty''] + \hat{L}[y'] + \hat{L}[ty] = 0$$

จากคุณสมบัติตามสมการ (4.3.4 และ 4.3.8)

$$\frac{-d}{ds}[s^2 Y(s)-sy(0)-y'(0)] + s\,Y(s)-y(0)\ \frac{-d}{ds}\,Y(s) = 0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้

$$(s^2+1)\frac{dY}{ds} + sY = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถแยกตัวแปรได้

$$\frac{dY}{Y} = \frac{-sds}{s^2+1}$$

ถ้ากระจาย แล้วจัดรูป จะได้

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}}$$

ถ้ากระจาย $(1+s^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} s^2 + \dots$ เราไม่สามารถหา

ผลการแปลงผกผันของ $1 , s^2 , s^4 , \dots$ ได้

(เพราะขัดแย้งกับ $F(s) \to 0$ เมื่อ $s \to \infty$) ดังนั้น :

เราพิจารณา

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{2s^2} + \dots \right)$$

จะพบว่า

$$Y(s) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{s^{2n+1}}$$

โดยผลการแปลงผกผัน จะได้

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ จะพบว่า $C = 1$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยคือ

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n}$$

<u>หมายเหตุ</u>

เรียกสมการในตัวอย่าง 5.3.7 นี้ว่า สมการเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel equation) และเรียกผลเฉลยที่ได้ว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับศูนย์ เขียนแทนด้วย $y(t) = J_o(t)$

## แบบฝึกหัด 5.3

จากหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นต่อไปนี้ โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

1. $y'' - 4y = 0$ , $Y(0) = 1$ , $y'(0) = 2$
2. $y'' + \omega^2 y = 0$ , $y(0) = y_o$ , $y'(0) = v_o$
3. $y'' - 5y' + 4y = \ell^{2t}$ , $y(0) = 1$ , $y'(0) = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = t^2$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$
5. $y'' - 2y' + 2y = t$ , $y(0) = y'(0) = 1$
6. $y'' = 2y = 2\sin t$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = -1$
7. $y''' - ay' = -\sinh t$ , $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
8. $y'''+y''-y'-y = 9\ell^{2t}$ , $y(0) = 2$ , $y'(0) = 4$, $y''(0) = 3$
9. $y^{(4)}-2y''+y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) =1$
10. $ty'' - ty' - y = 0$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$
11. $y'' + 2ty - 4y = 1$ , $y(0) = y'(0) = 0$
12. $ty'' + 2y' - (t-2)y = 2\ell^{t}$ , $y(0) = 0$

# คำตอบ

1. $y = \ell^{2t}$

2. $y = y_o \cos \omega t + \frac{v_o}{\omega} \sin \omega t$

3. $y = \frac{1}{6}(10\ell^{t} - 3\ell^{2t} - \ell^{4t})$

4. $y = \frac{1}{8}(10t\ell^{2t} - 3\ell^{2t} + 2t^{2} + 4t + 3)$

5. $y = \frac{1}{2}[(3\cos t + 4\sin t)\ell^{-t} + 1 - 1]$

6. $y = \frac{1}{3}t^{3} + 2\ell^{-t} + 2$

7. $y = \frac{1}{8}\cosh t - \frac{1}{72}\cosh 3t - \frac{1}{9}$

8. $y = \ell^{t} + \ell^{2t} + \frac{9}{52}\ell^{-t}$

9. $y = \frac{1}{4}[(3t-2)\sinh t + (2t-1)\cosh t + \cos t]$

10. $y = t\ell^{t}$

11. $y = \frac{t^{2}}{2}$

12. $y = \sinh t$

## 5.4 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ผลการแปลงลาปลาซสามารถใช้แก้ปัญหาในสมการความร้อน และสมการคลื่นได้ โดยทำการแปลงเทียบกับตัวแปร t นั่นคือ ให้

$$\hat{L}\,[u(x,t)] = U\,(x,s)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[u_{xx}(x,t)] = \int_0^\infty u_{xx}\;\ell^{-st}\,dt$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty u(x,t)\;\ell^{-st}\,dt$$

$$= \frac{d^2U}{dx^2} = U_{xx}$$

และ

$$\hat{L}\,[u_t(x,t)] = \int_0^\infty u_t\;\ell^{-st}\,dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$= u(x,t)\;\ell^{-st}\Big|_0^\infty + s\,U\,(x,s)$$

เพื่อให้หาค่าได้ โจทย์มักจะกำหนด $u(x,t) \to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ ส่วน $u(0,t)$ แล้วแต่เงื่อนไขในโจทย์แต่ละปัญหา

แต่อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปแล้วผลการแปลงลาปลาซไม่เหมาะกับการแก้ปัญหาของสมการลาปลาซ เหตุผลลองพิจารณาผลการแปลงของ $u(x,y)$ เทียบกับ x ซึ่งได้

$$\hat{L}\,[u_{xx}(x,y)] = s^2\,U\,(s,y) - s\,u(0,t) - u_x(0,t)$$

จะพบว่าต้องทราบค่าของทั้ง u และ $u_x$ ที่ขอบเขต $x=0$ ซึ่งในปัญหาความเป็นจริงแล้ว เป็นไปไม่ได้( ในปัญหาการนำความร้อนก็คือให้กำหนดทั้งอุณหภูมิและฟลักซ์ของความร้อนที่ขอบเขต ซึ่งอาจจะไม่สอดคล้องกัน )

เนื่องจากในบทที่ 3 เราได้อธิบายความหมายทางกายภาพของสมการความร้อน และสมการคลื่นมาแล้ว ดังนั้นเราจะมาพิจารณาแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้

5.4.1 สมการความร้อน

ตัวอย่าง 5.4.1

พิจารณาแท่งโลหะเนื้อเดียวกันซึ่งยาวมาก ปลายข้างหนึ่งมีแหล่งความร้อนที่ขึ้นกับเวลาติดอยู่ ถ้าสมมุติว่าอุณหภูมิเริ่มต้นเป็นศูนย์องศา เราจะได้รูปแบบปัญหาดังนี้

$$u_{xx} = a^{-2} u_t \ , \ 0<x<\infty \ , \ t>0$$

B.C. $u(0,t) = f(t), \ u(x,t) \to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ (5.4.1)

I.C. $u(x,0) = 0 \quad , \ 0<x<\infty$

ผลเฉลย

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและกับเงื่อนไขขอบเขต จะได้

$$U_{xx} - \frac{s}{a^2} U = 0 \ , \ 0<x<\infty \qquad (5.4.2)$$

B.C. $U(0,s) = F(s) \ , \ U(x,s)\to 0$ เมื่อ $s\to\infty$

โดยที่ $\hat{L}\ [u(x,t)] = U(x,s)$ และ $\hat{L}\ [f(t)] = F(s)$

คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองคือ

$$U(x,s) = A(s)\ell^{x\sqrt{s}/a} + B(s)\ell^{-x\sqrt{s}/a} \qquad (5.4.3)$$

โดย $A(s)$ และ$B(s)$ เป็นฟังก์ชันทั่วไปตามใจชอบของ $s$ เพื่อให้สอดคล้อง $U(x,s)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ ต้องให้ $A(s) = 0$ และจากเงื่อนไขขอบเขต $U(0,s) = F(s)$ จะได้ $B(s) = F(s)$

ดังนั้น

$$U(x,s) = F(s)\ell^{-x\sqrt{s}/a} \qquad (5.4.4)$$

โดยการใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิว ในระนาบเชิงซ้อน (ดูหนังสือของAndrews) จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\ [\ell^{-x\sqrt{s}/a}] = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\ t^{3/2}}\ \ell^{-x^2/4a^2t} \qquad (5.4.5)$$

เพราะฉะนั้น ใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน จะได้ผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(f-\tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau \quad (5.4.6)$$

ซึ่งสมการ (5.4.6) สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่ง โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $z = x/2a\sqrt{t-\tau}$ จะได้

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty} f(t-x^2/4a^2z^2)\ell^{-t^2} dz \quad (5.4.7)$$

ในกรณีเฉพาะ เมื่ออุณหภูมิที่จุดปลายกำหนดโดย $f(t) = T_o$ (ค่าคงที่)จากสมการ (5.4.7) จะได้

$$u(x,t) = T_o \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) \quad (5.4.8)$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ถ้า $f(t) = T_o$ แล้ว $\hat{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s} T_o$

ดังนั้นจากสมการ (5.4.4) จะพบว่า

$$U(x,s) = T_o \frac{\ell^{-x\sqrt{s}/a}}{s}$$

จากตัวอย่าง 4.7.7 เราทราบว่า $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ell^{-x\sqrt{s}/a}\right] = \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t})$

นั่นคือ

$$u(x,t) = T_o \operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t})$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.4.2

พิจารณาแท่งโลหะเอกพันธ์ยาวหนึ่งหน่วย อุณหภูมิเริ่มต้นเป็นศูนย์ ที่จุดปลาย x=0 อุณหภูมิเป็นศูนย์ และที่ x=1 อุณหภูมิคงที่ $T_o$ ดังนั้นรูปแบบของปัญหาคือ

$$u_{xx} = a^{-2} u_t \;,\; 0<x<1 \;,\; t<0$$

B.C. $\quad u(0,t) = 0 \;,\; u(1,t) = T_o \quad (5.4.9)$

I.C. $\quad u(x,0) = 0 \;,\; 0<x<1$

<u>ผลเฉลย</u>

โดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการ (5.4.9) จะทำให้ได้

$$U_{xx} - \frac{s}{a^2} U = 0 \ , \ 0<x<1 \qquad (5.4.10)$$

B.C. $\quad U(0,s) = 0 \ , \ U(1,s) = \frac{T_o}{s}$

ซึ่งคำตอบทั่วไปคือ

$$U(x,s) = A(s)\cosh(x\sqrt{s}/a) + B(s)\sinh(x\sqrt{s}/a) \qquad (5.4.11)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $U(0,s) = 0$ จะได้

$$0 = A(s)$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $U(1,s) = 0 = \frac{T_o}{s}$ จะได้

$$\frac{T_o}{s} = B(s)\sinh(\sqrt{s}/a)$$

$$B(s) = \frac{T_o}{s \sinh(\sqrt{s}/a)}$$

ดังนั้น

$$U(x,s) = T_o \frac{\sinh(x\sqrt{s}/a)}{s\sinh(\sqrt{s}/a)} \qquad (5.4.12)$$

จากตัวอย่าง 4.7.8 จะทำให้หาผลการแปลงผกผันได้ผลเฉลยเป็น

$$u(x,t) = T_o \sum_{n=0}^{\infty} \{\operatorname{erfc} \frac{(1-x+2n)}{2a\sqrt{t}} - \operatorname{erfc} \frac{(1+x+2n)}{2a\sqrt{t}}\} \qquad (5.4.13)$$

หมายเหตุ

1. วิธีมาตรฐานในการแก้ปัญหาตามสมการ (5.4.9) ก็คือ การแยกตัวแปร ซึ่งจะได้ผลเฉลยในรูป

$$u(x,t) = T_o [x+\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\sin n\pi x) e^{-n^2\pi^2a^2t}] \qquad (5.4.14)$$

ซึ่งผลเฉลยจะเท่ากับสมการ (5.4.13)

2. จากสมการ (5.4.12) ถ้าหาผลการแปลงผกผันโดยใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิวจะได้ผลเฉลยเหมือนกับสมการ (5.4.14)

### 5.4.2 สมการคลื่น

ตัวอย่าง 5.4.3

ให้ $u(x,t)$ แทนระยะขจัดของการเคลื่อนที่ของเส้นเชือกยาวกึ่งอนันต์ ปลายข้างหนึ่งตรึงบนแกน x ที่ปลายอีกข้างหนึ่งผูกไว้รอบจุด $x=0$ สมมุติว่าเริ่มต้นเส้นเชือกอยู่ในสภาพนิ่ง และต่อมาปลายที่ผูกไว้หลวม ๆ ถูกทำให้เคลื่อนที่ในบางลักษณะ นั่นคือ $u(0,t) = f(t)$ เพราะว่าเชือกอยู่ในสภาพนิ่ง ดังนั้น $f(0)=0$ ถ้าไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นเชือก จะได้รูปแบบของปัญหาคือ

$$u_{xx} = c^{-2} u_{tt} \ , \ 0<x<\infty \ , t>0$$

B.C. $\quad u(0,t) = f(t) \ , \ u(x,t)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ (5.4.15)

I.C. $\quad u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , \ 0<x<\infty$

ผลเฉลย

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการ (5.4.15) จะได้

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2} U = 0 \ , \ 0<x<\infty \qquad (5.4.16)$$

B.C. $\quad U(0,s) = F(s) \ , \ U(x,s)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ หาผลเฉลยได้ในรูป

$$U(x,s) = A(s)\ell^{-sx/c} + B(s)\ell^{sx/c}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $U(x,s)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ ทำให้ได้ $B(s) = 0$ และจากเงื่อนไขขอบเขต $U(0,s) = F(s)$ ทำให้ได้ $A(s) = F(s)$ ดังนั้น

$$U(x,s) = F(s)\ell^{-sx/c} \qquad (5.4.17)$$

โดยคุณสมบัติการแปลงผกผันตามทฤษฎีบท 4.6.1 จะพบว่า

$$u(x,t) = f(t-x/c)\, u(t-x/c) \ ; \ x>0 \ , \ t>0$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ t\le x/c \\ f(t-x/c) & , \ t>x/c \end{cases} \qquad (5.4.18)$$

ซึ่งผลเฉลยนี้อธิบายได้ว่า ณ จุดต่าง ๆ บนเส้นเชือกที่ห่างจากจุดกำเนิด $x$ หน่วย ยังคงอยู่ในสภาพนิ่ง(ระยะขจัดเป็นศูนย์) จนกระทั่งเวลา $t = x/c$ ระยะขจัดจึงเกิดโดยเคลื่อนที่ในลักษณะเดียวกับที่จุด $x = 0$ ( ฟังก์ชัน $f$ เหมือนกัน ) หรือจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่าระยะขจัดที่กำหนดบนจุดปลาย $x = 0$ ส่งผ่านเส้นเชือกด้วยความเร็ว $c$

ตัวอย่าง 5.4.4

สมมุติเส้นเชือกยาวกึ่งอนันต์ ตรึงที่จุด $x = 0$ และมีแรงภายนอก $f(x,t) = -f_o\delta(t-x/v)$ มากระทำ โดย $v$ เป็นอัตราเร็ว $(x=vt)$ ถ้าสมมุติว่าเชือกเริ่มต้นจากสภาพนิ่ง จะได้รูปแบบปัญหาดังนี้

$$c^2u_{xx} = u_{tt} + f_o\delta(t-x/v) \ , \ 0<x<\infty \ , \ t>0$$

B.C. $u(0,t) = 0$ , $u(x,t)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ (5.4.19)

I.C. $u(x,0) = 0$ , $u_t(x,0)=0$ , $0<x<\infty$

ผลเฉลย

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซกับสมการ (5.4.19) จะได้

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2} U = \frac{f_o}{c^2} \ell^{-xs/v} \ , \ 0<x<\infty$$

B.C. $U(0,s) = 0$ , $U(x,s)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ (5.4.20)

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ ต้องหาผลเฉลยในรูปผลรวมของผลเฉลยกรณีขวามือเป็นศูนย์ กับผลเฉลยเฉพาะ ซึ่งจะได้

$$U(x,s) = A(s)\ell^{-sx/c} + B(s)\ell^{sx/c} + \text{ผลเฉลยเฉพาะ} \qquad (5.4.21)$$

โดยผลเฉลยเฉพาะคือ $\begin{cases} \dfrac{f_o v^2}{(c^2-v^2)s^2} \ell^{-sx/v} \ , & v\neq c \\ \dfrac{-f_o x}{2cs} \ell^{-sx/c} \ , & v=c \end{cases}$

ใช้เงื่อนไขขอบเขต $U(x,s)\to 0$, เมื่อ $x\to\infty$ จะได้ $B(s)=0$

ใช้เงื่อนไขขอบเขต $U(0,s)=0$ จะพบว่า

สำหรับ $v \neq c$ , $A(s) = \dfrac{-f_{\circ}v^2}{(c^2-v^2)s^2}$

สำหรับ $v = c$ , $A(s) = 0$

เพราะฉะนั้น จาก (5.4.12) จะได้

$$U(x,s) = \begin{cases} \dfrac{f_{\circ}v^2}{(c^2-v^2)s^2}\left(\ell^{-sx/v} - \ell^{-sx/c}\right), & v \neq c \\ \dfrac{-f_{\circ}x}{2cs}\,\ell^{-sx/c}, & v = c \end{cases} \qquad (5.4.22)$$

โดยใช้ผลการแปลงผกผันตามทฤษฎีบท 4.6.1 จะพบว่า

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f_{\circ}v^2}{c^2-v^2}[(t-\dfrac{x}{v})u(t-\dfrac{x}{v})-(t-\dfrac{x}{c})u(t-\dfrac{x}{c}) , & v \neq c \\ \dfrac{-f_{\circ}x}{2c}\,u(t\dfrac{-x}{v}) , & v = c \end{cases} \qquad (5.4.23)$$

## แบบฝึกหัด 5.4

จงใช้ผลการแปลงลาปลาซแก้ปัญหาของสมการต่อไปนี้

1. $u_{xx} = a^{-2}u_t \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0$

   B.C. $u(0,t) = T_o \ , \ u_x(1,t) = 0$

   I.C. $u(x,0) = 0$

2. $u_{xx} = a^{-2}u_t \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0$

   B.C. $u(0,t) = 0 \ , \ u(1,t) = 0$

   I.C. $u(x,0) = T_o$

3. $0.25\, u_{xx} = u_t - 1 \ , \ 0<x<10 \ , \ t>0$

   B.C. $u_x(0,t) = 0 \ , \ u(10,t) = 20$

   I.C. $u(x,0) = 50$

4. $u_{xx} = c^{-2}u_{tt} \ , \ 0<x<\infty \ , t>0$

   B.C. $u(0,t) = 0 \ , \ u_x(x,t) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$

   I.C. $u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = v_o$

5. $u_{xx} = c^{-2}\, u_{tt} \ , \ 0>x>\infty \ , \ t>0$

   B.C. $u(0,t) = 0 \ , \ u(x,t) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$

   I.C. $u(x,0) = A \ , \ u_t(x,0) = 0$