ผลเฉลย

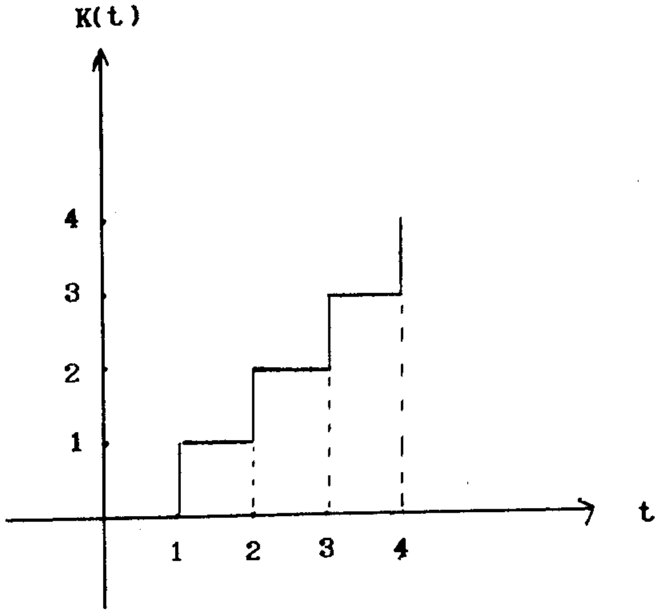
เนื่องจาก $N(t) = \int_0^t R(u)\,du$ โดย $N(t)$ เป็นตามตัวอย่าง 4.6.17
ดังนั้น

$$\hat{L}[N(t)] = \hat{L}\left[\int_0^t R(u)\,du\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}$$

ตัวอย่าง 4.6.19

จงหา $\hat{L}[K(t)]$,เมื่อ $K(t)$ เป็น staircase function ดังรูป 4.6.9



รูป 4.6.9

ผลเฉลย

เราพบว่า $K(t) = t-\sigma(t)$ โดย $\sigma(t) = 0 \leq t \leq 1$, $\sigma(t+1) = \sigma(t)$

นั่นคือ $\sigma(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ มี $p = 1$ ทำให้

$$\hat{L}[\sigma(t)] = \frac{\int_0^t t\, \ell^{-st}\, dt}{1-\ell^{-s}}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{\ell^{-s}}{s(1-\ell^{-s})}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}[K(t)] = \hat{L}[t] - \hat{L}[\sigma(t)]$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{\ell^{-s}}{s(1-\ell^{-s})}$$

$$= \frac{\ell^{-s}}{s(1-\ell^{-s})}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.20

จงหา $\hat{L}[|\sin t|]$; $|\sin t|$ เป็น full-wave rectification ของ $\sin t$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $|\sin t| = f(t) + f(t-\pi)\, u(t-\pi)$ โดย $f(t)$ เป็นไปตาม ตัวอย่าง 4.6.12 ดังนั้น

$$\hat{L}[\sin t] = \hat{L}[f(t)] + \ell^{-\pi s}\, \hat{L}[f(t)]$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)(1-\ell^{-\pi s})} + \frac{\ell^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-\ell^{-\pi s})}$$

$$= \frac{1+\ell^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-\ell^{-\pi s})}$$

$$= \frac{\coth(\pi s/2)}{s^2+1}$$

แบบฝึกหัด 4.6

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงผกผัน ต่อไปนี้

1.1 $\hat{L}\,[2u(t) - \delta(t-2) + \delta''(t-3)]$

1.2 $\hat{L}\,[\delta(t) + \delta(t-1)] + \ldots + \delta(t-n)]$

1.3 $\hat{L}^{-1}\,[[1-s]$

1.4 $\hat{L}^{-1}\,[(1+2s)\ell^{-3s} + s^3 + 1]$

1.5 $\hat{L}^{-1}\,[\frac{s^2-1}{s^2+1}]$

2. จงแสดงว่า $\hat{L}\,[f'] = s\,\hat{L}\,[f]$, $\hat{L}\,[f''] = s^2\,\hat{L}\,[f]$ สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังนี้

2.1 $f = \ell^t\,u(t)$

2.2 $f = t\,[u(t) - u(t-1)]$

3. จงหาผลการแแปลงลาปลาซผกผัก ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\frac{\ell^{-s}}{(s-3)(s-5)}$

3.2 $\frac{\ell^{-s}}{s(s-2)^2}$.

3.3 $\frac{1-\ell^{-2s}}{s(s-1)}$

4. จงหาผลการแปลงผกผัน ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $1-s$

4.2 $2 + s + 3s^2$

4.3 $\frac{s^2-1}{s^2+1}$

4.4 $\frac{s^2+3s+5}{(s-1)(s-2)}$

4.5 $\ell^{-2s}(2+5s)$

4.6 $\ell^{-s}(\frac{s+2}{s+1})$

5. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบต่อไปนี้

5.1 $$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \le t \le a \\ 0 & , a < t < 2a \end{cases}$$

$$f(t+2a) = f(t)$$

5.2 $$f(t) = \begin{cases} t/a & , 0 < t < a \\ 2-t/a & , a \le t \le 2a \end{cases}$$

$$f(t+2a) = f(t)$$

5.3 $$f(t) = |\sin at|$$

5.4 $$f(t) = \ell^{t} \quad , \quad 0 \le t \le 2 \; , \quad f(t+2) = f(t)$$

6. จงใช้ทฤษฎีบท 4.3.5 และ อนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ในหัวข้อ 1.5.6 แสดงว่า สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

$$\hat{L}\,[f'(t)] = s\,\hat{L}\,[f(t)] - f(0^{+}) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \ell^{-st_k}$$

7. ใช้ผลที่ได้ในข้อ 6 หาผลการแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 $$f(t) = \begin{cases} 0 , & 0 < t < 1 \\ 1 , & 1 < t < 2 \\ 0 , & t > 2 \end{cases}$$

7.2 $$f(t) = \begin{cases} t , & 0 < t < 1 \\ 0 , & t > 1 \end{cases}$$

7.3 $$f(t) = \begin{cases} 2-t , & 1 < t < 2 \\ 0 , & t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

7.4 $$f(t) = \begin{cases} 1 , & 0 < t < 1 \\ t , & 1 < t < 2 \\ 0 , & t > 2 \end{cases}$$

คำตอบ

1.

1.1 $2s^{-1} - \ell^{-2s} + s^{2}\ell^{-3s}$

1.2 $\dfrac{(\ell^{s} - \ell^{-ns})}{\ell^{s}-1}$

1.3 $\delta(t) - \delta'(t)$

1.4 $\delta(t-3) + 2\delta'(t-3) + \delta'''(t) + \delta(t)$

1.5 $\delta(t) - 2\sin t$

4.

4.1 $\delta(t) - \delta'(t)$

4.3 $\delta(t) - 2\sin t$

4.5 $2\delta(t-2) + 5\delta'(t-2)$

5.

5.1 $\dfrac{1}{s(1+\ell^{-as})}$

5.3 $\dfrac{1-\ell^{-as}}{as^{2}(1+\ell^{-as})}$

7.

7.1 $s(-\frac{1}{s})(\ell^{-2s} - \ell^{-s}) - \ell^{-s} + \ell^{-2s} = 0$

7.3 $\frac{1}{s}(\ell^{-2s} - \ell^{-s})$

4.7 ผลการแปลงของฟังก์ชันที่ยุ่งยาก

ในการประยุกต์ อาจจะพบกับฟังก์ชันที่ยุ่งยาก จึงจำเป็นที่จะต้องศึกษาผลการแปลงฟังก์ชันเหล่านี้ แล้วนำไปช่วยในการแก้ปัญหาของการประยุกต์ โดยมีวิธีการต่าง ๆ ดังนี้

4.7.1 วิธีอนุกรมกำลัง (Power Series Methods)

จากเรื่องการกระจายฟังก์ชันเบื้องต้นให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง เราได้ว่า

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1 \qquad (4.7.1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \text{ทุก } x \qquad (4.7.2)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \text{ทุก } x \qquad (4.7.3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \text{ทุก } x \qquad (4.7.4)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \text{ทุก } x \qquad (4.7.5)$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \text{ทุก } x \qquad (4.7.6)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1 \qquad (4.7.7)$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)x^n}{n!} \quad , \quad |x|<1 \qquad (4.7.8)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n+1} \quad , \quad |x| < 1 \qquad (4.7.9)$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1 \qquad (4.7.10)$$

ในการหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผัน บ่อยครั้งที่เราเขียนในรูปอนุกรมอนันต์ เพื่อทำให้หาได้ง่ายกว่าการหาโดยตรง

ตัวอย่าง 4.7.1

กำหนดให้ $\hat{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ จงหา

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{\sinh(cs)}\right]$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $\sinh z = \frac{1}{2}(\ell^{z} - \ell^{-z})$

ดังนั้น

$$\frac{F(s)}{\sinh(cs)} = \frac{2F(s)}{\ell^{cs}-\ell^{-cs}}$$

$$= \frac{2F(s)\ell^{-cs}}{1-\ell^{-rcs}}$$

ใช้อนุพันธ์ในสมการ (4.7.1) กระจาย $(1-\ell^{-2cs})^{-1}$ จะได้

$$\frac{1}{1-\ell^{-2cs}} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{-2ncs}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{F(s)}{\sinh(cs)} = 2\sum_{n-0}^{\infty} F(s)\,\ell^{-2ncs-cs}$$

จากคุณสมบัติ

$$\hat{L}^{-1}\,[\ell^{-as}F(s)] = f(t-a)u(t-a)\ ;\ a \to 0\ ,\ s > 0$$

ทำให้ได้

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{F(s)}{\sinh(cs)}] = 2\sum_{n=0}^{\infty} f(t-2nc-c)u(t-2nc-c)$$

ข้อสังเกต

ตัวอย่างนี้จะได้ใช้ในปัญหาของการประยุกต์กับสมการอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่าง 4.7.2

จากอนุกรมในสมการ (4.7.2)

$$\ell^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

ดังนี้เราสามาถเขียนได้เป็น

$$\frac{1-\ell^{t}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}$$

โดยการเลื่อนดรรชนี (index) จาก n ไปเป็น n+1 จะได้

$$\frac{1-\ell^{t}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}$$

เราทราบว่า

$$\hat{L}\,[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{s^{n+1}}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\frac{1-\ell^{-t}}{t}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)s^{n+1}}$$

จากอนกรมในสมการ (4.7.9) จะพบว่า

$$\hat{L}\left[\frac{1-e^{-t}}{t}\right] = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right), \quad s > 0$$

ตัวอย่าง 4.7.3

จงหาค่า $\hat{L}^{-1}\left[\ln\frac{s+1}{s-1}\right]$

ผลเฉลย

จากอนุพันธ์ในสมการ 4.7.10

$$\ln\frac{s+1}{s-1} = \ln\frac{1+\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)s^{2n+1}}$$

จาก

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2n+1}}\right] = \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\ln\frac{s+1}{s-1}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

จากอนุกรมในสมการ (4.7.6) จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\ln\frac{s+1}{s-1}\right] = \frac{2}{t}\sinh t$$

ตัวอย่าง 4.7.4

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\sin\sqrt{t}$

ผลเฉลย

จากอนุกรมกำลัง (4.7.4) เราได้

$$\sin\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1/2}}{(2n+1)!}$$

เพราะฉะนั้นผลการแปลงลาปลาซคือ

$$\hat{L}[\sin\sqrt{t}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \hat{L}[t^{n+1/2}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+3/2)}{s^{n+3/2}}$$

จากคุณสมบัติฟังก์ชันแกมม่า ที่ว่า $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

ดังนั้น

$$\Gamma(n+\frac{3}{2}) = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}[\sin\sqrt{t}] = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{4s}\right)^n$$

และจากอนุกรมกำลัง (4.7.2) จะได้

$$\hat{L}[\sin\sqrt{t}] = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-1/4s}$$

4.7.2 ฟังก์ชันค่าผิดพลาด

ตัวอย่าง 4.7.5

จงแสดงว่า $\hat{L}\,[\mathrm{erf}(\sqrt{t})] = \dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$

ผลเฉลย

จากนิยามฟังก์ชันค่าผิดพลาด จะได้

$$\mathrm{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \ell^{-u^2}\, du$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(\sqrt{t})] = \hat{L}\,[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \ell^{-u^2}\, du]$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $\sqrt{u} = v$, $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2dv$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(\sqrt{t})]\ ] = \hat{L}\,[\ \int_0^{t} \frac{\ell^{-v}}{\sqrt{v\pi}}\, dv\ ]$$

จาก

$$\hat{L}\,[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}] = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

โดยบทฤษฎีบท 4.3.3 ทำให้ได้

$$\hat{L}\,[\frac{\ell^{-t}}{\sqrt{\pi t}}] = \frac{1}{\sqrt{s+1}}$$

เพราะฉะนั้นโดยคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 4.3.6 จะพบว่า

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(\sqrt{t})] = \hat{L}\,[\int_0^t \frac{\ell^{-v}}{\sqrt{\pi v}}\,dv] = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.7.6

จงหา $\hat{L}\,[\mathrm{erf}(t)]$

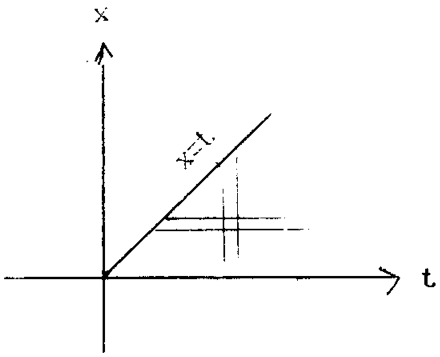
<u>ผลเฉลย</u>

จากนิยามผลการแปลงลาปลาซ และฟังก์ชันค่าผิดพลาด เราได้

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(t)] = \int_0^\infty \ell^{-st}\,\mathrm{erf}\,(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \ell^{-st}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \ell^{-x^2}\,dx\,dt$$

เปลี่ยนอันดับของการอินทิเกรต จาก $0 \le x \le t$, $0 \le t < \infty$ ไปเป็น $x \le t < \infty$, $0 \le x < \infty$ (ดูรูป 4.7.1) จะได้



รูป 4.7.1

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(t)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \ell^{-x^2}\int_x^\infty \ell^{-st}\,dt\,dx$$

$$= \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \ell^{-(x^2+sx)}\,dx$$

พิจารณา $x^2+sx = (x + \frac{s}{2})^2 - \frac{s^2}{4}$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(t)] = \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\, \ell^{s^2/4} \int_0^\infty \ell^{-(x+\frac{s}{2})^2}\, dx$$

โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $u = x + \frac{s}{2}$

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(t)] = \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\, \ell^{s^2/4} \int_{\frac{s}{2}}^\infty \ell^{-u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{s}\, \ell^{s^2/4}\, \mathrm{erfc}(\frac{s}{2})$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.7.7

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\mathrm{erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}})$

<u>ผลเฉลย</u>

จากนิยามของ erf x เราได้ว่า

$$\mathrm{erf}\,(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\sqrt{t}}^\infty \ell^{-u^2}\, du$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $u = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $du = -\frac{1}{2} v^{-3/2}\, dv$, และลิมิตการอินทิเกรตจะเปลี่ยนเป็น $v = 0$ ถึง $v = t$

$$\mathrm{erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t v^{-3/2}\, \ell^{-\frac{1}{v}}\, dv$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\mathrm{erfc}(\frac{1}{t})] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\hat{L}\,[\int_0^t v^{-3/2}\,\ell^{-1/v}\,dv]$$

โดยใช้คุณสมบัติผลการประสาน จะได้

$$\hat{L}\,[\mathrm{erfc}(\frac{1}{t})] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\hat{L}\,[1]\cdot\hat{L}\,[\,t^{-3/2}\,\ell^{-1/t}\,]$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{\pi}}\,\hat{L}\,[t^{-3/2}\,\ell^{-1/t}\,] \qquad (4.7.11)$$

ให้

$$F(s) = \hat{L}\,[t^{-3/2}\,\ell^{-1/t}\,]$$

จากทฤษฎีบท 4.3.4

$$\frac{dF}{ds} = \hat{L}\,[-t^{-1/2}\,\ell^{-1/t}\,]$$

และ

$$\frac{d^2F}{ds^2} = \hat{L}\,[-t^{-1/2}\,\ell^{-1/t}\,]$$

และจากทฤษฎีบท 4.3.5

$$\hat{L}\,[\frac{d}{dt}\,t^{1/2}\ell^{-1/t}] = s\,\hat{L}\,[t^{1/2}\ell^{-1/t}] - \lim_{t\to 0^+}[t^{1/2}\ell^{-1/t}]$$

หรือ

$$\hat{L}\,[\frac{1}{2}t^{-1/2}\ell^{-1/t} + t^{-3/2}\ell^{-1/t} = s\,\hat{L}\,[t^{1/2}\ell^{-1/t}] - 0$$

นั่นคือ

$$-\frac{1}{2}\,\frac{dF}{ds} + F = \frac{s\,d^2F}{ds^2}$$

เพราะฉะนั้น F(s) เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{s\,d^2F}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{dF}{ds} - F = 0$$

เราทราบมาแล้วว่า $F(s) \to 0$ เมื่อ $s \to \infty$, เราพิจารณาเมื่อ $s \to 0^+$

$$\lim_{s\to 0^+} F(s) = \lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty \ell^{-st}\, t^{-3/2}\, \ell^{-1/t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^{-3/2}\, \ell^{-1/t}\, dt$$

แต่จาก

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t v^{-3/2}\, \ell^{-1/v}\, dv$$

แทนค่า $y = t$

$$\int_0^y v^{-3/2}\, \ell^{-1/v}\, dv = \sqrt{\pi}\, \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

ดังนั้น

$$\lim_{s\to 0^+} F(s) = \lim_{y\to\infty} \sqrt{\pi}\, \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \sqrt{\pi}\, \operatorname{erfc}(0) = \sqrt{\pi}$$

ฉะนั้น จะแก้สมการอนุพันธ์ เพื่อหา $F(s)$ ต้องมีเงื่อนไข

$s \to \infty \quad , F(s) \to 0$

$s \to 0^+ \quad , F(0) \to \sqrt{\pi}$

จาก

$$\frac{s\,d^2F}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{dF}{ds}\, F = 0$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $z = \sqrt{s}$ และจากกฎลูกโซ่

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\frac{dF}{dz} = \frac{1}{2z}\frac{dF}{dz}$$

$$\frac{d^2F}{ds^2} = \frac{1}{4s}\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{4s\sqrt{s}}\frac{dF}{dz}$$

นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ จะกลายเป็น

$$\frac{d^2F}{dz^2} - 4F = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปคือ

$$F = c_1\, \ell^{-2z} + c_2\, \ell^{2z}$$

หรือ

$$F = c_1\, \ell^{-2\sqrt{s}} + c_2\, \ell^{2\sqrt{s}}$$

จากเงื่อนไข $s \to \infty$, $F \to 0$ จะได้

$$b_2 = 0$$

และ $s \to 0^+$, $F \to \sqrt{\pi}$ จะได้

$$\sqrt{\pi} = c_1$$

เพราะฉะนั้น

$$F(s) = \hat{L}\,[t^{-3/2}\,\ell^{-1/t}] = \sqrt{\pi}\,\ell^{-2\sqrt{s}}$$

กลับไปสมการ (4.7.11) จะได้

$$\hat{L}\,[\mathrm{erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}})] = \frac{1}{s}\,\ell^{-2\sqrt{s}}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

จากทฤษฎีบท 4.3.2 ทำให้ได้

$$\hat{L}\,[\mathrm{erfc}(\frac{k}{\sqrt{t}})] = \frac{1}{s}\,\ell^{-2k\sqrt{s}}$$

หรือ

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s}\,\ell^{2k\sqrt{s}}] = \mathrm{erfc}(\frac{k}{\sqrt{t}})$$

ตัวอย่าง 4.7.8

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{\sinh t\sqrt{s}}{s\sinh\sqrt{s}}\right]$, $0 < t < 1$, $0 < 0$

ผลเฉลย

ถ้า $t > 1$ จะไม่สามารถหาผลการแปลงผกผันได้ เพราะว่า พฤติกรรมของ

$\frac{\sinh t\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}}$ เมื่อ $s \to \infty$

เนื่องจาก

$$\frac{\sinh t\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}} = \frac{\ell^{t\sqrt{s}} - \ell^{-t\sqrt{s}}}{\ell^{\sqrt{s}} - \ell^{-\sqrt{s}}}$$

คูณเศษและส่วนด้วย $\ell^{-\sqrt{s}}$ จะได้

$$\frac{\sinh t\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}} = \frac{\ell^{-(1-t)\sqrt{s}} - \ell^{-(1+t)\sqrt{s}}}{1-\ell^{-2\sqrt{s}}}$$

จากอนุกรมกำลัง

$$\frac{1}{1-\ell^{-2\sqrt{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{-2n\sqrt{s}}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sinh t\sqrt{s}}{s\sinh\sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s}\left\{ \ell^{-(1-t+2n)\sqrt{s}} - \ell^{-(1+t+2n)\sqrt{s}} \right\}$$

จากข้อสังเกต ในตัวอย่างที่แล้วจะได้

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{\sinh t\sqrt{s}}{s\sinh\sqrt{s}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1-t+2n}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1+t+2n}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

4.7.3 ฟังก์ชันเบสเซล

ตัวอย่าง 4.7.9

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $t^{\nu/2} J_{\nu}(2\sqrt{t})$

ผลเฉลย

จากนิยามของฟังก์ชันเบสเซลในรูปอนุกรมกำลัง

$$t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{t}) = t^{\nu/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+\nu/2}}{k!\ \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+\nu/2}}{k!\ \Gamma(k+\nu+1)}$$

ฉะนั้นผลการแปลงลาปลาซคือ

$$\hat{L}\ [t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{t})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(k+\nu+1)}\ \hat{L}\ [t^{k+\nu}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ s^{k+\nu+1}}$$

$$= \frac{1}{s^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{s}\right)^k$$

จากอนุกรมกำลัง

$$\hat{L}\ [t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{t})] = \frac{1}{s^{\nu+1}}\ \ell^{-1/s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

ข้อสังเกต

1. จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 4.3.2

$$\hat{L}\ [t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{at})] = \frac{a^{\nu/2}}{s^{\nu+1}}\ \ell^{-a/s} \quad , \ a > 0\ , \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

2. จากหัวข้อ 1 สำหรับกรณี $\nu = 0$

$$\hat{L}\,[J_o(2\sqrt{at})] = \frac{1}{s}\,e^{-a/s} \qquad , a > 0 \text{ , } Re(s) > 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.7.10

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $J_o(t)$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$J_o(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}t)^{2k}}{(k!)^2}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[J_o(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot s^{2k+1}}$$

แต่ $(2k)! = 2^k\ k!\ [1.3.5...(2k-1)]$ ดังนั้น

$$\hat{L}\,[J_o(t)] = \frac{1}{s}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k[1.3.5...(2k-1)]}{2^k\ k!\ s^{2k}}\right]$$

หรือ

$$\hat{L}\,[J_o(t)] = \frac{1}{s}\,(1 + \frac{1}{s^2})^{-1/2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}\,[J_o(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

ข้อสังเกต

1. จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้

$$\hat{L}\,[J_o(z)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

2. สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป $J_\nu(at)$ สามารถหาผลการแปลงได้เช่นกัน แต่ต้องใช้ความรู้ของฟังก์ชันแกมม่าหลายอย่าง จึงไม่กล่าวในที่นี้

3. เนื่องจาก

$$\frac{d}{dz}\,J_o(z) = -J_1(z)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}\,J_o(at) = a\;J_1(at)$$

และ เราจะได้

$$\hat{L}\,[-a\;J_1(at)] = \hat{L}\,[\frac{d}{dt}\,J_o(at)]$$

$$= s\,\hat{L}\,[J_o(at)] - J_o(0)$$

แต่ $J_o(0) = 1$, ดังนั้น

$$\hat{L}\,[-a\;J_1(at)] = \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}} - 1$$

หรือ

$$\hat{L}\,[\;J_1(at)] = \frac{\sqrt{s^2+a^2}}{a\sqrt{s^2+a^2}} - s$$

หมายเหตุ

ยังมีวิธีที่ใช้หาผลการแปลงผกผันอย่างมีประสิทธิภาพมาก คือใช้ทฤษฎีบทค่าเรซิดิว ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งไม่ได้กล่าวในที่นี้

แบบฝึกหัด 4.7

1. จงหาค่าของ $\hat{L}\left[\frac{\sin kt}{t}\right]$

2. จงหาค่าของ $\hat{L}\left[\frac{1-\cos kt}{t}\right]$

3. จงหาค่าของ $\hat{L}\left[\frac{\sinh (kt)}{t}\right]$

4. จงหาค่าของ $\hat{L}\left[\frac{1-\cosh (kt)}{t}\right]$

5. ใช้อนุกรมกำลังของ erfx แสดงว่า

$$\hat{L}\,[t^{-1/2}\text{erf}\,(\sqrt{t})] = \frac{2}{\sqrt{\pi s}}\,\text{arc tan}\,\frac{1}{\sqrt{s}} \quad , \; s > 0$$

6. ใช้ความจริงที่ว่า

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+s}} = \frac{1-\sqrt{1+s}}{1-(1+s)} = -\frac{1}{s} + \frac{\sqrt{1+s}}{s} = -\frac{1}{s} + \frac{1+s}{s\sqrt{1+s}}$$

และผลจากตัวอย่าง 4.7.5 เพื่อแสดงว่า

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{1+\sqrt{1+s}}] = -1 + \text{erf}(\sqrt{t}) + \frac{\ell^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$= \frac{\ell^{-t}}{\sqrt{\pi t}} - \text{erfc}(\sqrt{t})$$

คำตอบ

1. $\text{arc tan}\,\frac{k}{s}\;,\; s > 0$

2. $\frac{1}{2}\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\;,\; s > k > 0$

3. $\ln\frac{s+k}{s-k}\;,\; s > k > 0$

4. $\frac{1}{2}\ln(1-\frac{k^2}{s^2})\;,\; s > k > 0$