<u>คำตอบ</u>

1.

1.1 $5+7t$

1.3 $3\ell^{t} + 2\ell^{-t}$

1.5 $\ell^{t}(t+3)$

1.7 $2 \sin t \pm 3 \cos t$

1.9 $\begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 2 & , \quad 1 \leq t < 2 \\ 2+3\ell^{t-2} & , \quad t \geq 2 \end{cases}$

2.

2.1 $\frac{1}{2}(1-\ell^{-2t})$

2.2 $\frac{1}{2}\ell^{t}(4 \cos 2t + 5 \sin 2t)$

2.3 $\dfrac{8t^{1/2}-5t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$

2.4 $\dfrac{\ell^{-3t}t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$

2.5 $\int_{0}^{t} \frac{\sin x}{x}\, dx$

2.6 $\frac{1}{t}(\ell^{bt}-\ell^{at})$

2.7 $\frac{2}{t}(1-\cos at)$

3.

3.1 $\ell^{2t} - \ell^{t}$

3.3 $3\ell^{2t} - \ell^{t} - 2\ell^{-2t}$

3.5 $2\ell^{t} - 2 - t$

3.7 $\frac{1}{4}[\ell^{-2t}(4t^{2}+2t+1)+1]$

3.9 $1 - \cos t$

3.11 $\frac{1}{10}[4+\ell^{-t}(26 \cos 2t - 17 \sin 2t)]$

3.13 $-\ell^{-t} - \frac{1}{2}t^{2}\ell^{2t} + 2t\,\ell^{2t} + \ell^{2t}$

3.15 $\frac{41}{7}\ell^{-3t} - \frac{13}{7}\ell^{-3t/2}\cos(\frac{\sqrt{19}}{2}t) - \frac{129\sqrt{19}}{133}\ell^{-3t/2}\sin(\frac{\sqrt{19}}{2}t)$

4.

4.1 $\frac{1}{24}(22\ell^{3t} - 7\ell^{-3t} - 15\ell^{t})$

5.

5.1 $\frac{1}{6}(4\cos t - 2\sin t - 4\cos 2t + \sin 2t)$

5.3 $\frac{1}{12}(8\sin t + 4\cos t - 4\sin 2t - \cos 2t - 3)$

6.

6.1 $e^{t} * e^{2t}$

6.3 $f(t) * e^{5t}$ โดย $f(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 1 \\ e^{3(t-1)} & , t \geq 1 \end{cases}$

6.5 $f(t) * e^{t}$ โดย $f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$

4.6 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพิเศษ

เช่นเดียวกับหัวข้อ 2.6 เราสามารถนิยามผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 1.5 ได้ดังนี้

4.6.1 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

เราทราบแล้วว่า ถ้า

$$f(t) = \begin{cases} 1 , & t > 0 \\ 0 , & t < 0 \end{cases}$$

แล้ว

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{1}{s} \quad , \; s > 0$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[u(t)] = \frac{1}{s} \quad , \; s > 0 \qquad (4.6.1)$$

ทฤษฎีบท 4.6.1

ถ้า $f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ แล้ว

$$\hat{L}\,[f(t-a)\,u(t-a)] = \ell^{-as}\,\hat{L}\,[f(t)] \qquad (4.6.2)$$

โดยที่ $a > 0$ และ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t-a)\,u(t-a)] = \int_0^\infty \ell^{-st}\, f(t-a)\, u(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \ell^{-st}\, f(t-a)\, dt$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = t-a$ จะได้

$$\hat{L}\,[f(t-a)\,u(t-a)] = \int_0^{\infty} \ell^{-s(x+a)}\, f(x)\, dx$$

$$= \ell^{-as} \int_0^{\infty} \ell^{-sx}\, f(x)\, dx$$

$$= \ell^{-as}\, \hat{L}\,[f(t)]$$

ข้อสังเกต

1. สมการ (4.6.2) เขียนอีกแบบหนึ่งคือ

$$\hat{L}\,[f(t)\,u(t-a)] = \ell^{-as}\, \hat{L}\,[f(t+a)] \qquad (4.6.3)$$

ซึ่งถ้า $f(t) = 1$ จะพบว่า

$$\hat{L}\,[u(t-a)] = \ell^{-as}\, \hat{L}\,[1] \quad , a > 0$$

$$= \frac{1}{s}\, \ell^{-as} \qquad (4.6.4)$$

2. ทฤษฎีบท 4.6.1 นี้ส่วนมากใช้กับฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 4.6.1

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & , \quad 0 < t < 2 \\ 6 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

ผลเฉลย

ก่อนอื่นเราเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย นั่นคือ

$$f(t) = t^2\, \{u(t)-u(t-2)\} + 6u(t-2)$$

$$= t^2\, u(t) + (6-t^2)\, u(t-2)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \hat{L}\,[t^2\, u(t)] + \hat{L}\,[(6-t^2)\, u(t-2)]$$

จากตัวอย่าง 4.1.3 จะได้

$$\hat{L}\,[t^2\, u(t)] = \frac{2}{s^3} \;, \; \sigma > 0$$

จากสมการ 4.6.3 จะได้

$$\hat{L}\,[(6-t^2)\,u(t-2)] = \ell^{-2s}\,\hat{L}\,[6-(t+2)^2]\,, \quad \sigma > 0$$

$$= \ell^{-2s}\,\hat{L}\,[2-4t-t^2]$$

$$= \ell^{-2s}\left(\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{2}{s^3} + \ell^{-2s}\left(\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s^3}\right), \quad \sigma > 0$$

ตัวอย่าง 4.6.2

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

$$f(t) = \begin{cases} \ell^{3t} & , \quad 1 < t < 2 \\ 0 & , \quad t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ผลเฉลย

เขียน $f(t)$ ในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย จะได้

$$f(t) = \ell^{3t}\,\{u(t-1)-u(t-2)\}$$

$$= \ell^{3t}\,u(t-1) - \ell^{3t}\,u(t-2)$$

จากสมการ (4.6.3) สำหรับ $\sigma > 3$ จะได้

$$\hat{L}\,[f(t)] = \ell^{-s}\,\hat{L}\,[\ell^{3(t+1)}] - \ell^{-2s}\,\hat{L}\,[\ell^{3(t+2)}]$$

$$= \ell^{-s}\,\ell^{3}\,\frac{1}{s-3} - \ell^{-2s}\,\ell^{6}\,\frac{1}{s-3}$$

$$= \frac{\ell^{3-s} - \ell^{6-2s}}{s-3}$$

ข้อสังเกต

เราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซโดยใช้นิยามโดยตรงได้ โดยไม่ต้องใช้ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

ตัวอย่าง 4.6.3

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

$$f(t) = \begin{cases} 8 & , \quad t < 2 \\ 6 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 2 \\ -2 & ; \quad t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 - 2 \begin{cases} 0 & , \quad t < 2 \\ 1 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 - 2\, u(t-2)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.6.4) จะได้

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{8}{s} - \frac{2\ell^{-2s}}{s}$$

ตัวอย่าง 4.6.4

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad t < \pi \\ t & , \quad t > \pi \end{cases}$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$f(t) = \sin t + \begin{cases} 0 & , \ t < \pi \\ t-\sin t & , \ t > \pi \end{cases}$$

$$= \sin t + (t-\sin t)\, u(t-\pi)$$

$$= \sin t + \{ \pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)\}\, u(t-\pi)$$

ดังนั้นจากสมการ (4.6.3)

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{1}{s^2+1} + \ell^{-\pi s}\, \{\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\}$$

ข้อสังเกต

1. จากตัวอย่าง 4.6.3 เราสามารถเขียน $f(t)$ ในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยเช่นกับตัวอย่าง 4.6.1 และ 4.6.2 ได้ คือ

$$f(t) = 8\,\{\, u(t) - u(t-2)\,\} + 6u(t-2)$$

$$= 8u(t) - 2u(t-2)$$

2. ทำนองเดียวกัน สำหรับตัวอย่าง 4.6.4 จะได้

$$f(t) = \sin t\,\{\, u(t) - u(t-\pi)\,\} + tu(t-\pi)$$

$$= \sin t\, u(t) + (t-\sin t)\, u(t-\pi)$$

จากทฤษฎีบท 4.6.1 ที่ว่า

$$\hat{L}\,[f(t-a)\, u(t-a)] = \ell^{-as}\, \hat{L}\,[f(t)]$$

จะได้ผลการแปลงผกผันดังนี้

$$\hat{L}^{-1}\,[\ell^{-as}\, F(s)] = f(t-a)\, u(t-a) \qquad (4.6.5)$$

ตัวอย่าง 4.6.5

จงหา $\hat{L}^{-1}\,[\frac{\ell^{-3s}}{s^2+4}]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s^2+4}] = \frac{1}{2}\sin 2t$$

ดังนั้นจากสมการ (4.6.5) จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{\ell^{-3s}}{s^2+4}\right] = u(t-3)\,\frac{1}{2}\sin 2(t-3)$$

$$= \begin{cases} 0 & , 0 \le t < 3 \\ \frac{1}{2}\sin(2t-6) & , t > 3 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.6.6

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s\,\ell^{-2s}}{s^2+16}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+16}\right] = \cos 4t$$

ดังนั้นจากสมการ (4.6.5) จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s\,\ell^{-2s}}{s^2+16}\right] = u(t-2)\cos 4(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ \cos 4(t-2) & , t > 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.6.7

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{\ell^{-5s}}{\sqrt{s-2}}\right]$

ผลเฉลย

เพราะว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s-2}}\right] = \frac{t^{-1/2}\ell^{2t}}{\sqrt{\pi}}$$

จากสมการ (4.5.3) จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{\ell^{-5s}}{\sqrt{s-2}}\right] = \frac{u(t-5)(t-5)^{-1/2}\ell^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \begin{cases} 0 & , t < 5 \\ \dfrac{(t-5)^{-1/2}\ \ell^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}} & , t > 5 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.6.8

จงหา $f(t)$ จาก

$$f(t) = \hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{4\ell^{-s}}{s^2} + \frac{4\ell^{-3s}}{s^2}\right]$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}\right] = 3$$

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right] = 4t$$

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{4\ell^{-s}}{s^2}\right] = 4(t-1)u(t-1)$$, โดยใช้สมการ (4.6.5)

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{4\ell^{-3s}}{s^2}\right] = 4(t-3)u(t-3)$$, โดยใช้สมการ (4.6.5)

ดังนั้น

$$f(t) = 3-4(t-1)\,u(t-1) + 4(t-3)\,u(t-3) \qquad (4.6.6)$$

เพื่อที่จะเขียนฟังก์ชัน $f(t)$ โดยไม่ต้องมีฟังก์ชัน $u(t)$ เราจะพิจารณาช่วงของ t ดังนี้

สำหรับ $0 < t < 1$, ซึ่ง $u(t-1) = 0$ และ $u(t-3) = 0$ จะพบว่า

$$f(t) = 3 \;,\quad 0 < t < 1 \qquad (4.6.7)$$

สำหรับ $1 < t < 3$, ซึ่ง $u(t-1) = 0$ และ $u(t-3) = 0$ จะพบว่า

$$f(t) = 3-4(t-1) = 7-4t \;,\quad 1 < t < 3 \qquad (4.6.8)$$

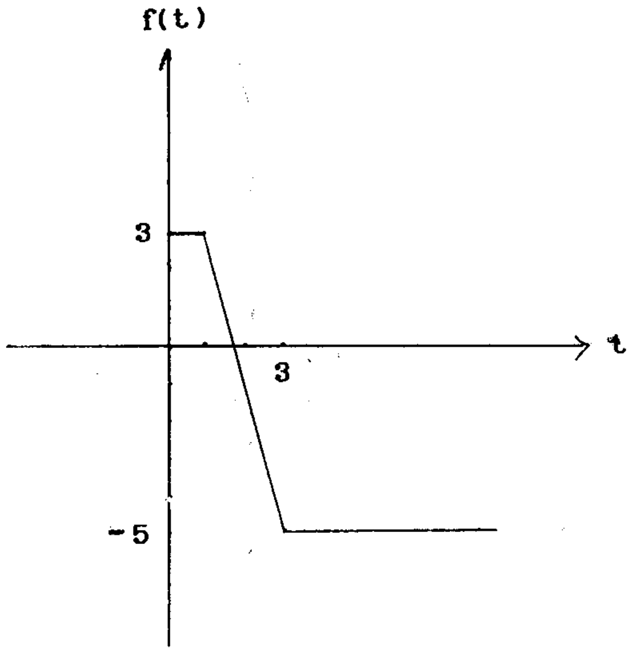
สำหรับ $t > 3$, $u(t-1) = 0$ และ $u(t-3) = 1$ จะพบว่า

$$f(t) = 3-4(t-1) + 4(t-3) = -5 \;,\quad t > 3 \qquad (4.6.9)$$

นั่นคือ

$$f(t) = \begin{cases} 3 & , \quad 0 < t < 1 \\ 7-4t & , \quad 1 < t < 3 \\ -5 & , \quad t > 3 \end{cases} \qquad (4.6.10)$$

ซึ่งสมการ (4.6.10) นี้เหมือนกับสมการ (4.6.6) ดังแสดงในรูป



รูป 4.6.1

4.6.2 <u>ฟังก์ชันเดลต้า</u>

เนื่องจากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเดลต้า ตามหัวข้อ 1.5.5 จะพบว่า

$$\hat{L}\,[\delta(t)] = \int_{0}^{\infty} \delta(t)\, \ell^{-st}\, dt = 1 \qquad (4.6.11)$$

โดยที่ $\delta(t)$ เป็นศูนย์ สำหรับ $t < 0$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\hat{L}\,[\delta^{(k)}(t)] = \int_{0}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\, \ell^{-st}\, dt$$

$$= (-1)^{k} \frac{d^{k}}{dt^{k}} \ell^{-st} \Big|_{t=0}$$

$$= s^{k} \qquad (4.6.12)$$

และ

$$\hat{L}\,[f(t)\delta(t-c)] = (-1)^{k} \frac{d^{k}}{dt^{k}} \ell^{-st} \Big|_{t=c}$$

$$= s^{k}\, \ell^{-sc} \qquad (4.6.13)$$

สำหรับ $c \geq 0$

ยิ่งกว่านั้น

$$\hat{L}\,[f(t)\delta(t-c)] = \int_{0}^{\infty} f(t)\, \delta(t-c)\ell^{-st}\, dt$$

$$= f(c)\, \ell^{-sc} \qquad (4.6.14)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.9

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก) $t^{2}\, \delta(t-c)$

ข) $\sin t\; \delta(t-\frac{\pi}{2})$

<u>ผลเฉลย</u>

ก) เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t)\,\delta(t-c)] = f(c)\,\ell^{-sc}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[t^2\,\delta(t-c)] = 3^2\,\ell^{-3s}$$
$$= 9\,\ell^{-3s}$$

ข) ทำนองเดียวกับข้อ ก)

$$\hat{L}[\sin t\,\delta(t-\frac{\pi}{2})] = \sin\frac{\pi}{2}\,\ell^{-\pi s/2}$$
$$= \ell^{-\pi s/2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.10

จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ

ก) $3 + 5s + 2s^2$

ข) $\ell^{-s}(7+2s) + \ell^{-2s}(3s-s^3)$

<u>ผลเฉลย</u>

ก) $\hat{L}^{-1}\,[3+5s+2s^2] = 3\,\hat{L}^{-1}\,[1] + 5\,\hat{L}^{-1}\,[s] + 2\,\hat{L}^{-1}\,[s^2]$

เนื่องจาก $\hat{L}\,[\delta^{(k)}(t)] = s^k$

หรือ $\hat{L}^{-1}\,[s^k] = \delta^{(k)}(t)$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\,[3+5s+2s^2] = 3\delta(t) + 5\delta'(t) + 2\delta''(t)$$

ข) ทำนองเดียวกับข้อ ก) และจากสมการ (4.6.14)

จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\,[\ell^{-s}\,(7+2s) + \ell^{2s}\,(3s-s^3)]$$
$$= 7\,\delta(t-1) + 2\,\delta'(t-1) + 3\,\delta''(t-2) - \delta'''(t-2)$$

4.6.3 <u>ฟังก์ชันคาบ</u>

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.6.2

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบ p , $t \geq 0$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ใน $0 \leq t \leq p$ แล้ว

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{\int_0^p \ell^{-st}\, f(t)\, dt}{1 - \ell^{-ps}} \quad , \; s > 0$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t) = \int_0^\infty \ell^{-st}\, f(t)\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} \ell^{-st}\, f(t)\, dt$$

ให้ $\tau = t-np$ จะได้

$$\hat{L}\,[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{-nps} \int_0^p \ell^{-s\tau}\, f(\tau+np)\, d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{-nps} \int_0^p \ell^{-s\tau}\, f(\tau)\, d\tau$$

เนื่องจากอินทิกรัลทางขวามือไม่ขึ้นกับค่า n ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \left(\int_0^p \ell^{-st}\, f(t)\, dt \right) \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{-nps}$$

สำหรับ $s > 0$, $\ell^{-nps} < 1$ ทำให้อนุกรมเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้าสู่ $\frac{1}{1-\ell^{ps}}$ เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{\int_0^p \ell^{-st}\, f(t)\, dt}{1 - \ell^{-ps}}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

เพื่อความสะดวก เราสามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้ เรานิยามฟังก์ชัน

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & , 0 \le t \le p \\ 0 & , \quad t > p \end{cases}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$f_p(t) = u(t)\, f(t) - u(t-p)\, f(t-p)$$

ดังนั้น

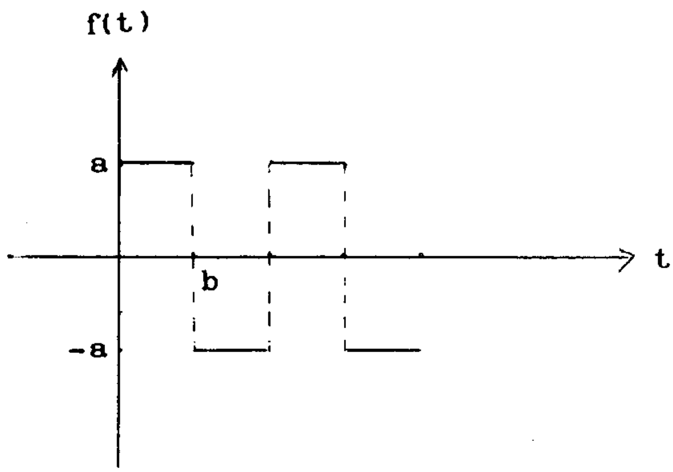
$$\hat{L}\,[f_p(t)] = \hat{L}\,[f(t) - \ell^{-ps}\, \hat{L}\,[f(t)]$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{\hat{L}\,[f_p(t)]}{1-\ell^{-ps}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.11

จากรูป 4.6.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซ



รูป 4.6.2

ผลเฉลย

เนื่องจาก $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ โดยมีคาบ $p = 2b$ และต่อเนื่องเป็นช่วง ดังนั้น ใช้ทฤษฎีบท 4.6.2 ได้

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{\int_0^{2p} \ell^{-st}\, f(t)\, dt}{1 - \ell^{-2bs}}$$

พิจารณา

$$\int_0^{2b} \ell^{-st} f(t)\, dt = a\int_0^{b} \ell^{-st}\, dt - a\int_0^{2b} \ell^{-st}\, dt$$

$$= \frac{a}{s}\,(1-\ell^{-sb})^2$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{a}{s}\;\frac{(1-\ell^{-sb})^2}{(1-\ell^{-2bs})}$$

$$= \frac{a}{s}\;\frac{(1-\ell^{-sb})}{1+\ell^{sb}}$$

ตัวอย่าง 4.6.12

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ โดยกำหนด

$$f(t) = \begin{cases} \sin t\ , & 0 \le t \le \pi \\ 0\ , & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งมีคาบ $p = 2\pi$ และต่อเนื่องด้วย

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \frac{\int_0^{2\pi} \ell^{-st}\, f(t)\, dt}{1 - \ell^{-2\pi s}}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} \ell^{-st} \sin t\, dt}{1 - \ell^{-2\pi s}}$$

$$= \frac{1+\ell^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-\ell^{-2\pi s})}$$

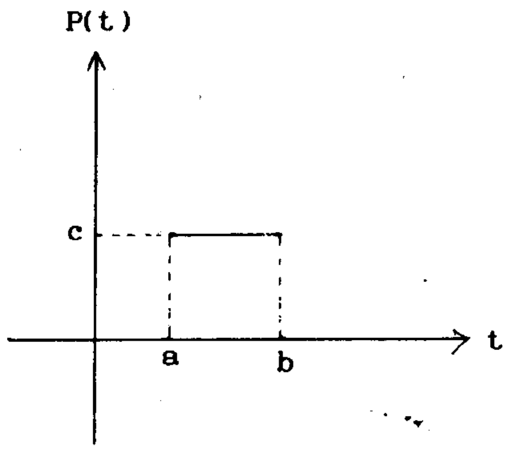
$$= \frac{1}{(s^2+1)(1-\ell^{-\pi s})}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

เรียก f(t) ในตัวอย่างนี้ว่า half-wave rectification ของ sin t มีฟังก์ชันเป็นจำนวนมาก ที่สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย u(t-a) ซึ่งเราทราบแล้วว่า $\hat{L}\,[u(t-a)] = \ell^{-as}/s$ ฉะนั้นเราจะใช้สิ่งนี้ หาผลการแปลงลาปลาซที่น่าสนใจ บางรูปแบบดังนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.13

จงหา $\hat{L}\,[P(t)]$, เมื่อ P(t) เป็น single square ดังรูป 4.6.3



รูป 4.6.3

ผลเฉลย

เนื่องจาก

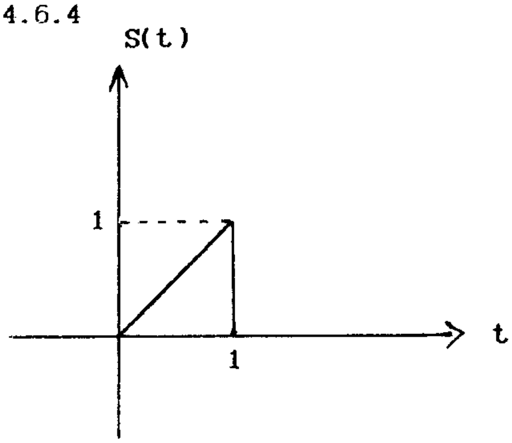
$$P(t) = c\,[u(t-a) - u(t-b)]$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[P(t)] = \frac{c}{s}\,(\ell^{-as} - \ell^{-bs})$$

ตัวอย่าง 4.6.14

จงหา $\hat{L}\,[S(t)]$ เมื่อ $S(t)$ เป็น single sawtooth pulse ดังรูป 4.6.4



รูป 4.6.4

ผลเฉลย

จากตัวอย่าง 4.6.13 ถ้า $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ จะได้

$$\hat{L}\,[P(t)] = \frac{1-\ell^{-s}}{s}$$

เนื่องจาก

$$\int_0^t P(u)\,du = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

ดังนั้นเราพบว่า

$$S(t) = \int_0^t P(u)\,du - u(t-1)$$

ทำให้ได้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้

$$\hat{L}\,[S(t)] = \hat{L}\,[\int_0^t P(u)\,du] - \hat{L}\,[u(t-1)]$$

$$= \frac{1-\ell^{-s}}{s^2} - \frac{\ell^{-s}}{s}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

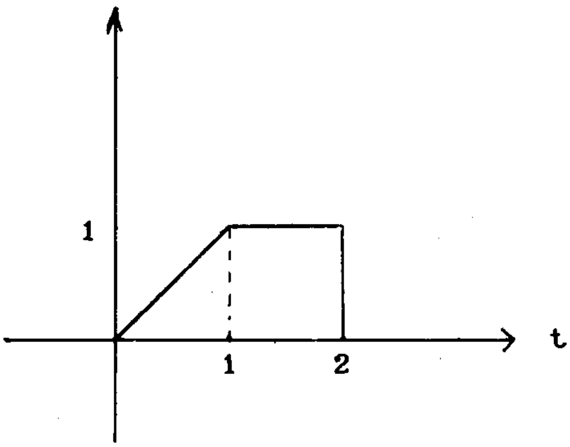
เราต้องกำหนด $\int_0^t P(u)\,du$ ให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเท่านั้น โดยที่เมื่อหาอนุพันธ์แล้วได้ $P(t) = 1 \;,\; 0 \le t \le 1$

$= 0 \;, \quad t > 1$

มิฉะนั้นแล้ว การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันต่อเนื่องจะเป็นไปตามหัวข้อ 1.5.6

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.15

จงหา $\hat{L}\,[J(t)]$, เมื่อ $J(t)$ เป็นดังรูป 4.6.5



รูป 4.6.5

<u>ผลเฉลย</u>

เราพบว่า $J(t) = S(t) + P(t)$

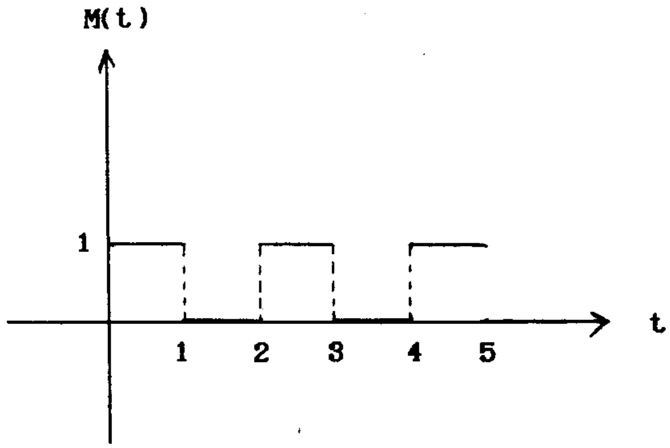
โดย $S(t)$ และ $P(t)$ เป็นตามตัวอย่าง 4.6.14 และ 4.6.13 ; $u=1$ $b=2$, $c=1$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}\,[J(t)] = \frac{1-\ell^{-s}}{s^2} - \frac{\ell^{-2s}}{s}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.16

จงหา $\hat{L}\,[M(t)]$, เมื่อ $M(t)$ เป็น meandu function ดังรูป 4.6.6



รูป 4.6.6

<u>ผลเฉลย</u>

$M(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบ $p = 2$ ซึ่ง $0 \leq t \leq 2$

$$M(t) = \begin{cases} P(t) & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

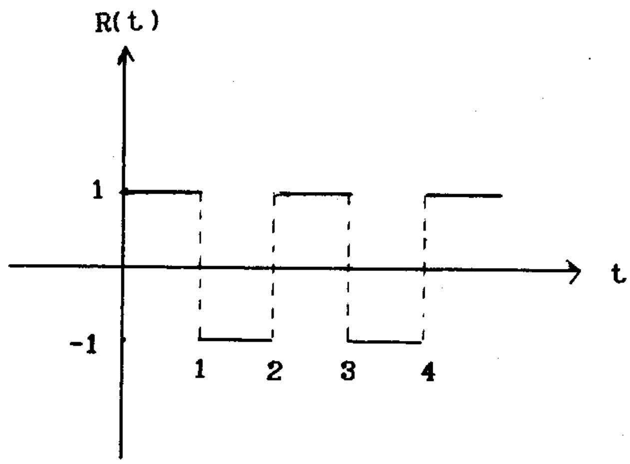
โดย $P(t)$ เป็นฟังก์ชันตามตัวอย่าง 4.6.13 ; $a=0$, $b=1$, $c=1$ จาก สูตรผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบ จะได้

$$\hat{L}\,[M(t)] = \frac{\hat{L}\,[P(t)]}{1-\ell^{-2s}}$$

$$= \frac{1}{s(1+\ell^{-s})}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.17

จงหา $\hat{L}\,[R(t)]$, เมื่อ $R(t)$ เป็น square wave function ดังรูป 4.6.7



รูป 4.6.7

<u>ผลเฉลย</u>

จากการสังเกตจะพบว่า $R(t) = 2M(t) - u(t)$, เมื่อ $M(t)$ เป็นไปตามตัวอย่าง 4.6.16 ดังนั้น

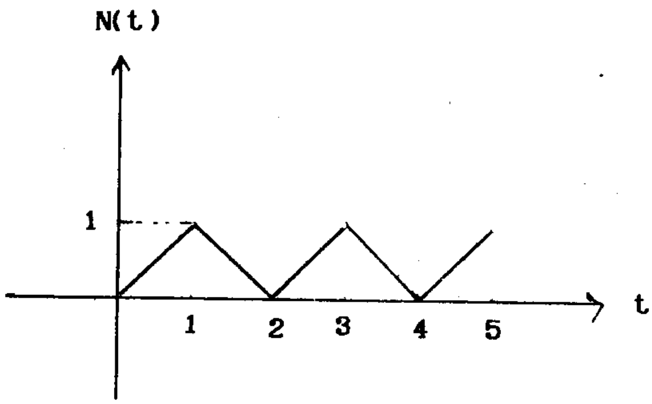
$$\hat{L}\,[P(t)] = 2\,\hat{L}\,[M(t)] - \hat{L}\,[u(t)]$$

$$= \frac{2}{s(1+\ell^{-s})} - \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1-\ell^{-s}}{s(1+\ell^{-s})} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6.18

จงหา $\hat{L}\,[N(t)]$, เมื่อ $N(t)$ เป็น triangular wave function ดังรูป 4.6.8



รูป 4.6.8