$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

ซึ่ง

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{(s-a)(s-\bar{a})}\right] = \hat{L}^{-1}\left[\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

$$= \ell^{\alpha t}\left[A\cos\beta t+\frac{\alpha A+B}{\beta}\sin\beta t\right]$$

2.4 เมื่อ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน และถ้า $(s-a)$ และ $(s-\bar{a})$ เป็นตัวประกอบซ้ำกัน จะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

ซึ่ง จากตัวอย่าง 4.5.9 จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]}\right] = \ell^{\alpha t}\left[\frac{At}{\alpha\beta}\sin\beta t\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\ A+B}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)\right]$$

การหาค่าคงตัว A,B,... ของการแยกเศษส่วนย่อยทำได้ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ซึ่งบางครั้งค่อนข้างจะยุ่งยาก และเราคุ้นเคยกับวิธีนี้แล้ว ในที่นี้เราจะใช้วิธีการที่เรียกว่า "สูตรการกระจายของเฮวีไซด์ (Heaviside expansion formula)

หมายเหตุ

ฟังก์ชัน W(s) ที่จะกล่าวถึงต่อไปในสมการ (4.5.4) , (4.5.8) , (4.5.12) และ (4.5.16) นั้น เป็นผลรวมของเศษส่วนย่อยที่เหลือในแต่ละกรณี ซึ่งไม่อยู่ภายใต้การพิจารณา

ทฤษฎีบท 4.5.2 (ตัวประกอบไม่ซ้ำ , (s-a))

ถ้าเศษส่วนย่อย แยกได้เป็น

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + W(s) \qquad (4.5.4)$$

แล้ว ผลการแปลงผกผันคือ

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = A\ell^{at} + \hat{L}^{-1}[W] \qquad (4.5.5)$$

โดย

$$A = G_a(a) \quad \text{หรือ} \quad A = \frac{P(a)}{Q'(a)} \qquad (4.5.6)$$

ซึ่ง $G_a(s)$ เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการคูณ $F(s)$ ด้วย $(s-a)$ นั่นคือ

$$G_a(s) = \frac{(s-a)\,P(s)}{Q(s)} \qquad (4.5.7)$$

ข้อพิสูจน์

จาก

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + W(s)$$

คูณตลอดด้วย $s-a$ จะได้

$$(s-a)\,F(s) = \frac{(s-a)\,P(s)}{Q(s)} = A + (s-a)\,W(s)$$

ให้ $\frac{(s-a)\,P(s)}{Q(s)} = G_a(s)$

ฉะนั้น

$$G_a(s) = A + (s-a)\,W(s)$$

ให้ $s \to a$ โดยที่ $W(s)$ ไม่มีตัวประกอบ $(s-a)$; จะได้

$$A = G_a(a)$$

จากสมการ (4.5.7) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$G_a(s) = \frac{P(s)}{\dfrac{Q(s)}{(s-a)}}$$

เมื่อให้ $s \to a$ แล้ว $P(s) \to P(a)$ ในขณะที่ตัวส่วนจะอยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด (indeterminate form) $\frac{0}{0}$, โดย L'Hôpital's rule จะได้

$$G_a(a) = \frac{P(a)}{\lim\limits_{s\to a} \frac{Q(s)}{(s-a)}} = \frac{P(a)}{\lim\limits_{s\to a} \frac{Q'(s)}{(s-a)'}}$$

$$= \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = A\ell^{at} + \hat{L}^{-1}[W]$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.15

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $s^3+s^2-6s = s(s^2+s-6) = s(s-2)(s+3)$

ดังนั้น

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s+3}$$

โดยที่

$$P(s) = s+1$$

$$Q(s) = s^3+s^2-6s$$

$$Q'(s) = 3s^2+2s-6$$

จากสมการ (4.5.6)

$$A_1 = \frac{P(0)}{Q'(0)} = -\frac{1}{6}$$

$$A_2 = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{3}{10}$$

$$A_3 = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = \frac{-2}{15}$$

จากสมการ (4.5.7) จะได้

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = \frac{-1}{6} + \frac{3}{10}\ell^{2t} - \frac{2}{15}\ell^{-3t}$$

ทฤษฎีบท 4.5.3 (ตัวประกอบซ้ำ , $(s-a)^m$)

ถ้าเศษส่วนย่อย แยกได้เป็น

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{s-a} + W(s) \tag{4.5.8}$$

แล้วผลการแปลงลาปลาซผกผัน คือ

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = \ell^{at}\left\{A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_2\frac{t}{1!} + A_1\right\} + \hat{L}^{-1}[W] \tag{4.5.9}$$

โดย

$$A_m = G_a(a)\ ,\ A_k = \frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}G_a(s)\Big|_{s=a}\ ;\ k=1,2\ldots m-1 \tag{4.5.10}$$

และ

$$G_a(s) = \frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)} \tag{4.5.11}$$

ข้อพิสูจน์

จาก

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{s-a} + W(s)$$

คูณตลอดด้วย $(s-a)^m$

$$(s-a)^m F(s) = (s-a)^m \frac{P(s)}{Q(s)} = A_m + (s-a)A_{m-1} + (s-a)^2 A_{m-2} + \ldots + (s-a)^m W(s)$$

ให้

$$G_a(s) = \frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)}$$

ฉะนั้น

$$G_a(s) = A_m+(s-a)A_{m-1}+(s-a)^2A_{m-2}+\ldots+(s-a)^m W(s)$$

นั่นคือ

$$G_a(a) = A_m$$

โดยหาอนุพันธ์ของ $G_a(s)$ จะได้

$$G_a'(s) = A_{m-1} + \text{พจน์ที่ประกอบด้วย } (s-a)$$

ดังนั้น

$$G_a'(a) = A_{m-1}$$

โดยหาอนุพันธ์ซ้ำอีก จะพบว่า

$$G_a''(a) = 2!A_{m-2}$$

นั่นคือสมการ (4.5.10) เป็นจริง

และจากตารางผลการแปลงลาปลาซ

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{A_k}{(s-a)^k}\right] = A_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \ell^{at}$$

ทำให้ได้สมการ (4.5.11) เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.16

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+8s+6}{(s+2)^3}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

$$F(s) = \frac{3s^2+8s+6}{(s+2)^3} = \frac{A_3}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_1}{(s+2)}$$

จาก

$$G_a(s) = \frac{(s-a)^m P(s)}{Q(s)}$$

ดังนั้น

$$G_a(s) = \frac{(s+2)^3(3s^2+8s+6)}{(s+2)^3}$$

$$= 3s^2+8s+6$$

$$A_3 = G_{-2}(-2) = 2$$

$$A_2 = G'_{-2}(-2) = 6s+8\Big|_{-2} = -4$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} G''_{-2}(-2) = 3$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{3s^2+8s+6}{(s+2)^3} = \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2}$$

และจาก (4.5.9)

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+8s+6}{(s+2)^3}\right] = \frac{2t^2}{2!} \ell^{-2t} - 4t\ \ell^{-2t} + 3\ \ell^{-2t}$$

$$= t^2 \ell^{-2t} - 4t\ \ell^{-2t} + 3\ \ell^{-2t}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.17

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s^4-7s^3+13s^2+4s-12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^4-7s^3+13s^2+4s-12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1}$$

หา A_1 และ A_2 โดยใช้สมการ (4.3.11) และ (4.3.10) โดย $a = 0$

$$G_a(s) = \frac{P(s)}{(s-3)(s^2-3s+2)}$$

$$A_2 = G_o(0) = 2$$

$$A_1 = G_o'(0) = 3$$

หา B,C และ D โดยใช้สมการ (4.5.6)

$$B = \left.\frac{P(s)}{s^2(s^2-3s+2)}\right|_{s=3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \left.\frac{P(s)}{s^2(s-3)(s-1)}\right|_{s=2} = -2$$

$$D = \left.\frac{P(s)}{s^2(s-3)(s-1)}\right|_{s=2} = -\frac{1}{2}$$

จากสมการ (4.5.5) และ (4.5.9) จะได้

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = 2t+3+\frac{1}{2}\ell^{3t} -2\ell^{2t} - \frac{1}{2}\ell^{t}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.5.4 (ตัวประกอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนและไม่ซ้ำ , (s-a))

ให้ $a = \alpha + i\beta$; α , β เป็นจำนวนจริง และ $\beta \neq 0$ ถ้า $s = a$ เป็นรากของสมการ $G(s) = 0$ แล้ว $s = \bar{a}$ เป็นรากของสมการ $Q(s)=0$ ด้วย (เพราะ $Q(s)$มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง) เนื่องจาก $(s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$ ดังนั้น ถ้าเศษส่วนย่อย แยกได้เป็น

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + W(s) \; ; \; A,B \text{ เป็นจำนวนจริง} \qquad (4.5.12)$$

แล้วผลการแปลงลาปลาซผกผันคือ

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\beta}\ell^{\alpha t}(T_a \cos\beta t + S_a \sin\beta t) + \hat{L}^{-1}[W] \qquad (4.5.13)$$

โดย

$$R_a(a) = S_a + i\,T_a \tag{4.5.14}$$

ซึ่ง

$$R_a(s) = \left\{(s-\alpha)^2+\beta^2\right\} \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{4.5.15}$$

<u>**ข้อพิสูจน์**</u>

จาก

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{As+\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + W(s)$$

คูณตลอดด้วย $(s-\alpha)^2+\beta^2$

$$\{(s-\alpha)^2+\beta^2\}\, F(s) = \{(s-\alpha)^2+\beta^2\} \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$= As+\beta+ \{(s-\alpha)^2+\beta^2\}\, W(s)$$

ให้

$$R_a(s) = As+B+ \{(s-\alpha)^2+\beta^2\}\, W(s)$$

เมื่อ $s \to a$ จะได้

$$R_a(a) = aA+B = (\alpha+i\beta)\, A+B$$

ให้

$$R_a(a) = S_a+iT_a$$

ดังนั้น

$$S_a = \alpha A+B$$

$$T_a = \beta A$$

นั่นคือ

$$\frac{As+\beta}{(s-\alpha)^2\beta^2} = \frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\, \{\frac{T_a(s-\alpha)+\beta S_a}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\}$$

จากตารางผลการแปลงลาปลาซ จะได้

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\beta} \ell^{\alpha t}(T_a \cos \beta t + S_a \sin \beta t) + \hat{L}^{-1}[W]$$

ตัวอย่าง 4.5.18

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)(s^2+4s+5)}\right]$

ผลเฉลย

$$F(s) = \frac{s}{(s+3)(s^2+4s+5)}$$

ในที่นี้

$$a = 2 + i$$

และ $(s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2+\beta^2 = (s+2)^2 + 1$

ให้

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{As+B}{(s+2)^2+1} + \frac{C}{(s+3)}$$

จากสมการ (4.5.6) จะได้

$$C = \left.\frac{2}{s^2+4s+5}\right|_{s=-3} = \frac{-3}{2}$$

จากสมการ (4.5.15) จะได้

$$R_a(s) = [(s+2)^2+1]\frac{s}{(s+3)(s^2+4s+5)} = \frac{s}{s+3}$$

$$R_a(a) = \frac{-2+i}{-2+i+3} = \frac{-2+i}{1+i}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$= S_a + iT_a$$

จากสมการ (4.5.13)

$$\hat{L}^{-1}\,[F(s)] = e^{-2t}\left(\frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right) - \frac{3}{2}\,e^{-3t}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.19

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+7}{(s^2+4)(s+3)^3}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s^2+7}{(s^2+4)(s+3)^3} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C_3}{(s+3)^3} + \frac{C_2}{(s+3)^2} + \frac{C_1}{(s+3)}$$

เนื่องจาก $Q(s)$ มีพจน์ $(s+3)^3$ ดังนั้นใช้สมการ (4.5.10) และ (4.5.11)

$$C_3 = \left.\frac{2s^2+7}{s^2+4}\right|_{s=-3} = \frac{25}{13}$$

$$C_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left.\left(\frac{2s^2+7}{s^2+4}\right)\right|_{s=-3} = \frac{-6}{169}$$

$$C_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left.\left(\frac{2s^2+7}{s^2+4}\right)\right|_{s=-3} = \frac{-23}{2197}$$

จากสมการ (4.5.15)

$$R_a(s) = (s^2+4)\left\{\frac{2s^2+7}{(s^2+4)(s+3)^3}\right\} = \frac{2s^2+7}{(s+3)^3}$$

ในที่นี้ $a = 2i$, ดังนั้น

$$R_a(a) = \frac{-1}{(3+2i)^3} = \frac{-9}{2197} + \frac{46}{2197}\,i$$

$$= S_a + iT_a$$

จากสมการ (4.5.9) และ (4.5.13)

$$\hat{L}^{-1}\ [F(s)] = \frac{23}{2197}\cos 2t\ \frac{-9}{4394}\sin 2t\ +$$

$$\left(\frac{25}{26}t^2\ \frac{-6}{169}\ t\ \frac{-23}{2197}\right) \ell^{-3t}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.5.5 (ตัวประกอบเป็นเชิงซ้อนและซ้ำ , $(s-a)^2$)

ถ้าเศษส่วนย่อย แยกได้เป็น

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} + \frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + W(s) \quad (4.5.16)$$

A,B,C,D เป็นจำนวนจริง

แล้วผลการแปลงลาปลาซผกผันคือ

$$\hat{L}^{-1}\ [F(s)] = \frac{1}{2\beta^3}\ \ell^{\alpha t}\ [(T_a-\beta S_a'-\beta S_a t)\cos\beta t$$

$$(s_a+\beta T_a'+\beta T_a t)\sin\beta t] + \hat{L}^{-1}\ [W] \quad (4.5.17)$$

โดย

$$R_a(a) = S_a + iT_a\ ,\ R_a'(a) = S_a' + iT_a' \qquad (4.5.18)$$

และ

$$R_a(s) = [(s-\alpha)^2+\beta^2]^2\ \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (4.5.19)$$

$$\left(R_a'(a) = \frac{dR(s)}{ds}\Big|_{s=a}\right)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u> ดูได้จากหนังสือ Kreyszig

ตัวอย่าง 4.5.20

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{s-2}{(s^2-4s+13)^2(s+4)(s-6)}\right]$

ผลเฉลย

ให้

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{As+B}{(s^2-4s+13)^2} + \frac{Cs+D}{s^2-4s+13} + \frac{E}{s+4} + \frac{F}{s-6}$$

จากสมการ (4.5.6) จะได้

$$E = \left.\frac{s-2}{(s^2-4s+13)^2(s-6)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{3375}$$

$$E = \left.\frac{s-2}{(s^2-4s+13)^2(s+4)}\right|_{s=6} = \frac{2}{3125}$$

เพราะว่า $(s^2-4s+13) = (s-2)^2+9$

ดังนั้น $\alpha = 2 \ , \ \beta = 3$

จากสมการ (4.5.19)

$$R_a(s) = \frac{s-2}{(s+4)(s-6)}$$

โดย $a = 2+3i$

$$R_a(a) = \frac{2+3i-2}{(2+3i+4)(2+3i-6)} = \frac{2}{125} - \frac{11i}{125}$$

นั่นคือ

$$S_a = \frac{2}{125} \quad \text{และ} \quad T_a = \frac{-11}{125}$$

และ

$$R_a'(s) = \frac{(s+4)(s-6) - (s-2)(2s-2)}{(s+4)^2(s-6)^2}$$

$$R_a'(a) = -\frac{351}{28125} - \frac{132}{28125}\,i$$

$$S_a' = -\frac{351}{28125} \quad \text{และ} \quad T_a' = -\frac{132}{28125}$$

จากสมการ (4.5.17) จะได้ผลการแปลงผกผัน

$$\hat{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{54}\ell^{2t}\left[\left(\frac{-11}{125} + \frac{1053}{28125} - \frac{6}{125}t\right)\cos 3t\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{125} - \frac{396}{28125} - \frac{33}{125}t\right)\sin 3t\right]$$

$$+ \frac{1}{3375}\ell^{-4t} + \frac{2}{3125}\ell^{6t}$$

ในการคำนวณผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันตักยะแท้ (proper rational function) นั่นคือ ลำดับขั้นของเศษส่วนน้อยกว่าของส่วน ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีประโยชน์มาก

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.5.6

ถ้า $P(s) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \ldots + c_m$ และ $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{Q(s)}\right] = f(t)$

โดย $Q(s)$ มีลำดับขั้นมากกว่า m แล้ว

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = c_0 f^{(m)}(t) + c_1 f^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m f(t) \tag{4.5.20}$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

$$\hat{L}[g(t)] = \frac{s}{Q(s)}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้ว่า

$$\hat{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{Q(s)} = \hat{L}[f(t)]$$

โดยการหาผลการแปลงผกผันสมการข้างต้น , $f(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$

นั่นคือ $g(t) = f'(t)$ และ $f(0) = 0$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้

$$\hat{L}\,[f'(t)] = \frac{s}{Q(s)}$$

ทำนองเดียวกัน

ให้ $\hat{L}\,[h(t)] = \dfrac{s^2}{Q(s)}$

จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้ว่า

$$\hat{L}\,[\int_0^t h(\tau)\, d\tau\,] = \frac{s}{Q(s)} = \hat{L}\,[f'(t)]$$

โดยการหาผลการแปลงผกผันสมการข้างบนนี้ , $f'(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$

นั่นคือ $h(t) = f''(t)$ และ $f'(0) = 0$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้ว่า

$$\hat{L}\,[f''(t)] = \frac{s^2}{Q(s)}$$

และสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป จะพบว่า

$$\hat{L}\,[\,f^{(k)}(t)] = \frac{s^k}{Q(s)}\,,\ k \text{ น้อยกว่าลำดับขั้นใน } Q(s)$$

จากคุณสมบัติเชิงเส้น ทำให้เราได้สิ่งที่ต้องการ คือ สมการ (4.5.20)

<u>ข้อสังเกต</u>

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.5.6 นี้ จะสังเกตได้ว่า

ถ้า

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{Q(s)}] = f(t)\ , \text{ และ } Q(s) \text{ มีลำดับขั้น } n \text{ แล้ว}$$

$f(0) = f'(0) = 0, \ldots,\ f^{(n-2)}(0) = 0$

ตัวอย่าง 4.5.21

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+5s-2}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right]$

ผลเฉลย

ในตอนแรกเราจะหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right] = f(t)$

โดยการแยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2}\ell^{t} - \ell^{2t} + \frac{1}{2}\ell^{3t}$$

จากทฤษฎีบท 4.5.6 ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s^2+5s-2}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right] = 3f''(t)+5f'(t)-2f(t)$$

$$= 3\ell^{t} - 20\ell^{2t} + 20\ell^{3t}$$

ยิ่งกว่านั้น $f(0) = 0$ และ $f'(0) = 0$ เป็นไปตามข้อสังเกตด้วย

3. ใช้ผลการประสาน

จาก

$$\hat{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \hat{L}^{-1}[F(s)] * \hat{L}^{-1}[G(s)]$$

ตัวอย่าง 4.5.22

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right]$

ผลเฉลย

ตัวอย่างนี้สามารถใช้วิธีการแยกเศษส่วนย่อยได้ แต่ในที่นี้จะใช้วิธีผลการประสาน

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] = \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] * \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$= e^{2t} * e^{3t}$$

$$= \int_0^t e^{2(t-\tau)}\, e^{3\tau}\, d\tau$$

$$= e^{2t}\int_0^t e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{2t}(e^{t}-1)$$

$$= e^{3t} - e^{2t}$$

ตัวอย่าง 4.5.23

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}\ \frac{1}{s^2+1}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] * \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \cos t * \sin t$$

$$= \int_0^t \cos(t-\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= \int_0^t (\cos t\cos\tau+\sin t\sin\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= \cos t \int_0^t \cos \tau \sin \tau \, d\tau +$$

$$\sin t \int_0^t \sin^2 \tau \, d\tau$$

$$2 \quad 2$$

$$= \cos t \int_0^t \sin \tau \, d(\sin \tau) +$$

$$\sin t \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\tau\right) d\tau$$

$$= \cos t \left(\frac{1}{2} \sin \tau\right) \Big|_0^t +$$

$$\sin t \left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\tau\right) \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2} \cos t \sin^2 t + \frac{t}{2} \sin t -$$

$$\frac{1}{4} \sin t \sin 2t$$

$$= \frac{1}{2} \cos t \sin^2 t + \frac{t}{2} \sin t -$$

$$\frac{1}{2} \cos \sin^2 t$$

$$= \frac{t}{2} \sin t$$

<u>**ข้อสังเกต**</u> :

การหาค่า $\int_0^t \cos (t-\tau) \sin \tau \, d\tau$ **อาจทำโดยใช้สูตรผลคูณก็ได้**

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน โดยใช้ตาราง 4.1.1 และคุณสมบัติเชิงเส้น

1.1 $\frac{5}{s}+\frac{7}{s^2}$

1.2 $\frac{8}{s^3}+\frac{12}{s^4}$

1.3 $\frac{3}{s-1}+\frac{2}{s+1}$

1.4 $\frac{5}{s+2}+\frac{9}{s+4}$

1.5 $\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{3}{s+1}$

1.6 $\frac{2}{s-5}+\frac{3}{(s-5)^2}+\frac{7}{(s-5)^3}$

1.7 $\frac{2+3s}{s^2+1}$

1.8 $\frac{s^2+3s-1}{(s^2+1)^2}$

1.9 $\frac{2\ell^{-s}}{s}+\frac{3\ell^{-2s}}{s-1}$

1.10 $\frac{3(\ell^{-(s-1)}-\ell^{-2(s-1)}}{s-1}+\frac{5(\ell^{-3(s-2)}-\ell^{-4(s-2)})}{s-2}$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน โดยใช้คุณสมบัติต่าง ๆ

2.1 $\frac{1}{s^2+2s}$

2.2 $\frac{2s+3}{s^2-2s+5}$

2.3 $\frac{4+5s}{s^{3/2}}$

2.4 $\frac{1}{\sqrt{s+3}}$

2.5 $\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

2.6 $\ln\frac{s-a}{s-b}$

2.7 $\ln\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)$

3. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

3.1 $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$

3.2 $\frac{s}{s^2-4}$

3.3 $\dfrac{9s-6}{(s-1)(s^2-4)}$

3.4 $\dfrac{s^2+1}{(s-1)(s+3)(s+5)}$

3.5 $\dfrac{s+1}{s^2(s-1)}$

3.6 $\dfrac{s^2-s+1}{(s-1)^2(s+3)}$

3.7 $\dfrac{s-2}{s(s+2)^3}$

3.8 $\dfrac{s^3+1}{(s^2-1)^2}$

3.9 $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$

3.10 $\dfrac{s+1}{(s-2)(s^2+9)}$

3.11 $\dfrac{3s^2+2}{s(s^2+2s+5}$

3.12 $\dfrac{s}{(s^2+1)^2(s^2+2s+5)}$

3.13 $\dfrac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}$

3.14 $\dfrac{1}{(s^2-2s+3)^2(s+5)}$

3.15 $\dfrac{4s^2+5}{(s+3)(s^2+3s+7)}$

4. กำหนดให้ $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3-s^2-9s+9}\right] = \dfrac{1}{24}(2\ell^{3t} + \ell^{-3t} - 3\ell^{t})$

จงหา

4.1 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+2}{s^3-s^2-9s+9}\right]$

4.2 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-1}{s^3-s^2-9s+9}\right]$

5. กำหนดให้ $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}\right] = \dfrac{1}{6}(2\sin t - \sin 2t)$ จงหา

5.1 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{2s-1}{s^4+5s^2+4}\right]$

5.2 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{s^3-s^2}{s^4+5s^2+4}\right]$

5.3 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{2s-1}{s^4+5s^2+4}\right]$

5.4 $\hat{L}^{-1}\left[\dfrac{\ell^{-\pi s}}{s(s^4+5s^2+4)}\right]$

6. จงเขียนผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน F(s) ที่กำหนด ให้อยู่ในรูปผลการประสาน โดยไม่ต้องหาค่าออกมา

6.1 $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$ 6.2 $\frac{1}{s^2(s-2)^2}$

6.3 $\frac{\ell^{-s}}{(s-3)(s-5)}$ 6.4 $\frac{\ell^{-s}}{s(s-2)^2}$

6.5 $\frac{1-\ell^{-2s}}{s(s-1)}$ 6.6 $\frac{1}{s^2(1+\ell^{-3s})}$

7. จงใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน หาค่าผลการแปลงลาปลาซผกผัน ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 $\frac{1}{s\sqrt{s+4}}$ 7.2 $\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}$

7.3 $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ 7.4 $\frac{1}{s^2(s+1)^2}$

7.5 $\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}$

8. จงแสดงว่า ถ้า $\hat{L}\,[f(t)] = F(s)$ และ $a > 0$ แล้ว

$$\hat{L}^{-1}\,[F(as+b)] = \frac{1}{a}\,\ell^{-bt/a}\,f(t/a)$$

9. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.5.1