1.13 $\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

1.14 $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

1.15 $\ln\sqrt{\dfrac{s^2+a^2}{s^2}}$

1.16 $\ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$

1.17 $\ln\dfrac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$

1.18 $\ln\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2}\right)$

1.19 $\ln\left(\dfrac{s+b}{s+a}\right)$

1.20 $\dfrac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$

1.21 $\dfrac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$

1.22 $\dfrac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$

1.24 $\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

1.26 $\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

4.4 ผลการประสาน (Convolution)

จากหัวข้อ 2.4 เราได้นิยามผลการประสานดังนี้

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากในที่นี้ เราพิจารณาทุกฟังก์ชันที่เป็นศูนย์ สำหรับ $t < 0$ นั่นคือ $f(t) = 0$ สำหรับ $t < 0$ และ $g(t-\tau) = 0$ สำหรับ $t - \tau < 0$ (หรือ $t < \tau$) เพราะฉะนั้น เราจะได้นิยามที่ง่ายขึ้น ดังนี้

$$f*g = \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

บทนิยาม 4.4.1

ให้ฟังก์ชัน $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นศูนย์สำหรับ $t<0$ และต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $t \geq 0$ แล้วผลการประสานของ f และ g (เขียนแทนด้วย $f*g$) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t นิยามโดย

$$f*g = \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

ทฤษฎีบท 4.4.1

ถ้าให้ฟังก์ชัน f , g , และ k เป็นไปตามบทนิยาม 4.4.1 แล้ว

$$f*g = g*f$$

$$f*(cg) = (cf)*g = c(f*g) \; ; \; c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$f*(g+k) = f*g + f*k$$

$$f*(g*k) = (f*g)*k$$

ข้อพิสูจน์

เราจะพิสูจน์เฉพาะคุณสมบัติการจัดหมู่เท่านั้น ที่เหลือให้ลองทำเป็นแบบฝึกหัด นั่นคือ จะพิสูจน์ว่า $f*(g*k) = (f*g)*k$

ให้ $A = g*k$

และ $B = f*g$

ดังนั้นจะต้องแสดงว่า $f*A = B*k$ โดยที่ทั้งสองข้างสมการเป็นศูนย์สำหรับ $t \leq 0$

สำหรับ $t > 0$ จะได้

$$A(t) = \int_0^t g(\tau)\, k(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t g(x)\, k(t-x)\, dx$$

ดังนั้น

$$A(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} g(x)\, k(t-\tau-x)\, dx$$

ให้ $y = \tau+x$ จะได้

$$A(t-\tau) = \int_\tau^t g(y-\tau)\, k(t-y)\, dy$$

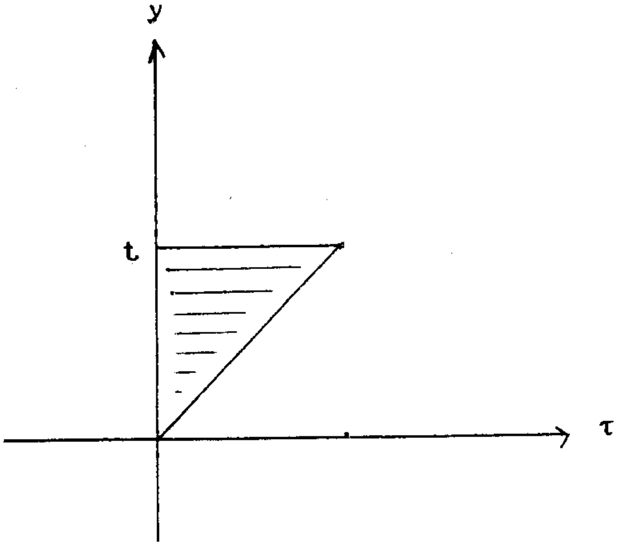
จาก

$$f*A = \int_0^t f(\tau)\, a(t-\tau)\, d\tau$$

จะพบว่า

$$f*A = \int_0^t f(\tau) \int_\tau^t g(y-\tau)\, k(t-y)\, dy\, d\tau$$

ซึ่งเป็นอินทิกรัลสองชั้น (double integral) กระทำบนสามเหลี่ยมในระนาบ τy ดังรูป 4.3.1



รูป 4.3.1

โดยเปลี่ยนอันดับการอินทิเกรต จะได้

$$f*A = \int_0^t \int_0^y f(\tau)\, g(y-\tau)\, d\tau\; k(t-y)\, dy$$

$$= \int_0^t B(y)\, k(t-y)\, dy$$

$$= B * k$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.4.2

ให้ f(t) และ g(t) เป็นศูนย์ สำหรับ $t < 0$ และต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $t \geq 0$ ถ้า $\hat{L}[f]$ และ $\hat{L}[g]$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ แล้ว

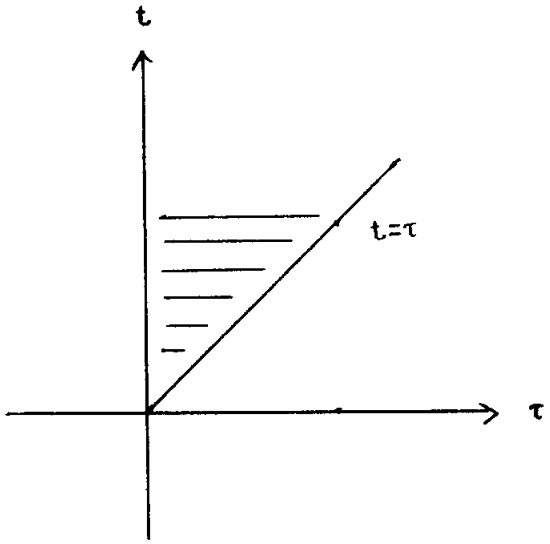
$$\hat{L}[f*g] = \hat{L}[f]\,\hat{L}[g] \quad \text{สำหรับ} \quad \sigma > \sigma_c$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

$$\hat{L}[f*g] = \int_0^\infty (f*g)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, \ell^{-st}\, d\tau\, dt$$

ซึ่งเป็นอินทิกรัลสองชั้นบนพื้นที่ในระนาบ τt ดังรูป 4.3.2



รูป 4.3.2

โดยเปลี่ยนอันดับการอินทิเกรต จะได้

$$\hat{L}\,[f*g] = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\ell^{-st}\, dt\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\ell^{-s\tau} \left(\int_0^\infty g(t-\tau)\ell^{-s(t-\tau)}\, dt\right) d\tau$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $t-\tau = x$, อินทิกรัลอันในจะไม่ขึ้นกับ t

$$\hat{L}\,[f*g] = \int_0^\infty f(\tau)\ell^{-s\tau}\left(\int_0^\infty g(x)\ell^{-sx}\, dx\right) d\tau$$

$$= \hat{L}\,[f]\, \hat{L}\,[g]$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $g(t) = 1$ ดังนั้น

$$f*g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[f*g] = \hat{L}\,[\int_0^t f(\tau)\, d\tau]$$

จากทฤษฎีบท 4.4.2 ที่ว่า $\hat{L}\,[f*g] = L\,[f]\,\hat{L}\,[g]$
ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}\,[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \hat{L}\,[f]\,\hat{L}\,[1]$$

$$= \frac{1}{s} F(s)$$

ซึ่งก็คือคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 4.3.6 ฉะนั้นทฤษฎีบท 4.3.6 เป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทผลการประสาน

2. ถ้า $g(t) = \ell^{at}$ ดังนั้น

$$f*g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)\ell^{a(t-\tau)}\, d\tau$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[f*g] = \hat{L}\,[\ell^{at} \int_0^t f(\tau)\, \ell^{-a\tau}\, d\tau]$$

จากทฤษฎีบท 4.4.2 ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}\,[\ell^{at}\int_{0}^{t} f(\tau)\ell^{-at}\,d\tau] = \hat{L}\,[f]\,\hat{L}\,[\ell^{at}]$$

$$= \frac{F(s)}{s-a}$$

<u>ตัวอย่าง 4.4.1</u>

กำหนดให้ $f(t) = 1$ และ $g(t) = t\ell^{4t}$ จงหา $f*g$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $f*g = g*f$

$$= \int_{0}^{t} g(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \tau\,\ell^{4\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{\ell^{4t}}{4}\,(t-\frac{1}{4}) + \frac{1}{16}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ถ้าเราหา $f*g$ โดยตรง ก็จะได้ผลเฉลยเหมือนกัน แต่ใช้เวลามากกว่า

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.4.1 ข้อ 1,2, และ 3

2. จงหาผลการประสาน $f*g$ และ แสดงด้วยว่า $\hat{L}[f*g] = \hat{L}[f]\,\hat{L}[g]$

2.1 $f(t) = 1 \quad , t \geq 0$ และ $g(t) = t \quad , t \geq 0$

2.2 $f(t) = t \quad , t \geq 0$ และ $g(t) = t^2 \quad , t \geq 0$

2.3 $f(t) = \ell^{2t} \quad , t \geq 0$ และ $g(t) = \ell^{5t} \quad , t \geq 0$

2.4 $f(t) = \sin 3t \ , t \geq 0$ และ $g(t) = \sin 5t, \ t \geq 0$

2.5 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad t \geq 1 \end{cases}$ และ $g(t) = \ell^{t}, \ t \geq 0$

2.6 $f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad t \geq 1 \end{cases}$ และ $g(t) = t^{2}, \ t \geq 0$

คำตอบ

2.

2.1 $\dfrac{t^2}{2} \ , \ t \geq 0$

2.3 $\dfrac{\ell^{5t} - \ell^{2t}}{3} \quad , \ t \geq 1$

2.5 $\begin{cases} \ell^{t} - 1 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ \ell^{t} - \ell^{t-1} & , \quad t \geq 1 \end{cases}$

4.5 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน (The Inverse Laplace Transform)

เราทราบมาแล้วว่า

ถ้า $\hat{L}[f(t)] = F(s)$ (4.5.1)

แล้ว เราเรียก f(t) ว่า ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) เขียนแทนด้วย

$$f(t) = \hat{L}^{-1}[F(s)] \qquad (4.5.2)$$

ปัญหามีอยู่ว่า ถ้ากำหนดฟังก์ชัน F(s) สามารถจะหา f(t) ที่สอดคล้อง (4.5.1) ได้หรือไม่ เพื่อตอบปัญหานี้ จึงมีทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 4.5.1

ถ้า f(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $t \geq 0$ และเป็น $O(e^{\sigma_0 t})$ แล้ว

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \qquad (4.5.3)$$

ข้อพิสูจน์

ให้เป็นแบบฝึกหัด 4.5 ข้อ 8

ทฤษฎีบทนี้บ่งชี้ว่าถ้า $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$ แล้ว F(s)จะไม่มีผลการแปลงผกผันเช่น sin bs , cos bs, e^s , lns ,และฟังก์ชันพหุนามในตัวแปร s เป็นต้น

ทำนองเดียวกับผลการแปลงฟูริเยร์ ผลการแปลงลาปลาซผกผันไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว เช่น

$$f_1(t) = \begin{cases} 5 & , \quad t = 3 \\ 1 & , \quad t \neq 3 \end{cases}$$

และ

$$f_2(t) = 1$$

จะพบว่า $\hat{L}[f_1(t)] = \hat{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s}$, $s > 0$

นั่นคือ สำหรับฟังก์ชันที่เท่ากัน ยกเว้นบางจุดที่ไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนจำกัดจะมีผลการแปลงลาปลาซเท่ากัน ($F(s) = \int_0^\infty f(t)\ell^{-st}\,dt$) จากทฤษฎีบทของเลิช (Lerch's theorem) กล่าวว่าถ้า $\hat{L}[f_1(t)] = \hat{L}[f_2(t)]$ แล้ว $f_1(t) - f_2(t) = n(t)$ โดย $n(t) = \int_0^{t_o} n(t)\,dt = 0$ สำหรับทุก $t_o > 0$ ซึ่งเรียกว่า null function (พิสูจน์ดูจากหนังสือของ Kreider ,et al.)แต่ null function ที่ต่อเนื่องคือฟังก์ชันศูนย์(zero function) ดังนั้น ถ้าต้องการฟังก์ชัน f(t) ที่ต่อเนื่องซึ่งเป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ F(s) แล้ว f(t) จะเป็นผลการแปลงผกผัน(ที่ต่อเนื่อง) ฟังก์ชันเดียวของ F(s) ในการประยุกต์ การที่ไม่ต้องบวกด้วย null function ไม่ถือว่าสำคัญมากแต่อย่างใด เพราะไม่มีผลกระทบต่อคุณสมบัติทางกายภาพของผลเฉลย

การหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน สามารถทำได้โดยใช้ตาราง เช่น เราทราบว่า

$$\hat{L}[\ell^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad s > 0$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = \ell^{at}$$

หรือ

$$\hat{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$$

เหล่านี้เป็นต้น

นอกจากนี้ เราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้โดยวิธีต่อไปนี้

1. ใช้คุณสมบัติต่าง ๆ

1.1 จาก

$$\hat{L}\,[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1\,\hat{L}\,[f_1] + c_2\,\hat{L}\,[f_2]$$

$$= c_1\,F_1(s) + c_2\,F_2(s)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\,[(c_1\,F_1(s) + c_2\,F_2(s)] = c_1f_1 + c_2f_2$$

$$= c_1\,\hat{L}^{-1}\,[f_1] + c_2\,\hat{L}^{-1}[f_2]$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.1

จงหา $\hat{L}^{-1}\,[\frac{5}{s+1} - \frac{6}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}]$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{5}{s+1} - \frac{6}{s^2+4} + \frac{1}{s^4}]$$

$$= 5\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s+1}] - 6\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s^2+4}] + \hat{L}^{-1}[\frac{1}{s^4}]$$

$$= 5\ell^{-t} - 3\sin 2t + \frac{1}{6}t^3$$

1.2 จาก

$$\hat{L}\,[\ell^{at}f(t)] = F(s-a)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\,[F(s-a)] = \ell^{at}f(t) = \ell^{at}\,\hat{L}^{-1}\,[F(s)]$$

หรือ (โดยแทนค่าให้ $s = s+a$)

$$\hat{L}^{-1}\,[F(s)] = \ell^{at}\,\hat{L}^{-1}\,[F(s+a)]$$

ตัวอย่าง 4.5.2

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-2)^5}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจากเราทราบผลการแปลงผกผันของ s ยกกำลัง , ในกรณีนี้ เราอาจแทนค่าให้ s = s+2

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-2)^5}\right] = \ell^{2t}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2-2)^5}\right]$$

$$= \ell^{2t}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^5}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\,\ell^{2t}\,t^4$$

ตัวอย่าง 4.5.3

เนื่องจาก $\hat{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)^3}\right]$

ผลเฉลย

ในที่นี้ เราอาจแทนค่าให้ s = s-4

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+4)^3}\right] = \ell^{-4t}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-4+4)^3}\right]$$

$$= \ell^{-4t}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right]$$

$$= \ell^{-4t}\,t^2$$

ตัวอย่าง 4.5.4

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^2+4}\right]$

ผลเฉลย

พิจารณาตัวส่วน ซึ่งอยู่ในรูป $s^2 + 4$ **เพราะฉะนั้น** เราอาจแทนค่าให้ $s = s+1$ ซึ่งจะทำให้ $(s-1)^2$ กลายเป็น s^2

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^2+4}\right] = \ell^t\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1-1)^2+4}\right]$$

$$= \ell^t\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}\right]$$

$$= \ell^t \cos 2t + \frac{1}{2}\ell^t \sin 2t$$

ตัวอย่าง 4.5.5

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{15}{s^2+4s+13}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $s^2+4s+13 = (s+2)^2+9$ ดังนั้นเราอาจแทนค่าให้ $s = s-2$ ซึ่งอาจทำให้ $(s+2)^2$ กลายเป็น s^2

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{15}{s^2+4s+13}\right] = \hat{L}^{-1}\left[\frac{15}{(s+2)^2+9}\right]$$

$$= 5\ell^{-2t}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$= 5\ell^{-2t} \sin 3t$$

ตัวอย่าง 4.5.6

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $(2s-3)^5 = \frac{1}{2^5}(s-\frac{3}{2})^5$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}\right] = \frac{1}{32}\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{(s-\frac{3}{2})^5}\right]$$

เราอาจแทนค่าให้ $s = s + \frac{3}{2}$ ซึ่งอาจทำให้ $(s - \frac{3}{2})^5$ กลายเป็น s^5

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{(2s-3)^5}\right] = \frac{1}{32}\hat{L}^{-1}\left[\frac{3(s+3/2)-4}{s^5}\right]$$

$$= \frac{3}{32}\ell^{\frac{3}{2}t}\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] + \frac{1}{64}\ell^{\frac{3}{2}t}\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right]$$

$$= \frac{3}{32}\ell^{\frac{3}{2}t}\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{64}\ell^{\frac{3}{2}t}\frac{t^4}{4!} = \frac{t^3(t+8)\ell^{3t/2}}{1536}$$

1.3 จาก

$$\hat{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right] = (-1)^n t^n \hat{L}^{-1}[F(s)]$$

__ตัวอย่าง__ 4.5.7

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}\right]$

__ผลเฉลย__

เนื่องจาก

$$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}\right] = \frac{-1}{2}\hat{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2}(-1)t\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\right]$$

$$= \frac{t}{2\beta}\sin\beta t$$

บางครั้งอาจหาผลการผกผันในอีกลักษณะหนึ่งได้ดังนี้

จาก

$$\hat{L}\,[t\, f(t)] = \frac{-d}{ds} F(s)$$

$$t\, f(t) = -\hat{L}^{-1}\,[\frac{d}{ds} F(s)]$$

$$f(t) = \frac{-1}{t}\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{d}{ds} F(s)]$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.8

จงหา $\hat{L}^{-1}\,[\ln \frac{s+1}{s-1}]$

<u>ผลเฉลย</u>

จาก
$$f(t) = \frac{-1}{t}\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{d}{ds}(\ln \frac{s+1}{s-1})]$$

$$= \frac{-1}{t}\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}]$$

$$= \frac{-1}{t}(\ell^{t} - \ell^{-t})$$

$$= \frac{2 \sinh t}{t}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.9

จงแสดงว่า $\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}] = \frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$

(แนะนำ : ให้หา $\hat{L}\,[t \cos \beta t]$)

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[\cos \beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[t\cos\beta t] = \frac{-d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)$$

$$= -\frac{(s^2+\beta^2)-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

นั่นคือ

$$t\cos\beta t = \hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sin\beta t - 2\beta^2\,\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}]$$

โดยการย้ายข้างจะได้

$$\hat{L}^{-1}\,[\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}] = \frac{1}{2\beta^3}\,(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$$

<u>ตัวอย่าง 4.5.10</u>

จงแสดงว่า $\hat{L}^{-1}\,[\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}] = \frac{1}{2\beta}\,(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t)$

<u>ผลเฉลย</u>

เพราะว่า

$$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

และจาก

$$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right] = \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] - \beta^2\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}\right]$$

ซึ่งพจน์ที่สองทางขวามือ หาได้โดยใช้ตัวอย่าง 4.5.9 นั่นคือ

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right] = \frac{1}{\beta}\sin\beta t - \beta^2\,\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$$

$$= \frac{1}{2\beta}(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t)$$

1.4 จาก

$$\hat{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(x)\,dx$$

ดังนั้น

$$\frac{f(t)}{t} = \hat{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(x)\,dx\right]$$

$$f(t) = t\,\hat{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(x)\,dx\right]$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.11

จาก $\hat{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)^2}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

จาก $f(t) = t\,\hat{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(x)\,dx\right.$

$$= t\,\hat{L}^{-1}\left[\int_s^\infty \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx\right]$$

$$= t\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{-1}{2(x^2-1)}\Big|_s^\infty\right]$$

$$= t\,\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$= \frac{t}{4}(\ell^{t} - \ell^{-t})$$

$$= \frac{t \sinh t}{2}$$

1.5 จาก

$$\hat{L}\left[\int_{0}^{t} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_{0}^{t} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{t} \hat{L}^{-1}[F(s)]\,dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.12

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\beta^2)}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\beta^2)}\right] = \int_{0}^{t} \hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{0}^{t} \sin \beta x\,dx$$

$$= \frac{-1}{\beta^2}\cos \beta t + \frac{1}{\beta}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.13

จงหา $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$, $\left(\hat{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}\right)$

ดังนั้น $\hat{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s+1}}] = \frac{\ell^{-t}t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$, (จากคุณสมบัติ 1.1)

เพราะฉะนั้น

$$\hat{L}^{-1}[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}] = \int_0^t \hat{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s+1}}]\,dx$$

$$= \int_0^t \frac{\ell^{-x}x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\,dx$$

ให้ $x = y^2$ จะได้

$$\hat{L}^{-1}[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} \ell^{-y^2}\,dy$$

โดยทำนองเดียวกัน จะพบว่า

$$\hat{L}^{-1}[\frac{1}{s^k}F(s)] = \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{k \text{ อินทิกรัล}} \hat{L}^{-1}[F(s)]\,dt\ldots dt$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5.14

จงหา $\hat{L}^{-1}[\frac{1}{s^3(s-2)}]$

<u>ผลเฉลย</u>

$$\hat{L}^{-1}[\frac{1}{s^3(s-2)}] = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \hat{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]\,dt\,dt\,dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t \int_0^t \ell^{2t}\,dt\,dt\,dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (\frac{\ell^{2t}}{2} - \frac{1}{2})\,dt\,dt$$

$$= \int_0^t (\frac{\ell^{2t}}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4})\,dt$$

$$= \frac{\ell^{2t}}{8} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8}$$

2. ใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย

ในการประยุกต์ ส่วนใหญ่ผลการแปลงลาปลาซ $(F(s))$ จะอยู่ในรูปฟังก์ชันตักยะ (Rational function) สมมุติให้อยู่ในรูป

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

โดยที่ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และไม่มีตัวประกอบร่วม ซึ่งลำดับชั้น (degree) ของ $P(s)$ น้อยกว่าของ $Q(s)$ (ถ้าลำดับชั้นของ $P(s)$ มากกว่าหรือเท่ากับ $Q(s)$ ให้ตั้งหารก่อน)รูปแบบการแยกเศษส่วนย่อยขึ้นกับตัวประกอบของ $Q(s)$ ดังนี้

2.1 ถ้า $Q(s)$ แยกตัวประกอบได้ไม่ซ้ำกันในรูป $(s-a)$ เราจะได้เศษส่วนย่อย

$$\frac{A}{s-a}$$

ซึ่ง

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-a}\right] = A\,\ell^{at}$$

2.2 ถ้า $Q(s)$ แยกตัวประกอบได้ซ้ำกันในรูป $(s-a)^m$ จะได้เศษส่วนย่อย

$$\frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{s-a}$$

ซึ่ง

$$\hat{L}^{-1}\left[\frac{A_k}{(s-a)^k}\right] = A_k\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\ell^{at} \quad ; \; k = 1,2,\ldots,m$$

2.3 ถ้า a เป็นจำนวนเชิงซ้อน , $a = \alpha + i\beta$ และ $Q(a) = 0$ เศษส่วนย่อยที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนสามารถหลีกเลี่ยงได้ เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ $Q(s)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $Q(\bar{a}) = 0$ โดย $\bar{a} = \alpha - i\beta$ ผลก็คือ $(s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2+\beta^2$ ดังนั้น ถ้า $(s-a)$ และ $(s-\bar{a})$ เป็นตัวประกอบที่ไม่ซ้ำ เศษส่วนย่อยจะอยู่ในรูป