เปลี่ยนตัวแปรให้ at = x จะได้

$$\hat{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(x)\, \ell^{-xs/a}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \quad , \quad a > 0$$

ตัวอย่าง 4.3.3

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ sin at

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\sin t = \frac{\ell^{it} - \ell^{-it}}{2i}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\sin t] = \frac{1}{2i}\,\{\hat{L}\,[\ell^{it}] - \hat{L}\,[\ell^{-it}]\}$$

$$= \frac{1}{2i}\,(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i})$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้

$$\hat{L}\,[\sin at] = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(\frac{s}{a})^2+1}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

ตัวอย่าง 4.3.4

กำหนดให้ $\hat{L}\,[\ell^{-t^2/4}] = \sqrt{\pi}\, \ell^{s^2}\, \mathrm{erfc}(s)$

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ ℓ^{-t^2}

ผลเฉลย

โดยการเขียน $\ell^{-t^2} = \ell^{-a^2t^2/4}$ จะพบว่าในที่นี้ a = 2

จากทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้

$$\hat{L}\,[\ell^{-t^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\ell^{s^2/4}\,\mathrm{erfc}(\frac{s}{2})$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.3.3

ถ้า $f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซสำหรับ $\sigma > \sigma_c$ (โดย $\hat{L}\,[f] = F(s)$) แล้ว ฟังก์ชัน$f(t)\ell^{at}$ จะมีผลการแปลงลาปลาซสำหรับ $\sigma > \sigma_c + \mathrm{Re}(a)$ และ

$$\hat{L}\,[\ell^{at}\,f] = F(s-a) \qquad (4.3.3)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

ให้ $a = a_1 + ia_2$ ดังนั้น $|\ell^{at}| = \ell^{a_1 t}$

นั่นคือ

$$\int_0^\infty |\ell^{at} f(t)|\,\ell^{-\sigma t}dt = \int_0^\infty |f(t)|\,\ell^{-t(\sigma-a_1)}\,dt$$

เพราะว่า $\hat{L}\,[f(t)]$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ เพราะฉะนั้น $\hat{L}\,[\ell^{at}f]$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\sigma - a_1 > \sigma_c$ หรือ $\sigma > \sigma_c + \mathrm{Re}(a)$ ต่อไปจะแสดงว่า สมการ (4.3.3) เป็นจริง

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[\ell^{at}f] = \int_0^\infty f(t)\,\ell^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= F(s-a)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.5

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\ell^{-2t}\cos 3t$

<u>ผลเฉลย</u>

จากตัวอย่าง 4.3.1 จะพบว่า

$$\hat{L}\,[\cos 3t] \doteq \frac{s}{s^2+9}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.3 จะได้

$$\hat{L}\,[\ell^{-2t}\cos 3t] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

$$\hat{L}\,[\ell^{at}\cos kt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.3.4

ถ้า $f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ แล้ว ฟังก์ชัน $t\,f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ และ

$$\hat{L}\,[t\,f(t)] = \frac{-d}{ds}\hat{L}\,[f] \qquad (4.3.4)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

ให้ $b > 0$, ดังนั้น

$$\int_0^\infty t\,|f(t)|\ell^{-\sigma t}dt = \int_0^\infty t\,\ell^{-bt}|f(t)|\ell^{-(\sigma-b)t}dt$$

เนื่องจาก $t\ell^{-bt} \to 0$ เมื่อ $t\to\infty$, $t\ell^{-bt}$ มีขอบเขต
นั่นคือ

$$\int_0^\infty t|f(t)|\ell^{-\sigma t}dt = \int_0^\infty t\ell^{-bt}|f(t)|\ell^{-(\sigma-b)t}\,dt$$

$$< M\int_0^\infty |f(t)|\ell^{-(\sigma-b)t}\,dt$$

แต่ $f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ ดังนั้น อินทิกรัลสุดท้าย หาค่าได้สำหรับ $\sigma-b > \sigma_c$ หรือ $\sigma > \sigma_c$

ต่อไปจะแสดงว่าสมการ (4.3.4) เป็นจริง

เพราะว่า

$$\hat{L}\,[f] = \int_0^\infty \ell^{-st}\,dt$$

และเนื่องจาก $\hat{L}\,[f]$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (แบบฝึกหัด 4.3 ข้อ 2) จึงสามารถหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{-d}{ds}\hat{L}[f] = \frac{-d}{ds}\int_0^\infty f(t)\,\ell^{-st}\,dt$$

ซึ่งอินทิกรัลข้างบนลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ(แบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 3)ดังนั้นจึงสลับอันดับของอินทิกรัลและอนุพันธ์ได้

นั่นคือ

$$\frac{-d}{ds}\hat{L}[f] = -\int_0^\infty f(t)(-t)\,\ell^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty t\,f(t)\,\ell^{-st}\,dt$$

$$= \hat{L}[t\,f(t)]$$

และโดยหาอนุพันธ์ซ้ำหลาย ๆ ครั้ง จะพบว่า

$$\hat{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\hat{L}[f] \; ; \; n - 1,2,3.. \qquad (4.3.5)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.6

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $t\ell^{-2t}\cos t$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.4 จะได้

$$\hat{L}[t\cos t] = \frac{-d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.3 จะได้

$$\hat{L}[t\ell^{-2t}\cos t] = \frac{(s+2)^2-1}{[(s+2)^2+1]^2} = \frac{s^2+4s+3}{(s^2+4s+5)^2}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.3.5

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ สำหรับ $t \geq 0$ ให้ $\hat{L}[f]$ และ $\hat{L}[f']$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ แล้วสำหรับ $\sigma > \sigma_c$

$$\hat{L}[f'] = -f(0) + s\,\hat{L}[f] \qquad (4.3.6)$$

ข้อพิสูจน์

โดยอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_0^\infty f'(x)\ell^{-sx}\,dx = f(x)\ell^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=t} + s\int_0^t f(x)\ell^{-sx}\,dx$$

ให้ $Re(s) = \sigma > \sigma_c$ เมื่อ $t \to \infty$ อินทิกรัลทางซ้ายมือคือ $\hat{L}[f']$ และ

อินทิกรัลทางขวามือคือ $\hat{L}[f]$ ดังนั้น $f(t)\ell^{-st}$ ต้องมีค่าจำกัด เมื่อ $t\to\infty$

ถ้าค่านี้ $\neq 0$, $\int_0^\infty f(t)\,\ell^{-st}\,dt$ จะหาค่าไม่ได้ ดังนั้นค่านี้ต้องเป็นศูนย์

นั่นคือ

$$\int_0^\infty f'(x)\ell^{-sx}\,dx = -f(0) + s\int_0^\infty f(x)\ell^{-sx}\,dx$$

หรือ

$$\hat{L}[f'] = -f(0) + s\,\hat{L}[f]$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ $t = 0$ แล้ว เราจะใช้ $f(0+)$ แทน $f(0)$
2. ทำนองเดียวกัน ถ้า f และ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และเรียบเป็นช่วง ๆ บน $t \geq 0$ และ $f,\ f'$ มีผลการแปลงลาปลาซ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\hat{L}[f''] &= -f'(0) + s\,\hat{L}[f'] \\ &= -f'(0) - s\,f(0) + s^2\,\hat{L}[f] \qquad (4.3.7)\end{aligned}$$

ยิ่งกว่านั้น ยังได้รูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{L}[f^{(n)}(t)] &= -[f^{(n-1)}(0) + s\,f^{(n-2)}(0) + \ldots \\ &\quad + s^{n-1}\,f(0)] + s^n\,\hat{L}[f] \qquad (4.3.8)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3.7

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ cosh at

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้

$$\hat{L}\,[\cosh at] = \frac{1}{a}\,\hat{L}\,[\frac{d}{dt}\sinh at]$$

$$= \frac{1}{a}\,(-0+s\,.\,\frac{a}{s^2-a^2})$$

$$= \frac{s}{s^2-a^2}$$

ตัวอย่าง 4.3.8

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ t^n ; $n = 1,2,3,\ldots$

ผลเฉลย

ฟังก์ชัน $f(t) = t^n$ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและอันดับชี้กำลังด้วย จึงมีผลการแปลงลาปลาซทุก ๆ อนุพันธ์

จาก $\quad f(0) = f'(0) \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$

และ $\quad f^{(n)}(t) = n!$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f^{(n)}(t)] = n!\,\hat{L}\,[1] = s^n\,\hat{L}\,[t^n] - 0 - 0 - \ldots - 0$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ ;\ n = 1,2,3,\ \ldots$$

ตัวอย่าง 4.3.9

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\sin^2 t$

ผลเฉลย

เนื่องจาก $\quad f(t) = \sin^2 t$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$

เพราะว่า

$$\hat{L}\,[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.3.5

$$\hat{L}\,[f'(t)] = s\,\hat{L}\,[f(t)] - f(0)$$

จะได้

$$\hat{L}\,[\sin 2t] = s\,\hat{L}\,[\sin^2 t] - f(0)$$

นั่นคือ

$$\frac{2}{s^2+4} = s\,\hat{L}\,[\sin^2 t]$$

หรือ

$$\hat{L}\,[\sin^2 t] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.3.6

ให้ $f(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $t \geq 0$ ถ้า $f(t)$ มีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับ $\sigma > \sigma_c \geq 0$ แล้วฟังก์ชัน $\int_0^t f(x)\,dx$ จะมีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับ $\sigma > \sigma_c$ และ

$$\hat{L}\,\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\,\hat{L}\,[f] \qquad (4.3.9)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

เพราะว่า

$$\left|\int_0^t f(x)dx\right| \leq \int_0^t |f(x)|dx$$

ดังนั้น สำหรับ $b > 0$

$$\int_0^b \left| \int_0^t f(x)dx \right| \ell^{-\sigma t}\, dt \le \int_0^b \left(\int_0^t |f(x)|dx \right) \ell^{-\sigma t}\, dt$$

$$\le \int_0^b p(t)\ell^{-\sigma t}\, dt \quad (4.3.10)$$

เมื่อให้ $p(t) = \int_0^t |f(x)|dx$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน จะพบว่า

$$\int_0^b p(t)\, \ell^{-\sigma t}\, dt = \frac{p(b)\ell^{-\sigma b}}{-\sigma} + \frac{1}{\sigma}\int_0^b \ell^{-\sigma x}\, |f(x)|\, dx$$

$$\le \frac{1}{\sigma}\int_0^b \ell^{-\sigma x}\, |f(x)|\, dx \quad (4.3.11)$$

ซึ่งอินทิกรัลทางขวามือของอสมการ(4.3.11)หาค่าได้สำหรับ $\sigma > \sigma_c \ge 0$ ดังนั้น จากสมการ (4.3.10) และ (4.3.11) จะได้ว่า ฟังก์ชัน

$\int_0^t f(x)\, dx$ มีผลการแปลงลาปลาซได้

ต่อไปจะแสดงว่าสมการ (4.3.9) เป็นจริง

ให้ $g(t) = \int_0^t f(x)\, dx$

จากทฤษฎีบท 4.3.5

$$\hat{L}[g'] = -g(0) + s\,\hat{L}[g]$$

เนื่องจาก

$$g'(t) = f(t) \quad \text{และ} \quad g(0) = 0$$

ดังนั้น

$$\hat{L}[f] = s\,\hat{L}\left[\int_0^t f(x)\, dx\right]$$

หรือ

$$\hat{L}\,[\int_0^t f(x)\,dx] = \frac{1}{s}\,\hat{L}\,[f]$$

ตัวอย่าง 4.3.10

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ sin at

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\int_0^t \cos ax\,dx = \frac{\sin at}{a}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้ว่า

$$\hat{L}\,[\frac{\sin at}{a}] = \frac{1}{s}\,[\frac{s}{s^2+a^2}]$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

ตัวอย่าง 4.3.11

กำหนดให้ $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \ell^{-x^2}\,dx$

จงหาผลการแปลงลาปลาซ $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \ell^{-x^2}\,dx$$

ดังนั้น

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} \ell^{-x^2}\,dx$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $x^2 = y$ จะได้

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\ell^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy$$

และจาก

$$\hat{L}\,[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad , \; s > 0$$

$$\hat{L}\,[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.3 จะได้

$$\hat{L}\,[\ell^{-t}\, t^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{s+1}}$$

และจากทฤษฎีบท 4.3.6

$$\hat{L}\,[\mathrm{erf}(\sqrt{t})] = \hat{L}\,[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \ell^{-y}\, y^{-1/2}\, dy]$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \qquad , \; s > 0$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 4.3.7

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และมีอันดับชี้กำลัง σ_c

ถ้า $\frac{f(t)}{t}$ มีผลการแปลงลาปลาซแล้ว

$$\hat{L}\,[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{\infty} F(x)\, dx$$

โดย $\hat{L}\,[f(t)] = F(s)$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

จาก

$$F(x) = \int_0^{\infty} \ell^{-xt}\, f(t)\, dt$$

ดังนั้น

$$\int_s^\infty F(x)\,dx = \int_s^\infty \int_0^\infty \ell^{-xt} f(t)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \ell^{-xt}\,dx\right) f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \ell^{-st} \left[\frac{f(t)}{t}\right] dt$$

$$= \hat{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

ตัวอย่าง 4.3.12

จงหา $\hat{L}\left[\frac{1-\ell^{-t}}{t}\right]$

ผลเฉลย

เพราะว่า $\hat{L}\,[1-\ell^{-t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

จากทฤษฎีบท 4.3.7 จะได้ว่า

$$\hat{L}\left[\frac{1-\ell^{-t}}{t}\right] = \int_s^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} [\ln x - \ln (x+1)] \Big|_s^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} [\ln (1+\frac{1}{s}) - \ln (1+\frac{1}{a})]$$

$$= \ln (1+\frac{1}{s})$$

ตัวอย่าง 4.3.13

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ อินทิกรัลซายน์(sine intergral)

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.7

$$\hat{L}\,[\frac{\sin t}{t}] = \int_s^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้

$$\hat{L}\,[Si(t)] = \hat{L}\,[\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx]$$

$$= \frac{1}{s}\,\hat{L}\,[\frac{\sin t}{t}]$$

$$= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

ตัวอย่าง 4.3.14

จงหา $\hat{L}\,[\int_0^t \frac{e^x-\cos x}{x}\,dx]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[e^t-\cos t] = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} \quad , s > 1$$

จากทฤษฎีบท 4.3.7 จะได้

$$\hat{L}\,[\frac{e^t-\cos t}{t}] = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,\Big|_s^{\infty}$$

$$= \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$$

จากทฤษฎีบท 4.3.6 จะพบว่า

$$\hat{L}\left[\int_0^t \frac{\ell^x - \cos x}{x}\, dx \right] = \frac{1}{s} \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} \qquad , s > 1$$

<u>ข้อสังเกต</u>

มีผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องกับอินทิกรัลอีก คือ

$$\hat{L}\left[\int_0^s \frac{f(x)}{x}\, dx \right] = \frac{1}{s} \int_s^{\infty} F(p)\, dp$$

$$\hat{L}\left[\int_s^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \right] = \frac{1}{s} \int_0^{s} F(p)\, dp$$

และ

$$\hat{L}\left[\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \right] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} F(p)\, dp$$

นอกจากนี้แล้ว ยังมีคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์และการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรเสริม อีกดังนี้

ให้

$$\int_0^{\infty} f(t,\lambda)\, \ell^{-st}\, dt = F(s,\lambda)$$

โดย λ เป็นตัวแปรเสริม

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ λ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty f(t,\lambda)\,\ell^{-st}\,dt = \frac{\partial}{\partial\lambda}F(s,\lambda)$$

นั่นคือ

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)\,\ell^{-st}\,dt = \frac{\partial}{\partial\lambda}F(s,\lambda)$$

หรือ

$$\hat{L}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)\right] = \frac{\partial}{\partial\lambda}F(s,\lambda)$$

ทำนองเดียวกัน การอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรเสริม λ เราเริ่มจาก

$$\int_0^\infty f(t,\lambda)\,\ell^{-st}\,dt = F(s,\lambda)$$

อินทิเกรตสมการนี้บน λ จาก λ_1 ถึง λ_2 จะได้

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\int_0^\infty f(t,\lambda)\,\ell^{-st}\,dt\right]d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(s,\lambda)\,d\lambda$$

ถ้าสมมุติว่าอินทิกรัลทั้งสองข้าง หาค่าได้ และมีขอบเขตในช่วง λ_1 ถึง λ_2 เราสลับอันดับการอินทิเกรต

$$\int_0^\infty \ell^{-st}\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t,\lambda)\,d\lambda\right]dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(s,\lambda)\,d\lambda$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(t,\lambda)\,d\lambda\right] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(s,\lambda)\,d\lambda$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.15

พิจารณาดังนี้

เนื่องจาก

$$\hat{L}[\,\ell^{\lambda t}\,] = \frac{1}{s-\lambda}$$

อินทิเกรตบน λ จาก 0 ถึง 1 จะได้

$$\int_0^1 \hat{L}[\,\ell^{\lambda t}\,]\,d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{s-\lambda}\,d\lambda$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\left[\int_0^1 \ell^{\lambda t}\,d\lambda\right] = \int_0^1 \frac{1}{s-\lambda}\,d\lambda$$

หรือ

$$\hat{L}\left[\left.\frac{\ell^{\lambda t}}{t}\right|_0^1\right] = -\ln(s-\lambda)\Big|_0^1$$

$$\hat{L}\left[\frac{1-\ell^{t}}{t}\right] = \ln(s-\lambda)\Big|_0^1$$

$$= \ln(s-1) - \ln s$$

$$= \ln\frac{(s-1)}{s}$$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{s}\right)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.16

พิจารณาดังนี้

เนื่องจาก

$$\hat{L}[\sin\beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad (4.3.12)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ β จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\hat{L}[\sin\beta t] = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right)$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\sin\beta t\right] = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right)$$

$$\hat{L}[t\cos\beta t] = \frac{s^2+\beta^2-2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

หรือ

$$\hat{L}[t\cos\beta t] = \frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} \qquad (4.3.13)$$

และจากสมการ (4.3.12) และ (4.3.13) ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}\left[\frac{\sin\beta t}{\beta} - t\cos\beta t\right] = \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

หรือ

$$\hat{L}[\sin\beta t - \beta t\cos\beta t] = \frac{2\beta^3}{(s^2+\beta^2)^2} \qquad (4.3.14)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.17

จงหา $\hat{L}\left[\frac{\cos b\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right]$

<u>ผลเฉลย</u>

ให้ $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos b\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $x = \sqrt{t}$ จะได้

$$F(s) = 2\int_0^\infty e^{-sx^2}\cos bx\,dx$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ b จะพบว่า

$$\frac{dF}{db} = -2\int_0^\infty x\, \ell^{-sx^2} \sin bx\, dx$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = \sin bx \qquad , \; dv = x\, \ell^{-sx^2}\, dx$$

$$du = b\cos bx\, dx\ , \quad v = \frac{-\ell^{-sx^2}}{2s}$$

ดังนั้น

$$\frac{dF}{db} = -2\left[\frac{-\ell^{-sx^2}}{2s}\sin bx\,\Big|_0^\infty + \frac{b}{2s}\int_0^\infty \ell^{-sx^2}\cos bx\, dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{-b}{2s}\int_0^\infty \ell^{-sx^2}\cos bx\, dx\right]$$

นั่นคือ

$$\frac{dF}{db} + \frac{b}{2s}F = 0$$

ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยการแยกตัวแปรจะได้

$$\frac{dF}{F} = \frac{-b}{2s}\, db$$

อินทิเกรต

$$\ln F = \frac{-b^2}{4s} + C$$

เมื่อ $b = 0$

$$F = 2\int_0^\infty \ell^{-sx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\ , \quad s > 0$$

ดังนั้น

$$C = \ln\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

ในที่สุดจะพบว่า

$$\ln F = \frac{-b^2}{4s} + \ln \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-b^2/4s}$$

หรือ

$$\hat{L}\left[\frac{\cos b\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-b^2/4s}, \quad s > 0$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้โดยใช้คุณสมบัติต่าง ๆ และตาราง

1.1 $f(t) = 3\ell^{-t} + 2\ell^{-2t}$

1.2 $f(t) = 3\cos 2t + 5\cos 7t$

1.3 $f(t) = g''(t)$ โดย $g(t) = \ell^{2t}\sin 3t$

1.4 $f(t) = g'''(t)$ โดย $g(t) = t^2\ell^{-t}$

1.5 $f(t) = \int_0^t x\,\ell^{2x}\cos 3x\,dx$

1.6 $f(t) = \int_0^t (x^5 - x^3 + 1)\,dx$

1.7 $f(t) = g(t-1)$ โดย $g(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t^2\ell^{-t} & , t \geq 0 \end{cases}$

1.8 $f(t) = g(t-\pi)$ โดย $g(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \sin\frac{t}{5} & , t \geq 0 \end{cases}$

1.9 $f(t) = \sin^2 at$

1.10 $f(t) = t\cos at$

1.11 $f(t) = t^2\ell^{bt}$

1.12 $f(t) = t\cosh at$

1.13 $f(t) = t\sin at$

1.14 $f(t) = t\sinh at$

1.15 $f(t) = \frac{1}{t}(1 - \cos at)$

1.16 $f(t) = \frac{1}{t}(1 - \ell^{-t})$

1.17 $f(t) = \frac{1}{t}(\ell^{t} - \cos t)$

1.18 $f(t) = \frac{2}{t}(1-\cosh at)$

1.19 $f(t) = \frac{1}{t}(\ell^{-at} - \ell^{-bt})$

1.20 $f(t) = t^{2} \cos at$

1.21 $f(t) = t^{2} \sin at$

1.22 $f(t) = t\, \ell^{t} \sin t$

1.23 $f(t) = t\, \ell^{t} \cos 2t$

1.24 $f(t) = \cosh at \cos at$

1.25 $f(t) = \sinh at \sin at$

1.26 $f(t) = \sinh at \cos at$

1.27 $f(t) = \cosh at \cos at$

2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ $f(t) = O(|\ell^{\sigma_0 t}|)$ แล้ว $f(s) = \hat{L}[f(t)]$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับ $\sigma>\sigma_0$

<u>คำตอบ</u>

1.

1.1 $(s^{2}+3s+2)^{-1}\ (5s+8)$

1.3 $(s^{2}-4s+13)^{-1}\ (12s-39)$

1.5 $s^{-1}\ (s^{2}-4s+13)^{-2}\ (s^{2}-4s-5)$

1.7 $2\ell^{-s}\ (s+1)^{-3}$

1.9 $\dfrac{2a^{2}}{s^{2}+4a^{2}}$

1.11 $\dfrac{2}{(s-b)^{3}}$