บทที่ 4
ผลการแปลงลาปลาซ
(The Laplace Transform)

4.1 บทนิยามและตัวอย่าง

บทนิยาม 4.1.1

กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งนิยามในช่วง $-\infty < t < \infty$ และให้

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-st}\, dt \ , \ s = \sigma+i\omega \qquad (4.1.1)$$

เราจะเรียก $F_2(s)$ นี้ว่า "ผลการแปลงลาปลาซสองทาง (two - sided Laplace transform)ของฟังก์ชัน $f(t)$" ถ้าอินทิกรัลในสมการ(4.1.1) หาค่าได้ และเรียก

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(s)\ \ell^{st}\ d\omega \qquad (4.1.2)$$

ว่า "ผลการแปลงลาปลาซสองทางผกผันของ $F_2(s)$" ถ้าอินทิกรัลในสมการ (4.1.2) หาค่าได้

ข้อสังเกต

1. จากสมการ (4.1.2) สามารถเขียนได้เป็น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_2(s)\ \ell^{st}\ ds$$

2. จากสมการ (4.1.1) จะพบว่า

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-\sigma t}\ \ell^{-i\omega t}\, dt \qquad (4.1.3)$$

ซึ่งก็คือผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชัน $f(t)\ell^{-\sigma t}$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 เราสามารถกล่าวได้ว่าเงื่อนไขพอเพียงสำหรับการหาค่าอินทิกรัลในสมการ (4.1.3) ได้ คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t}\, dt$$

หาค่าได้

สำหรับ f(t) ที่กำหนดให้ อินทิกรัลนี้อาจหาค่าได้สำหรับ σ บางค่าเท่านั้น พิจารณา

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ \ell^{t} & , t < 0 \end{cases}$$

ซึ่ง

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^{0} \ell^{(1-\sigma)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \ell^{-\sigma t}\, dt$$

อินทิกรัลแรกทางขวามือลู่เข้าสำหรับ $\sigma < 1$ และอินทิกรัลที่สองลู่เข้าสำหรับ $0 < \sigma < 1$ นั่นคือ $F_2(s)$ ในสมการ (4.1.1) ลู่เข้าในบริเวณที่เป็นแถบยาวในระนาบ s

<u>บทนิยาม</u> 4.1.2

กำหนดให้ f(t) เป็นฟังก์ชันที่นิยามในช่วง $t \geq 0$ (นั่นคือให้ $f(t) = 0$, $t < 0$) และให้

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-st}\, dt \;,\; s = \sigma + i\omega \qquad (4.1.4)$$

เราเรียก F(s) ในสมการ (4.1.4) ว่า ผลการแปลงลาปลาซข้างเดียว (one-sided Laplace transform) ของ f(t) หรือเรียกง่าย ๆ ว่า ผลการแปลงลาปลาซของ f(t) ถ้าอินทิกรัลในสมการ (4.1.4) หาค่าได้และเรียก

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\ell^{st}\, d\omega$$

หรือ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} PV \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\ell^{st}\, ds$$

ว่า ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $f(t)$ ถ้าอินทิกรัลหาค่าได้ เช่นเดียวกับผลการแปลงฟูริเยร์ เราจะให้ "$\hat{L}$" แทนการแปลงซึ่งส่งทุกค่าของ $f(t)$ไปยัง $F(s)$ เขียนแทนด้วย

$$\hat{L}\,[f(t)] = F(s)$$

และให้ "$\hat{L}^{-1}$" แทนการแปลงผกผัน นั่นคือ

$$\hat{L}^{-1}\,[F(s)] = f(t)$$

ในที่นี้เราจะศึกษาแต่ผลการแปลงลาปลาซข้างเดียวเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.1

กำหนดให้ $f(t) = 1\ ,\ t > 0$

นั่นคือ $f(t) = u(t)$

จงหาผลการแปลงลาปลาซ

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t)] = \int_{0}^{\infty} f(t)\ell^{-st}\, dt$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f(t)] = \int_{0}^{\infty} \ell^{-st}\, dt$$

$$= \left.\frac{\ell^{-st}}{-s}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1-\ell^{-st}}{s}$$

เพราะว่า $s = \sigma + i\omega$

และ $\ell^{-st} = \ell^{-\sigma t}\,\ell^{-i\omega t}$

$= \ell^{-\sigma t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

ดังนั้น

$$\lim_{t\to\infty} \ell^{-st} = 0\ ,\ \sigma > 0$$

นั่นคือ

$$\hat{L}\,[f(t)] = \hat{L}\,[u(t)] = \frac{1}{s}\ ,\ \sigma > 0$$

ตัวอย่าง 4.1.2

กำหนดให้ $f(t) = \ell^{at}$ สำหรับ $t > 0$ (นั่นคือ $f(t) = \ell^{at}u(t)$)

จงหาผลการแปลงลาปลาซ

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,\ell^{-st}\,dt$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\ell^{at}u(t)] = \int_0^\infty \ell^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\ell^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Bigg|_0^t$$

ให้ $s-a = u+iv$; โดย u และ v เป็นจำนวนจริง

$$\hat{L}[\ell^{at}\,u(t)] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ell^{-ut}\,\ell^{-ivt}}{-(s-a)} + \frac{1}{s-a}\right]$$

$$= \frac{1}{s-a}\ ,\ u = \mathrm{Re}(s-a) > 0$$

ตัวอย่าง 4.1.3

กำหนดให้ $f(t) = t^n\,u(t)$ โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก

จงหาผลการแปลงลาปลาซ

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,\ell^{-st}\,dt$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[t^n u(t)] = \int_0^\infty t^n\,\ell^{-st}\,dt$$

โดยอินทิเกรตทีละส่วน

$$u = t^n \;,\; dv = \ell^{-st}\,dt$$

$$du = nt^{n-1}dt \;,\; v = \frac{\ell^{-st}}{s}$$

จะได้

$$\hat{L}\,[t^n u(t)] = \frac{t^n\ell^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\,\ell^{-st}\,dt$$

เมื่อ $t \to \infty$, $t^n\,\ell^{-st} \to 0$ สำหรับ $\sigma > 0$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[t^n u(t)] = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\,\ell^{-st}\,dt$$

$$= \frac{n}{s}\,\hat{L}\,[t^{n-1}u(t)]$$

ถ้า $n = 1$

$$\hat{L}\,[t\,u(t)] = \frac{1}{s}\,\hat{L}\,[u(t)] = \frac{1}{s^2}$$

ถ้า $n = 2$

$$\hat{L}\,[t^2u(t)] = \frac{2}{s}\,\hat{L}\,[tu(t)] = \frac{2}{s^3}$$

....

$$\hat{L}\,[t^n u(t)] = \frac{n}{s}\,\hat{L}\,[t^{n-1}u(t)]$$

$$= \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s}\cdots\frac{1}{s}\hat{L}[u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

เพราะฉะนั้น จากผลที่ได้นี้ และจากตัวอย่างที่ 4.1.1 ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ , } \sigma > 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \qquad (4.1.5)$$

สำหรับกรณีที่ n ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จาก

$$\hat{L}[t^n u(t)] = \int_0^\infty t^n \ell^{-st}\, dt$$

โดยการให้ u = st จะพบว่า

$$\hat{L}[t^n u(t)] = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n \ell^{-u}\, du$$

ซึ่งอินทิกรัลทางขวามือ คือฟังก์ชันแกมม่า (ดูหัวข้อ 1.5)
นั่นคือ

$$\hat{L}[t^n u(t)] = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1) \qquad (4.1.6)$$

จากสมการ (4.1.5) และ (4.1.6) และเนื่องจาก $\Gamma(n+1) = n!$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า

$$\hat{L}[t^n u(t)] = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1) \text{ , } n > -1$$

<u>ข้อสังเกต</u>

จากสมการ (4.1.5) เราพิจารณาให้ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า s เป็นจำนวนเชิงซ้อน ผลที่ได้ก็เหมือนกัน (ต้องศึกษาเรื่องเลขจำนวนเชิงซ้อนยกกำลัง โดยที่ s^{n+1} คือ exp [(n+1)Log s])

สำหรับผลการแปลงลาปลาซฟังก์ชันพื้นฐานอื่น ๆ ได้รวบรวมไว้ดังตาราง 4.1.1

ตาราง 4.1.1

ผลการแปลงลาปลาซ

	$f(t)$ for $t \geq 0$	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
1	1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > \mathrm{Re}(a)$
3	t^n, $n > -1$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n=0,1,\ldots,$ $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ any $n > -1$	$\sigma > 0$
4	$t^n e^{at}$, $n > -1$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $n=0,1,\ldots,$ $\frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}}$, any $n > -1$	$\sigma > \mathrm{Re}(a)$
5	cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\sigma > \lvert\mathrm{Re}(a)\rvert$
6	sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sigma > \lvert\mathrm{Re}(a)\rvert$
7	cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\sigma > \lvert\mathrm{Im}(a)\rvert$
8	sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sigma > \lvert\mathrm{Im}(a)\rvert$
9	$t^n \cos at, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{2(s^2+a^2)^{n+1}}[(s+ai)^{n+1}$ $+(s-ai)^{n+1}]$	$\sigma > \lvert\mathrm{Im}(a)\rvert$

ตาราง 4.1.1

ผลการแปลงลาปลาซ์

	$f(t)$ for $t \geq 0$	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
10	$t^n \sin at, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{2i(s^2+a^2)^{n+1}}[(s+ai)^{n+1} - (s-ai)^{n+1}]$	$\sigma > \lvert Im(a) \rvert$
11	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$	$\sigma > 0$
12	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$	$\sigma > 0$
13.	$\sin at \sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$	$\sigma > \lvert Im(a+b) \rvert$ and $\sigma > \lvert Im(a-b) \rvert$
14	$e^{at}\sin(bt+c)$, a,b,c real	$\frac{(s-a)\sin c + b\cos c}{(s-a)^2+b^2}$	$\sigma > a$
15	1 for $2nc<t<(2n+1)c$, 0 for $(2n+1)c \leq t<(2n+2)c$, $n=0,1,2,\ldots, c > 0$ (square wave)	$\frac{1}{s(1+e^{-cs})}$	$\sigma > 0$
16	$u(t) - u(t-c), c > 0$	$\frac{1-e^{-cs}}{s}$	$-\infty < \sigma < \infty$
17	$u(t-c), c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$\sigma > 0$

ตาราง 4.1.1

ผลการแปลงลาปลาซ

	$f(t)$ for $t \geq 0$	$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Range of σ
18	$u(t-c_1)-u(t-c_2), 0<c_1<c_2$	$\dfrac{e^{-c_1 s}-e^{-c_2 s}}{s}$	$-\infty<\sigma<\infty$
19	$e^{at}[u(t-c_1)-u(t-c_2)]$, $0<c_1<c_2$	$\dfrac{e^{-c_1(s-a)}-e^{c_2(s-a)}}{s-a}$	$-\infty<\sigma<\infty$
20	$e^{at}u(t-c)$, $c > 0$	$\dfrac{e^{-c(s-a)}}{s-a}$	$\sigma>\mathrm{Re}(a)$
21	$t^n u(t-c), c > 0$, $n = 1,2,...$	$\dfrac{e^{-cs}[(cs)^n+n(cs)^{n-1}+...+n!]}{s^{n+1}}$	$\sigma > 0$
22	$t^n[u(t)-u(t-c)], c > 0$ $n = 1,2,...$	$\dfrac{n!-e^{-cs}[(cs)^n+n(cs)^{n-1}+...+n!]}{s^{n+1}}$	$-\infty<\sigma<\infty$
23	$t[u(t)-u(t-c)]+(2c-t)$ $\times[u(t-c)-u(t-2c)]$	$\dfrac{1-2e^{-cs}+e^{-2cs}}{s^2}$	$-\infty<\sigma<\infty$
24	$\sum_{k=0}^{\infty}(t-2kc)[u(t-2kc)$ $-u(t-2kc-c)]$ + $\sum_{k=0}^{\infty}(2kc+2c-t)\cdot[u(t-2kc-c)$ $-u(t-2kc-2c)]$ (triangular wave)	$\dfrac{1-e^{-cs}}{s^2(1+e^{-cs})}$	$\sigma > 0$
25	$a\sum_{k=0}^{\infty}(t-kc)\cdot[u(t-kc)$ $-u(t-kc-c)]$ (sawtooth wave)	$\dfrac{a(1+cs-e^{cs})}{s^2(1-e^{cs})}$	$\sigma > 0$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & , \quad 1 \le t < \infty \end{cases}$

1.2 $f(t) = \begin{cases} 1-t & , \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t < \infty \end{cases}$

1.3 $f(t) = \begin{cases} t^2 & , \quad 0 \le t \le 1 \\ e^{1-t} & , \quad 1 \le t < \infty \end{cases}$

1.4 $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin 2t & , \quad 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \quad t \ge 2\pi \end{cases}$

1.5 $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\pi} & , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \sin t & , \quad t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

2. จาหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $3e^{-4t}$ 2.2 $2t^2$

2.3 $4 \cos 5t$ 2.4 $\sin \pi t$

2.5 $\frac{-3}{\sqrt{t}}$

คำตอบ

1.

1.1 $s^{-2}(1-\ell^{-s})$

1.3 $s^{-3}[2-\ell^{-s}(s^2+2s+2)+(s+1)^{-1}\ell^{-s}]$

1.5 $[(s+1)^2+4]^{-1}(2-\ell^{-2\pi(s+1)})$

2.

2.1 $\frac{3}{s+4}$, $s > -4$

2.2 $\frac{4}{s^3}$, $s > 0$

2.3 $\frac{4s}{s^2+25}$, $s > 0$

2.4 $\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$, $s > 0$

2.5 $-3\sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$

4.2 ทฤษฎีบทของผลการแปลงลาปลาซ (Theory of the Laplace Transform)

ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ นิยามสำหรับ $t > 0$ และ $f(t) = 0$ สำหรับ $t < 0$ แล้ว จากข้อสังเกตข้อที่ 2 หัวข้อ 4.1 จะพบว่าเงื่อนไขพอเพียงสำหรับการมีผลการแปลงลาปลาซ

$$\int_0^\infty f(t)\, \ell^{-\sigma t}\, dt \ , \quad s = \sigma + i\omega$$

ก็คือ

$$\int_0^\infty \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t}\, dt$$

หาค่าได้

เนื่องจาก

$$\int_0^\infty \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t}\, dt = \int_0^{t_o} \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t}\, dt + \int_{t_o}^\infty \left|f(t)\right| \ell^{-\sigma t}\, dt$$

ถ้า f ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ แล้วอินทิกรัลแรกทางขวามือจะหาค่าได้

ถ้า $|f(t)| \leq M\ell^{\sigma_o t}$, $t > t_o$ แล้ว $|f(t)|\ell^{-\sigma t} \leq M\ell^{\sigma_o t}\, \ell^{-\sigma t}$

$= M\ell^{-(\sigma-\sigma_o)t}$, $t > t_o$ และ

$$\int_{t_o}^\infty \ell^{-(\sigma-\sigma_o)t}\, dt = \frac{\ell^{-(\sigma-\sigma_o)t}}{\sigma-\sigma_o} \ , \quad \sigma > \sigma_o$$

โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ , $\int_{t_o}^\infty |f(t)|\, \ell^{-\sigma t}\, dt$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขพอเพียงของการมีผลการแปลงลาปลาซก็คือ f ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ $|f(t)| \leq M\ell^{\sigma_o t}$, $t > t_o$

บทนิยาม 4.2.1

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าเป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง σ_o (exponential order σ_o) ถ้ามีจำนวนจริง σ_o , M และ t_o ซึ่ง

$$|f(t)| \leq M\, \ell^{\sigma_o t} \quad \text{สำหรับ} \quad t > t_o \qquad (4.2.1)$$

หรือ

$$|f(t)| \leq M\, \ell^{\sigma_o t} \quad \text{เมื่อ} \quad t \to \infty$$

หรือ

$$f(t) = O(\ell^{\sigma_o t})$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $f(t) = O(\ell^{\alpha t})$ และ $\beta > \alpha$ แล้ว $f(t) = O(\ell^{\beta t})$

2. ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty} \ell^{\sigma_o t} f(t) = 0$ แล้ว $f(t) = O(\ell^{\sigma_o t})$

ตัวอย่าง 4.2.1

จงแสดงว่า $f(t) = t^3$ เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลังศูนย์

ผลเฉลย

พิจารณา

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\, \ell^{-\sigma_o t} = \lim_{t\to\infty} t^3\, \ell^{-\sigma_o t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{\ell^{\sigma t}}$$

ถ้า $\sigma_o > 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{\ell^{\sigma_o t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{3t^2}{\sigma_o \ell^{\sigma_o t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{6t}{\sigma_o^2 \ell^{\sigma_o t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{6}{\sigma_o^3 \ell^{\sigma_o t}} = 0$$

นั่นคือ

$$\lim_{t\to\infty} t^3\, \ell^{-\sigma_o t} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \sigma_o > 0$$

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u>

จงแสดงว่า $f(t) = \ell^{at}$ เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง a

<u>ผลเฉลย</u>

พิจารณา

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\,\ell^{-\sigma_0 t} = \lim_{t\to\infty} \ell^{at}\,\ell^{-\sigma_0 t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ell^{(a-\sigma_0)t}$$

ซึ่งถ้า $\sigma_0 > a$ จะพบว่า

$$\lim_{t\to\infty} \ell^{(a-\sigma_0)t} = 0$$

นั่นคือ

$$\lim_{t\to\infty} \ell^{at}\,\ell^{-\sigma_0 t} = 0 \text{ เมื่อ } \sigma_0 > a$$

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u>

จงแสดงว่า $f(t) = \ell^{t^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง

<u>ผลเฉลย</u>

พิจารณา

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\,\ell^{-\sigma_0 t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ell^{t^2}}{\ell^{\sigma_0 t}}$$

ถ้า $\sigma_0 \leq 0$ ลิมิตจะหาค่าไม่ได้

ถ้า $\sigma_0 > 0$ จะพบว่า

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ell^{t^2}}{\ell^{\sigma_0 t}} = \lim_{t\to\infty} \ell^{t(t-\sigma_0)} = \infty$$

นั่นคือ ℓ^{t^2} ไม่เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง เพราะเราไม่สามารถหา σ ซึ่งเมื่อ $\sigma_0 > \sigma$ แล้วทำให้ $\lim_{t\to\infty} f(t)\,\ell^{-\sigma_0 t} = 0$

ข้อสังเกต

ถ้า $|f(t)| \le M$ สำหรับ $t > t_0$ (นั่นคือ f มีขอบเขตสำหรับ $t > t_0$) แล้ว $f(t) = O(1)$

ทฤษฎีบท 4.2.1

ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $0 < t < \infty$ และเป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง σ_0 แล้ว $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$, $s = \sigma + i\omega$ หาค่าได้สำหรับ $\sigma > \sigma_0$

ข้อพิสูจน์

(ให้ทำในแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 3)

ข้อสังเกต

1. เงื่อนไขตามทฤษฎีบท 4.2.1 เป็นเงื่อนไขพอเพียงเท่านั้น ยังมีฟังก์ชันที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว แต่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้ เช่น

$$f(t) = t^{-1/2}$$

ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $t \ge 0$ เพราะว่า $f(t) \to \infty$ เมื่อ $t \to 0^+$ แต่ $f(t)$ นี้เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลังศูนย์ เพราะว่า

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-1/2}}{e^{\sigma_0 t}} = 0 \quad \text{สำหรับ } \sigma_0 > 0 \quad \text{แต่}$$

$$F(s) = \hat{L}\,[t^{-1/2}] = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{-1/2}\, dt \ , \ \sigma > 0$$

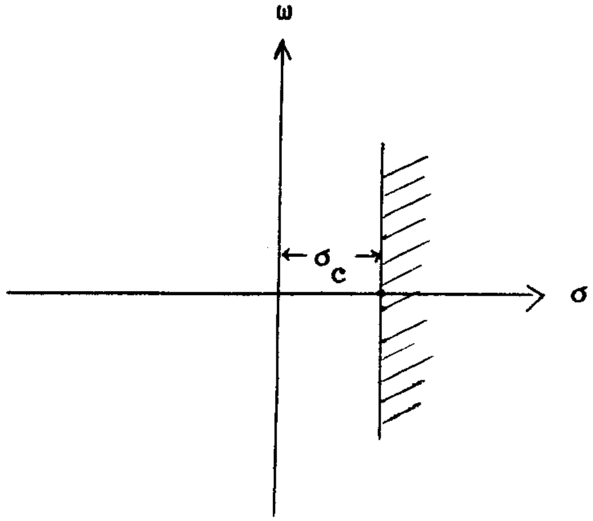
โดยเปลี่ยนตัวแปรให้ $y = \sqrt{st}$ จะได้

$$\hat{L}\,[t^{-1/2}] = 2s^{-1/2} \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \ , \ \sigma > 0$$

จากตัวอย่าง 1.4.1 จะพบว่า

$$\hat{L}\,[t^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \ , \ \sigma > 0$$

2. จะพบว่าผลการแปลงลาปลาซจะหาค่าได้สำหรับทุกค่า s ที่อยู่ทางขวามือของเส้นตรงที่ขนานกับแกนจินตภาพ ($\sigma > \sigma_c$) ดูรูป 4.2.1



รูป 4.2.1

เรียก σ_c นี้ว่า พิกัดที่หนึ่งของการลู่เข้า (abscissa of convergence) โดยค่าของ σ_c ขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน และสามารถเขียนได้ว่า

$$Re(s) > \sigma_c$$

ถ้า $f(t) = O(e^{\sigma_0 t})$ แล้วจากทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้

$$\sigma_c \le \sigma_0$$

แบบฝึกหัด 4.2

1. ฟังก์ชันใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันอันดับชี้กำลัง

   1.1 t^2 1.2 $t^{3/2}$

   1.3 $t^3 \sin t$ 1.4 $\ln(1+t)$

   1.5 $t^2 \ell^{4t} \cos t$ 1.6 $t^2 \ln(1+t)$

2. จงบอกค่าของ σ ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ หาผลการแปลงลาปลาซได้

   2.1 $\ell^{10t} \cos 3t$ 2.2 $\ell xp\ (4t^{3/2})$

   2.3 $t^3 \ell^{-t} \sin 8t$ 2.4 10^t

   2.5 $\ln(1+t)\ \ell^{2t}$ 2.6 $(t+1)^t$

3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.1

4. จงพิสูจน์ว่า $\int_0^\infty f(t)\ell^{-st}dt$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\sigma_0 < \sigma_1 \le \sigma$

5. จงแสดงว่า ถ้า $\lim_{t\to\infty} \ell^{-\alpha t} f(t) = 0$ แล้ว $f(t) = O(\ell^{\alpha t})$

คำตอบ

2.

   2.1 $\sigma > 10$

   2.2 ไม่มีผลการแปลง

   2.3 $\sigma > -1$

   2.4 $\sigma > \ln 10$

   2.5 $\sigma > 2$

   2.6 ไม่มีผลการแปลง

4.3 คุณสมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

การคำนวณผลการแปลงลาปลาซโดยตรงจากนิยามอาจจะยุ่งยาก บางครั้งคุณสมบัติบางอย่างอาจช่วยทำให้การหาผลการแปลงลาปลาซง่าย และสะดวกขึ้น

ทฤษฎีบท 4.3.1

ถ้าฟังก์ชัน f(t) และ g(t) มีผลการแปลงลาปลาซได้ สำหรับ $\sigma > \sigma_f$ และ $\sigma > \sigma_g$ ตามลำดับแล้ว ฟังก์ชัน $c_1 f + c_2 g$ (c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่) จะมีผลการแปลงลาปลาซได้ด้วย สำหรับ $\sigma > \max(\sigma_f, \sigma_g)$ และ

$$\hat{L}\,[c_1 f + c_2 g] = c_1\,\hat{L}\,[f] + c_2\,\hat{L}\,[g] \qquad (4.3.1)$$

ข้อพิสูจน์

เพราะว่า f(t) และ g(t) มีผลการแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

$$\int_0^\infty |f(t)|\,\ell^{-\sigma t}\,dt$$

และ

$$\int_0^\infty |g(t)|\,\ell^{-\sigma t}\,dt$$

หาค่าได้

จาก $|c_1 f_1 + c_2 g| \le |c_1|\,|f| + |c_2|\,|g|$

สำหรับ σ ค่าเดียวกัน จะได้ว่า

$$\int_0^\infty |c_1 f + c_2 g|\,\ell^{-\sigma t}dt \le |c_1|\int_0^\infty |f|\,\ell^{-\sigma t}dt + |c_2|\int_0^\infty |g|\,\ell^{-\sigma t}dt$$

นั่นคือ

$$\int_0^\infty |c_1 f + c_2 g|\;\ell^{-\sigma t}\,dt$$

หาค่าได้ สำหรับ $\sigma > \max(\sigma_f\ ,\ \sigma_g)$

เพราะฉะนั้น $c_1 f + c_2 g$ มีผลการแปลงลาปลาซ

ต่อไปจะแสดงว่า สมการ (4.3.1) เป็นจริง

เนื่องจาก

$$\hat{L}\,[c_1 f + c_2 g] = \int_0^\infty (c_1 f + c_2 g)\ell^{-st}\,dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty f\,\ell^{-st}\,dt + c_2 \int_0^\infty g\,\ell^{-st}\,dt$$

$$= c_1\,\hat{L}\,[f] + c_2\,\hat{L}\,[g]$$

หรือ

$$\hat{L}\,[c_1 f + c_2 g] = c_1\,F(s) + c_2\,G(s)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3.1

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน cos at สำหรับ $t \geq 0$

<u>ผลเฉลย</u>

เพราะว่า

$$\cos at = \frac{\ell^{iat}+\ell^{-iat}}{2}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\cos at] = \hat{L}\,[\tfrac{1}{2}\,\ell^{iat} + \tfrac{1}{2}\,\ell^{-iat}]$$

จากทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่า

$$\hat{L}\,[\cos at] = \frac{1}{2}\,\hat{L}\,[\ell^{iat}] + \frac{1}{2}\,\hat{L}\,[\ell^{-iat}]$$

จากตัวอย่าง 4.1.2 สำหรับ $\mathrm{Re}(s-ia) > 0$ และ $\mathrm{Re}(s+ia) > 0$ จะได้

$$\hat{L}\,[\cos at] = \frac{1}{2}\;\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2}\;\frac{1}{s+ia}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}\;,\; \sigma > |\mathrm{Im}(a)|$$

<u>ข้อสังเกต</u>

จาก $\mathrm{Re}(s-ia) > 0$ และ $\mathrm{Re}(s+ia) > 0$

แต่ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น $\mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Im}(a)|$

<u>ตัวอย่าง 4.3.2</u>

จงหาผลการแปลงลาปลาซของ sinh at

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\sinh at = \frac{\ell^{at} - \ell^{-at}}{2}$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[\sinh at] = \hat{L}\,[\tfrac{1}{2}\,\ell^{at} - \tfrac{1}{2}\,\ell^{-at}]$$

จากทฤษฎีบท 4.3.1

$$\hat{L}\,[\sinh at] = \frac{1}{2}\,\hat{L}\,[\ell^{at}] - \frac{1}{2}\,\hat{L}\,[\ell^{-at}]$$

จากตัวอย่าง 4.1.2 สำหรับ $Re(s-a) > 0$ และ $Re(s+a) > 0$

$$\hat{L}\,[\sinh at] = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{a}{s^2-a^2}\quad , \ \sigma > |Re(a)|$$

<u>ทฤษฎีบท 4.3.2</u>

ถ้า f(t) มีผลการแปลงลาปลาซได้แล้ว สำหรับค่าคงที่ $a > 0$

$$\hat{L}\,[f(at)] = \frac{1}{a}\,F(\frac{s}{a}) \qquad (4.3.2)$$

<u>ข้อพิสูจน์</u>

จากสูตรผลการแปลงลาปลาซ

$$\hat{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,\ell^{-st}\,dt$$

ดังนั้น

$$\hat{L}\,[f(at)] = \int_0^\infty f(at)\,\ell^{-st}\,dt$$